V. Ilín. E. Pozniak

FUNDAMENTOS DEL ANÁLISIS MATEMÁTICO

3

EDITORIAL - MIR - MOSCÚ



FUNDAMENTOS DEL ANÁLISIS MATEMÁTICO

В. А. Ильин, Э. Г. Позняк

ОСНОВЫ МАТЕМАТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА

В 3 томах

Том 3

Москва
«Наука»

V. Ilín, E. Pozniak

FUNDAMENTOS DEL ANÁLISIS MATEMÁTICO

En 3 tomos

3



EDITORIAL MIR MOSCÚ

Traducido del ruso por el ingeniero K. P. Medkov

Impreso en la URSS

На испанском языке

ISBN 5-03-002211-2
ISBN 5-03-002060-8

ÍNDICE

PREFACIO

En el fundamento de este libro se han puesto las conferencias dictadas por los autores en la Universidad Estatal de Moscú M. V. Lomonósov durante toda una serie de años.

Al igual que en los tomos 1, 2, los autores aspiraban a hacer la exposición más sistemática y subrayar los teoremas y conceptos más importantes.

Además del material previsto por el programa, el libro contiene una serie de cuestiones adicionales que juegan un papel de importancia en diferentes apartados de las matemáticas modernas y de la física (teoría de la medida y la integral de Lebesgue, teoría de los espacios de Hilbert y de operadores autoconjugados lineales, teoría de las formas diferenciales en los espacios euclídeos u otros). Algunos apartados están tratados con mayor generalidad y para las restricciones más débiles que las usuales. Entre ellas pueden mencionarse, por ejemplo, las condiciones de la diferenciación término a término y de integración término a término de las sucesiones funcionales y de las series, el teorema sobre el cambio de las variables en una integral múltiple, fórmulas de Green y de Stokes, las condiciones necesarias de integrabilidad de una función acotada según Riemann y según Lebesgue.

Lo mismo que en los tomos 1, 2, aquí se examinan una serie de problemas relacionados con las matemáticas de cálculo. Esto se refiere en primer lugar al complemento al capítulo 2 sobre el cálculo aproximado de las integrales múltiples y un Anexo especial sobre el cálculo de los valores de las funciones según los coeficientes de Fourier aproximadamente definidos (método de regularización de A. N. Tíjonov).

El material de este libro abarca, junto con los tomos 1, 2, todo el curso universitario del análisis matemático.

Acentuemos también que al leer este libro, los capítulos 8 «Medida e integral de Lebesgue», capítulo 11 «Espacio de Hilbert» y todos los complementos pueden omitirse sin perjudicar la comprensión del texto restante de la obra.

Los autores de este libro expresan su profunda gratitud a A. N. Tíjonov y A. G. Svéshnikov por muchos consejos valiosos y observaciones, a Sh. A. Alímov, cuyo trabajo con el libro sale de los márgenes de su preparación para la impresión, a L. D. Kudriávtsev y S. A. Lómov, por un gran número de observaciones críticas de valor, a P. S. Modénov y Ya. M. Zhilcikin quien han prestado los materiales concernientes a la teoría del campo y a los métodos aproximados de cálculos de las integrales múltiples.

V. Ilín, E. Pozniak

Capítulo 1

SUCESIONES Y SERIES FUNCIONALES

En el presente capítulo se estudiarán sucesiones y series cuyos términos no son números, sino funciones definidas sobre un conjunto fijo. Las sucesiones y series de esta índole son de amplio uso en la práctica de representar las funciones y calcularlas de un modo aproximado.

§ 1. Convergencia uniforme

1. Concepto de sucesión funcional y de serie funcional. *Siendo dado un conjunto fijo* $\{x\}$ [1]*, si a todo número n de una serie natural de números* $1, 2, \ldots, n, \ldots$ *se le pone en correspondencia, de acuerdo con una ley determinada, cierta función* $f_n(x)$ *definida sobre el conjunto* $\{x\}$*, entonces el conjunto de funciones enumeradas* $f_1(x), f_2(x), \ldots, f_n(x), \ldots$ *se denominará sucesión funcional.*

Llamemos las funciones separadas $f_n(x)$ *términos* o *elementos* de la sucesión en consideración, y el conjunto $\{x\}$, *dominio* (o campo) *de definición* de la citada sucesión.

Para la designación de una sucesión funcional se empleará el símbolo $\{f_n(x)\}$.

Se denominará *serie funcional* la suma formalmente escrita

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) = u_1(x) + u_2(x) + \ldots + u_n(x) + \ldots \tag{1.1}$$

de un número infinito de términos de la sucesión funcional $\{u_n(x)\}$.

Los términos $u_n(x)$ de esta serie representan funciones definidas en cierto conjunto $\{x\}$.

El conjunto mencionado $\{x\}$ se llamará en este caso *dominio de definición* de la serie funcional (1.1)

La suma de los primeros n términos de la serie (1.1) se denomina, al igual que para el caso de una serie numérica, *n-ésima suma parcial* de dicha serie.

Subrayemos que *el estudio de las series funcionales es sumamente equivalente al estudio de las sucesiones funcionales*, pues a toda serie

---

[1]) Por $\{x\}$ puede entenderse, en particular, tanto un conjunto de puntos de una recta, como también un conjunto de puntos $x = (x_1, x_2, \ldots, x_m)$ del espacio euclídeo E^m.

funcional (1.1) le corresponde unívocamente la sucesión funcional

$$S_1(x),\ S_2(x),\ \ldots,\ S_n(x),\ \ldots \tag{1.2}$$

de sus sumas parciales, y viceversa, a cada sucesión funcional (1.2) le corresponde unívocamente la serie funcional (1.1) con los términos

$$u_1(x) = S_1(x),\ u_n(x) = S_n(x) - S_{n-1}(x)$$
$$\text{para } n \geqslant 2,$$

para la cual la sucesión (1.2) es sucesión de sumas parciales.

Demos a conocer algunos ejemplos de sucesiones funcionales y de series funcionales.

EJEMPLO 1. Veamos una sucesión de funciones $\{f_n(x)\}$, cada una de las cuales está definida en el segmento $0 \leqslant x \leqslant 1$ y tiene

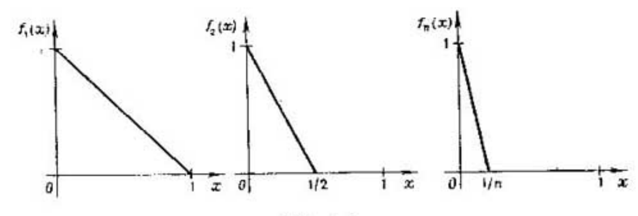


Fig. 1.1.

la forma

$$f_n(x) = \begin{cases} (1 - nx) & \text{para } 0 \leqslant x \leqslant 1/n, \\ 0 & \text{para } 1/n < x \leqslant 1. \end{cases} \tag{1.3}$$

En la fig. 1.1 se exponen las gráficas de las funciones $f_1(x)$, $f_2(x)$ y $f_n(x)$.

EJEMPLO 2. A título de ejemplo de una serie funcional examinemos la siguiente serie en potencias de x:

$$1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{k!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + \ldots \tag{1.4}$$

Notemos que la $(n+1)$-ésima suma parcial de la serie (1.4) difiere del desarrollo de e^x por la fórmula de Maclaurin sólo en la magnitud del término residual $R_{n+1}(x)$.

2. Convergencia de una sucesión funcional en un punto y sobre un conjunto. Supongamos que una sucesión funcional (o una serie) está definida sobre el conjunto $\{x\}$. Fijemos un punto arbitrario x_0, perteneciente al conjunto $\{x\}$, y examinemos todos los términos de

la sucesión (o de la serie) en el punto x_0. Obtendremos en este caso una sucesión numérica (o una serie).

Si la citada sucesión numérica (o la serie) converge, suele decirse que la sucesión funcional (o la serie) *converge en el punto* x_0.

El conjunto de todos los puntos x_0, donde converge la sucesión funcional dada (o la serie) se denomina *dominio de convergencia* de dicha sucesión (o de la serie).

En diversos casos concretos el dominio de convergencia puede o bien coincidir con el dominio de definición, o bien constituir una parte del dominio de definición, o bien ser, en general, conjunto vacío.

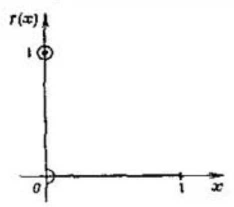


Fig. 1.2.

Más abajo el lector encontrará ejemplos correspondientes.

Supongamos que una sucesión funcional $\{f_n(x)\}$ tiene a título de su dominio de convergencia el conjunto $\{x\}$. Una totalidad de los límites, tomados para todos los valores de x del conjunto $\{x\}$ forma una función bien determinada $f(x)$ que también está definida sobre el conjunto $\{x\}$.

Esta función se denomina *función límite* de la sucesión $\{f_n(x)\}$.

De una manera sumamente análoga, si la serie funcional (1.1) converge sobre cierto conjunto $\{x\}$, sobre dicho conjunto queda definida una función $S(x)$ que será función límite de la sucesión de sus sumas parciales y se llamará suma de la citada serie.

La sucesión (1.3) del ejemplo 1 examinado más arriba *converge en todo el segmento* $0 \leqslant x \leqslant 1$.

En efecto, $f_n(0) = 1$ para todos los números n, es decir, en el punto $x = 0$ la sucesión (1.3) converge hacia la unidad.

En cambio, si fijamos cualquier x del semisegmento obtenido $0 < x \leqslant 1$, todas las funciones $f_n(x)$, a partir desde cierto número (dependiente, por supuesto, de x) serán iguales a cero. Por consiguiente, en cualquier punto x del semisegmento $0 < x \leqslant 1$ la sucesión (1.3) converge hacia cero.

Así pues, la sucesión (1.3) converge en todo el segmento $0 \leqslant x \leqslant 1$ hacia la función límite $f(x)$ que tiene por expresión

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{para } x = 0 \\ 0 & \text{para } 0 < x \leqslant 1. \end{cases}$$

La gráfica de esta función límite va expresada en la fig. 1.2.

Destaquemos que esta función no es continua sobre el segmento $0 \leqslant x \leqslant 1$ (sufre discontinuidad en el punto $x = 0$).

Analicemos ahora la serie funcional (1.4) del ejemplo 2.

Esta serie converge en cualquier punto x de la recta infinita y la suma de la serie es igual a e^x. La demostración puede encontrarse en el cap. 4, v. II (véase ejemplo 3 del p. 1, § 1 del cap. 4) [1]).

3. Concepto de convergencia uniforme sobre un conjunto. Supongamos que una sucesión

$$f_1(x),\ f_2(x),\ \ldots,\ f_n(x),\ \ldots \tag{1.5}$$

converge sobre el conjunto $\{x\}$ hacia una función límite $f(x)$.

***Definición* 1.** *Diremos que la sucesión* (1.5) *converge hacia la función* $f(x)$ *uniformemente sobre el conjunto* $\{x\}$, *si para cualquier* $\varepsilon > 0$ *puede indicarse tal número* $N(\varepsilon)$ *que con* $n \geqslant N(\varepsilon)$ *para todo* x *del conjunto* $\{x\}$ *se verifica la desigualdad* [2])

$$|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon. \tag{1.6}$$

OBSERVACIÓN 1. En esta definición resulta muy esencial el hecho de que el número N depende sólo de ε y no depende de x. De este modo, para cualquier $\varepsilon > 0$ existe un número universal $N(\varepsilon)$, a partir del cual la desigualdad (1.6) queda válida simultáneamente para todos los x del conjunto $\{x\}$.

OBSERVACIÓN 2. *La convergencia de la sucesión* $\{f_n(x)\}$ *sobre el conjunto* $\{x\}$ *no predetermina en absoluto su convergencia uniforme sobre el conjunto aducido.* Así, por ejemplo, la sucesión (1.3) del ejemplo 1 analizado más arriba converge en todo el segmento [0, 1] (lo que se ha establecido anteriormente).

Demostremos que dicha sucesión *no converge uniformemente en el segmento* [0, 1]. Veamos una sucesión de puntos $x_n = \frac{1}{2n}$ ($n = 1, 2, \ldots$) perteneciente al segmento [0, 1]. En cada uno de estos puntos (es decir, para cada número n) se verifican las correlaciones $f_n(x_n) = 1/2$, $f(x_n) = 0$. De este modo, para cualquier número n tenemos

$$|f_n(x_n) - f(x_n)| = 1/2,$$

es decir, cuando $\varepsilon \leqslant 1/2$, la desigualdad (1.6) no puede ser satisfecha simultáneamente para todos los puntos x del segmento [0, 1], cualquiera que sea el número n.

OBSERVACIÓN 3. Indiquemos que la convergencia, uniforme sobre el conjunto $\{x\}$, de una sucesión funcional $\{f_n(x)\}$ hacia la función $f(x)$ es equivalente a la convergencia de una sucesión numérica

---

[1]) Además, esta demostración se deduce directamente de la fórmula de Maclaurin para e^x, y de que el término residual en dicha fórmula tiende hacia cero para todo x.

[2]) Si entendemos por $\{x\}$ un conjunto de puntos $x = (x_1, \ldots, x_m)$ del espacio E^m, obtendremos definición de la convergencia uniforme para la sucesión $f_n(x) = f_n(x_1, x_2, \ldots, x_m)$ de funciones de m variables.

$\{\varepsilon_n\}$, cuyos términos ε_n representan cotas superiores exactas de la función $|f_n(x) - f(x)|$ sobre el conjunto $\{x\}$.

OBSERVACIÓN 4. De la Definición 1 se deduce inmediatamente que si una sucesión $\{f_n(x)\}$ es uniformemente convergente hacia $f(x)$ sobre todo el conjunto $\{x\}$, entonces $\{f_n(x)\}$ converge uniformemente hacia $f(x)$ también en cualquier parte del conjunto $\{x\}$.

Aduzcamos ahora un ejemplo de sucesión funcional que converge uniformemente sobre cierto conjunto $\{x\}$. Examinemos la misma sucesión (1.3), pero, no sobre todo el segmento $[0, 1]$, sino en el $[\delta, 1]$, donde δ es un número fijo del intervalo $0 < \delta < 1$. Para cualquier δ de este género existe un número, a partir del cual todos los elementos $f_n(x)$ serán nulos en el segmento $[\delta, 1]$. Por cuanto la función límite $f(x)$ es también nula en el segmento $[\delta, 1]$, la desigualdad (1.6) en todo el segmento citado será lícita para cualquier $\varepsilon > 0$, a partir del número indicado. Esto demuestra precisamente la convergencia uniforme de la sucesión (1.3) sobre el segmento $[\delta, 1]$.

***Definición* 2.** *Una serie funcional se llama uniformemente convergente sobre el conjunto $\{x\}$ hacia su suma $S(x)$, si la sucesión $\{S_n(x)\}$ de sus sumas parciales converge uniformemente sobre el conjunto $\{x\}$ hacia la función límite $S(x)$.*

Queda a cargo del lector demostrar que la serie funcional (1.4) del ejemplo 2, examinado más arriba, converge hacia su suma e^x uniformemente en cada segmento $-r \leqslant x \leqslant r$, donde r es un número positivo fijo cualquiera [1]).

4. Criterio de Cauchy. Son válidos los siguientes dos teoremas fundamentales.

***Teorema* 1.1.** *Para que una sucesión funcional $\{f_n(x)\}$ converja uniformemente sobre el conjunto $\{x\}$ hacia cierta función límite, es necesario y suficiente que para cualquier $\varepsilon > 0$ se encuentre un número $K(\varepsilon)$ tal que se verifique la desigualdad*

$$|f_{n+p}(x) - f_n(x)| < \varepsilon, \tag{1.7}$$

cualesquiera que sean $n \geqslant N(\varepsilon)$, p naturales ($p = 1, 2, \ldots$) y x del conjunto $\{x\}$.

***Teorema* 1.2.** *Para que una serie funcional*

$$\sum_{k=1}^{\infty} u_k(x) \tag{1.8}$$

[1]) Para demostrar, basta estimar el término residual $R_{n+1}(x)$ en la fórmula de Maclaurin para la función e^x. El citado término residual, representando la diferencia entre e^x y la $(n+1)$-ésima suma parcial de la serie (1.4), satisface simultáneamente para todo x del segmento $-r \leqslant x \leqslant r$ la desigualdad

$$|R_{n+1}(x)| \leqslant \frac{r^{n+1}}{(n+1)!} e^r$$

(véase v. I, fórmula (8.62)).

converja uniformemente sobre el conjunto $\{x\}$ hacia cierta suma, es necesario y suficiente que para cualquier $\varepsilon > 0$ se encuentre un número $N(\varepsilon)$ tal que se verifique la desigualdad

$$\left| \sum_{k=n+1}^{n+p} u_k(x) \right| < \varepsilon, \tag{1.9}$$

cualesquiera que sean $n \geqslant N(\varepsilon)$, p naturales y x del conjunto $\{x\}$.

El teorema 1.2 es un corolario del teorema 1.1: basta indicar que en el primer miembro de la desigualdad (1.9) figura, bajo el signo de módulo, la diferencia $S_{n+p}(x) - S_n(x)$ de las sumas parciales de la serie (1.8).

DEMOSTRACIÓN DEL TEOREMA 1.1. 1) NECESIDAD. Supongamos que la sucesión $\{f_n(x)\}$ converge uniformemente sobre el conjunto $\{x\}$ hacia cierta función límite $f(x)$. Fijamos arbitrariamente $\varepsilon > 0$. Para el número positivo $\varepsilon/2$ existe un número N tal que para todos los $n \geqslant N$ y simultáneamente para todos los x del conjunto $\{x\}$ tenemos

$$| f_n(x) - f(x) | < \varepsilon/2. \tag{1.10}$$

Si p es un número natural cualquiera, entonces para $n \geqslant N$ y para todo x del conjunto $\{x\}$ queda válida con mayor razón una desigualdad

$$| f_{n+p}(x) - f(x) | < \varepsilon/2. \tag{1.11}$$

Por cuanto el módulo de una suma no sobrepasa la suma de módulos, en virtud de (1.10) y (1.11), obtendremos

$$| f_{n+p}(x) - f_n(x) | = | [f_{n+p}(x) - f(x)] + [f(x) - f_n(x)] | \leqslant$$
$$\leqslant | f_{n+p}(x) - f(x) | + | f(x) - f_n(x) | < \varepsilon,$$

cualesquiera que sean $n \geqslant N$, p naturales y x del conjunto $\{x\}$. La necesidad está demostrada.

2) SUFICIENCIA. De la desigualdad (1.7) y del criterio de Cauchy para una sucesión numérica se desprende la convergencia de la sucesión $\{f_n(x)\}$ para x cualquiera del conjunto $\{x\}$ y la existencia de una función límite $f(x)$.

Por cuanto la desigualdad (1.7) se verifica *para cualquier p natural*, entonces, al realizar en dicha desigualdad el paso límite con $p \to \infty$ (véase v. I, teorema 3.13), llegamos a que para todo $n \geqslant N$ y todo x del conjunto $\{x\}$ resulta válida la desigualdad

$$| f(x) - f_n(x) | \leqslant \varepsilon.$$

Debido a que $\varepsilon > 0$ es arbitrariamente elegido, la suficiencia queda demostrada.

5. Criterios suficientes de convergencia uniforme. Enunciemos los criterios de convergencia uniforme o bien en los términos de las

sucesiones, o bien en los términos de las series, según sea la comodidad de razonar [1]).

Introduzcamos, con el fin de enunciar dos criterios de convergencia uniforme de las series funcionales, algunos conceptos nuevos.

Definición 1. *Una sucesión $\{f_n(x)\}$ se llama uniformemente acotada sobre el conjunto $\{x\}$, si existe tal número real $M > 0$ que para cualesquiera números n y para todos los puntos x del conjunto $\{x\}$ se verifica la desigualdad*

$$|f_n(x)| \leqslant M.$$

Definición 2. Una sucesión funcional $\{v_n(x)\}$ *se llama sucesión dotada de variación uniformemente acotada sobre el conjunto $\{x\}$, si la serie funcional*

$$\sum_{k=1}^{\infty} |v_{k+1}(x) - v_k(x)| \qquad (*)$$

converge uniformemente sobre el conjunto citado $\{x\}$.

Indiquemos aquí que *toda sucesión dotada de variación uniformemente acotada sobre el conjunto $\{x\}$ es convergente en el mismo hacia cierta función límite.*

En efecto, la convergencia uniforme sobre el conjunto $\{x\}$ de la serie (*) y el criterio de Cauchy predeterminan la convergencia uniforme sobre el conjunto $\{x\}$ de la serie

$$\sum_{k=1}^{\infty} [v_{k+1}(x) - v_k(x)],$$

cuya n-ésima suma $S_n(x)$ tiene por expresión $S_n(x) = v_{n+1}(x) - v_1(x)$. De la última igualdad se deduce la convergencia uniforme de la sucesión $\{v_n(x)\}$ hacia la función límite $v(x)$ que es igual a $S(x) + v_1(x)$, donde $S(x)$ es la suma de la serie

$$\sum_{k=1}^{\infty} [v_{k+1}(x) - v_k(x)].$$

Podemos formular ahora y demostrar los siguientes dos criterios.

Teorema 1.3.I (Primer criterio de Abel). *Si una serie funcional*

$$\sum_{k=1}^{\infty} u_k(x)$$

posee una sucesión de sumas parciales uniformemente acotada sobre el conjunto $\{x\}$, mientras que la sucesión funcional $\{v_k(x)\}$ está dotada de variación uniformemente acotada sobre el conjunto $\{x\}$ y tiene función límite que es idénticamente igual a cero, entonces la serie

[1]) En virtud de lo dicho en el p. 1, ambas enunciaciones son equivalentes.

funcional

$$\sum_{k=1}^{\infty} [u_k(x)\cdot v_k(x)] \tag{1.12}$$

converge uniformemente sobre el conjunto $\{x\}$.

DEMOSTRACIÓN. Por hipótesis, existe un número $M > 0$ tal que la sucesión $\{S_n(x)\}$ de sumas parciales de la serie (1.1) para cualesquiera números n y para todos los puntos x del conjunto $\{x\}$ satisface la desigualdad $|S_n(x)| \leqslant M$.

Fijamos arbitrariamente $\varepsilon > 0$, y, a base de éste, el número N tal que para todos los n superiores a N, para todos los p naturales y para todos los puntos x del conjunto $\{x\}$ se verifiquen las desigualdades

$$\begin{cases} |v_n(x)| < \dfrac{\varepsilon}{3M} \\ \displaystyle\sum_{k=n+1}^{n+p-1} |v_{k+1}(x)-v_k(x)| < \dfrac{\varepsilon}{3M} \end{cases} \tag{**}$$

(hemos aprovechado aquí la convergencia uniforme sobre el conjunto $\{x\}$ de la sucesión $\{v_n(x)\}$ hacia el cero idéntico, y, además, la convergencia uniforme sobre $\{x\}$ de la serie (*); cuando $p = 1$, la suma en (**) ha de considerarse igual a cero).

En virtud de la identidad de Abel (4.77) del capítulo 4 v. I) y debido a que el módulo de la suma de tres magnitudes no sobrepasa la suma de sus módulos, obtenemos

$$\left|\sum_{k=n+1}^{n+p} [u_k(x)\cdot v_k(x)]\right| \leqslant \left|\sum_{k=n+1}^{n+p-1} S_k(x)\,[v_k(x)-v_{k+1}(x)]\right| + \\ + |S_{n+p}(x)|\cdot|v_{n+p}(x)| + |S_n(x)|\cdot|v_{n+1}(x)|.$$

Teniendo presente que para cualesquiera números n y para todo x de $\{x\}$ se verifica la desigualdad $|S_n(x)| \leqslant M$, tenemos

$$\left|\sum_{k=n+1}^{n+p} [u_k(x)\cdot v_k(x)]\right| \leqslant M\cdot\sum_{k=n+1}^{n+p-1} |v_{k+1}(x)-v_k(x)| + \\ + M\,|v_{n+p}(x)| + M\,|v_{n+1}(x)|.$$

Al cotejar la última desigualdad con las desigualdades (**), llegamos a que para cualesquiera números n superiores a N, para todo p natural y todos los puntos x del conjunto $\{x\}$

$$\left|\sum_{k=n+1}^{n+p} [u_k(x)\cdot v_k(x)]\right| < \varepsilon,$$

lo que es testimonio de que la serie (1.12) converge uniformemente sobre el conjunto $\{x\}$ (en virtud del teorema 1.2).

El teorema está demostrado.

***Teorema 1.3.II* (Segundo criterio de Abel).** *Si la serie funcional (1.1) converge uniformemente sobre el conjunto $\{x\}$ hacia la suma $S(x)$, acotada en el citado conjunto, mientras que una sucesión funcional $\{v_k(x)\}$ está dotada de variación uniformemente acotada en el conjunto $\{x\}$ y tiene funcion límite $v(x)$, acotada sobre dicho conjunto, la serie funcional (1.21) converge uniformemente sobre el conjunto $\{x\}$.*

DEMOSTRACIÓN. Partiremos de la identidad de Abel (13.77) mencionada en el capítulo 4, v. I. Esta identidad puede ser escrita en la forma

$$\sum_{k=n+1}^{n+p} [u_k(x)\cdot v_k(x)] \equiv \sum_{k=n+1}^{n+p-1} S_k(x)[v_k(x)-v_{k+1}(x)] +$$
$$+[S_{n+p}(x)-S_n(x)]\,v_{n+p}(x)+S_n(x)[v_{n+p}(x)-v_{n+1}(x)]$$

(mediante el símbolo $S_n\ (x)$ está designada aquí la n-ésima suma parcial de la serie (1.1); cuando $p=1$, la suma en el segundo miembro ha de considerarse igual a cero).

De la última identidad se deduce la desigualdad

$$\left|\sum_{k=n+1}^{n+p} [u_k(x)\cdot v_k(x)]\right| \leqslant \sum_{k=n+1}^{n+p-1} |S_k(x)|\cdot|v_{k+1}(x)-v_k(x)| +$$
$$+|S_{n+p}(x)-S_n(x)|\cdot|v_{n+p}(x)| + |S_n(x)|\cdot|v_{n+p}(x)-v_{n+1}(x)| \quad \begin{pmatrix} * \\ * \\ * \end{pmatrix}$$

(cuando $p=1$ la suma en el segundo miembro ha de considerarse igual a cero).

Puesto que la suma $S(x)$ de la serie (1.1) y la función límite $v(x)$ de la sucesión $\{v_n(x)\}$ son, por hipótesis, acotadas sobre el conjunto $\{x\}$, se encontrarán unas constantes $M_1>0$ y $M_2>0$ de tal índole que para todo x del conjunto $\{x\}$ se verifiquen las desigualdades

$$|S(x)| \leqslant M_1, \quad |v(x)| \leqslant M_2.$$

De estas desigualdades y de la convergencia uniforme sobre el conjunto $\{x\}$ de las sucesiones $\{S(x)\}$ y $\{v(x)\}$ hacia las funciones límites $S(x)$ y $v(x)$, respectivamente, proviene la existencia de tal número N_1, que para todos los puntos x del conjunto $\{x\}$ y para todo número n que satisface la condición $n \geqslant N_1$ queden válidas las

desigualdades

$$|S_n(x)| \leqslant M_1 + 1, \quad |v_n(x)| \leqslant M_2 + 1. \qquad \text{(a)}$$

Ahora, de la convergencia uniforme sobre el conjunto $\{x\}$ de las series funcionales (1.1) y (*) y del criterio de Cauchy de convergencia uniforme proviene que para $\varepsilon > 0$ arbitrario existen los números $N_2(\varepsilon)$ y $N_3(\varepsilon)$ tales que la desigualdad

$$|S_{n+p}(x) - S_n(x)| < \frac{\varepsilon}{3(M_2+1)} \qquad \text{(b)}$$

quede válida para todos los puntos x del conjunto $\{x\}$, todos los p naturales y todos los n que satisfacen la condición $n \geqslant N_2(\varepsilon)$, y la desigualdad

$$\sum_{k=n+1}^{n+p-1} |v_{k+1}(x) - v_k(x)| < \frac{\varepsilon}{3(M_1+1)} \qquad \text{(c)}$$

quede válida para todos los puntos x del conjunto $\{x\}$, todos los p naturales y todos los n que satisfacen la condición $n \geqslant N_3(\varepsilon)$.

Por fin, de la identidad

$$v_{n+p}(x) - v_{n+1}(x) \equiv \sum_{k=n+1}^{n+p-1} [v_{k+1}(x) - v_k(x)],$$

y de las desigualdades

$$|v_{n+p}(x) - v_{n+1}(x)| \leqslant \sum_{k=n+1}^{n+p-1} |v_{k+1}(x) - v_k(x)|$$

que proviene de la identidad y (c) se deduce que

$$|v_{n+p}(x) - v_{n+1}(x)| < \frac{\varepsilon}{3(M_1+1)} \qquad \text{(d)}$$

para todos los puntos x del conjunto $\{x\}$, todos los p naturales y todos los n que satisfacen la condición $n \geqslant N_3(\varepsilon)$.

Denotemos con $N(\varepsilon)$ el número máximo de los tres: N_1, N_2 y N_3. Entonces, cuando $n \geqslant N(\varepsilon)$, para todos los puntos x del conjunto $\{x\}$ y para todo p natural se verificará cada una de las cuatro desigualdades (a), (b), (c) y (d).

De estas desigualdades y de $\begin{pmatrix} * \\ * \\ * \end{pmatrix}$ se deduce que

$$\left| \sum_{k=n+1}^{n+p-1} [u_k(x) \cdot v_k(x)] \right| < \varepsilon$$

para cualquier $n \geq N(\varepsilon)$, todo p natural y para todos los puntos x del conjunto $\{x\}$.

En virtud del criterio de Cauchy, la serie (1.12) converge uniformemente sobre el conjunto $\{x\}$. El teorema está demostrado.

Corolario del teorema 1.3.1. (Criterio de Dirichlet—Abel). Si la serie funcional (1.1) posee una sucesión de sumas parciales uniformemente acotada sobre el conjunto $\{x\}$, y si la sucesión funcional $\{v_k(x)\}$ no crece en todo punto del conjunto $\{x\}$, siendo uniformemente convergente en dicho conjunto hacia cero, la serie funcional (1.12) converge uniformemente sobre el conjunto $\{x\}$.

Basta notar que la sucesión $\{v_k(x)\}$ que no crece en todo punto del conjunto $\{x\}$ y que converge en el mismo hacia cero posee a ciencia cierta sobre el conjunto $\{x\}$ una variación uniformemente acotada, pues para dicha sucesión la n-ésima suma $S_n(x)$ de la serie (*) es igual a $v_1(x) - v_{n+1}(x)$, y resulta que existe el siguiente límite uniforme sobre el conjunto $\{x\}$

$$\lim_{n\to\infty} S_n(x) = \lim_{n\to\infty} [v_1(x) - v_{n+1}(x)] = v_1(x).$$

Estudiemos, a título de ejemplo, la cuestión de convergencia uniforme de una serie

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\operatorname{sen} kx}{k+(1+|x|)^k}. \qquad (1.13)$$

Por cuanto la sucesión

$$v_k(x) = \frac{1}{k+(1+|x|)^k}$$

no crece en todo punto de la recta infinita $-\infty < x < +\infty$ y es uniformemente convergente en la misma hacia cero, la serie (1.13) será convergente, en virtud del criterio de Dirichlet — Abel, en cualquier conjunto, donde la serie

$$\sum_{k=1}^{\infty} \operatorname{sen}(kx) \qquad (1.13')$$

posee una sucesión uniformemente acotada de sumas parciales. Calculemos y estimemos la n-ésima suma parcial $S_n(x)$ de la serie (1.13').

Sumando la identidad

$$2\operatorname{sen}\frac{x}{2}\cdot\operatorname{sen} kx = \cos\left(k-\frac{1}{2}\right)x - \cos\left(k+\frac{1}{2}\right)x$$

según todos los k de 1 a n, obtendremos

$$2\,\mathrm{sen}\,\frac{x}{2}\cdot S_n(x)=\cos\frac{x}{2}-\cos\left(n+\frac{1}{2}\right)x.$$

De aquí,

$$S_n(x)=\frac{\cos\frac{x}{2}-\cos\left(n+\frac{1}{2}\right)x}{2\,\mathrm{sen}\,\frac{x}{2}}.$$

Por consiguiente, para todos los números n se verifica la desigualdad

$$|S_n(x)|\leqslant\frac{1}{\left|\mathrm{sen}\,\frac{x}{2}\right|}. \qquad (1.14)$$

De la desigualdad (1.14) se deduce obviamente que la sucesión $\{S_r(x)\}$ de sumas parciales de la serie (1.13′) está uniformemente acotada en cualquier segmento fijo privado de los puntos $x_m=2\pi m$ $(m=0,\ \pm1,\ \pm2,\ \ldots)$, pues en cualquier segmento de esta índole $\left|\mathrm{sen}\,\frac{x}{2}\right|$ cuenta con una cota inferior exacta *positiva*.

De este modo se ha demostrado que la serie (1.13) converge uniformemente en cualquier segmento que no contiene puntos $x_m=$ $=2\pi m$, donde $m=0,\ \pm1,\ \pm2,\ \ldots$

Teorema 1.4 (criterio de Weierstrass). *Si una serie funcional*

$$\sum_{k=1}^{\infty}u_k(x) \qquad (1.15)$$

está definida sobre el conjunto $\{x\}$ y si existe una serie numérica convergente $\sum\limits_{k=1}^{\infty}c_k$ tal que para todo x del conjunto $\{x\}$ y para cualquier número k se verifica una desigualdad

$$|u_k(x)|\leqslant c_k, \qquad (1.16)$$

entonces la serie funcional (1.15) converge uniformemente sobre el conjunto $\{x\}$.

FORMULACIÓN BREVE. *una serie funcional converge uniformemente sobre un conjunto dado, si se la puede mayorar sobre dicho conjunto mediante una serie numérica.*

DEMOSTRACIÓN. De acuerdo con el criterio de Cauchy, cuando se trata de una serie numérica $\sum\limits_{k=1}^{\infty}c_k$, para cualquier $\varepsilon>0$ existe un número $N(\varepsilon)$ tal que con todo $n\geqslant N(\varepsilon)$ y con cualquier p natural se verifica una desigualdad

$$\sum_{k=n+1}^{n+p}c_k<\varepsilon \qquad (1.17)$$

De las desigualdades (1.16) y (1.17) y de lo que el módulo de una suma no es superior a la suma de módulos, obtenemos

$$\left| \sum_{k=n+1}^{n+p} u_k(x) \right| < \varepsilon,$$

cualesquiera que sean $n \geqslant N(\varepsilon)$, p naturales y x del conjunto $\{x\}$.

Según el criterio de Cauchy, la serie funcional (1.15) es uniformemente convergente sobre el conjunto $\{x\}$. El teorema está demostrado.

EJEMPLO 2. Una serie

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\operatorname{sen} kx}{k^{1+\delta}}, \text{ donde } \delta > 0,$$

converge uniformemente en toda la recta infinita, pues en toda la recta

$$\left| \frac{\operatorname{sen} kx}{k^{1+\delta}} \right| \leqslant \frac{1}{k^{1+\delta}},$$

mientras que la serie numérica $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^{1+\delta}}$ converge cuando $\delta > 0$ (véase v. II, cap. 4).

OBSERVACIÓN 1. *El criterio de Weierstrass no es necesario.*

Efectivamente, se ha establecido anteriormente que la serie (1.12) converge uniformemente sobre cualquier segmento privado de los puntos $x_m = 2\pi m$ $(m = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$. En particular, la serie (1.12) es uniformemente convergente en el segmento $[\pi/2, 3\pi/2]$. No obstante, sobre el segmento mencionado el módulo $\frac{|\operatorname{sen} kx|}{k}$ del k-ésimo término de la serie (1.12) cuenta con la cota superior exacta que es igual a $1/k$, es decir, la serie numérica mayorante $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$ representa una serie armónica que es a ciencia cierta divergente.

Teorema 1.5 (criterio de Dini) [1]. *Admitamos que una sucesión $\{f_n(x)\}$ no decrece (o no crece) en cada punto del segmento $[a, b]$ y converge en dicho segmento hacia una función límite $f(x)$. En este caso, si todos los elementos de la sucesión $f_n(x)$ y la función límite $f(x)$ son continuos sobre el segmento $[a, b]$, la convergencia de la sucesión $\{f_n(x)\}$ será en $[a, b]$ uniforme.*

DEMOSTRACIÓN. Supongamos, para concretar, que la sucesión $\{f_n(x)\}$ no decrece en el segmento $[a, b]$ (el caso de una sucesión no creciente puede ser reducido al caso dado multiplicando todos los elementos de la sucesión por -1).

---

[1] Dini U., matemático italiano (1845—1918).

Pongamos

$$r_n(x) = f(x) - f_n(x).$$

La sucesión $\{f_n(x)\}$ posee las siguientes propiedades:

1) todos los $r_n(x)$ son no negativos y continuos en el segmento $[a, b]$;

2) $\{r_n(x)\}$ es no creciente sobre el segmento $[a, b]$;

3) en cada punto x del segmento $[a, b]$ existe el límite $\lim\limits_{n\to\infty} r_n(x) = 0$.

Se pide demostrar que la sucesión $\{r_n(x)\}$ converge hacia cero uniformemente sobre el segmento $[a, b]$. Es suficiente probar que, cualquiera que sea $\varepsilon > 0$, existe *al menos* un número n tal que $r_n(x) < \varepsilon$ *simultáneamente para todos los* x *de* $[a, b]$ (en este caso, siendo $\{r_n(x)\}$ no creciente, la desigualdad $r_n(x) < \varepsilon$ será válida también para todos los números ulteriores).

Supongamos que para cierto $\varepsilon > 0$ no existe ninguno de los números n de tal género que inmediatamente para todos los x de $[a, b]$ se verifique la desigualdad $r_n(x) < \varepsilon$. Entonces, para cualquier número n se encontrará un punto x_n de $[a, b]$ tal que

$$r_n(x_n) \geqslant \varepsilon. \tag{1.18}$$

En virtud del teorema de Bolzano—Weierstrass, podemos elegir en la sucesión $\{x_n\}$ una subsucesión $\{x_{n_k}\}$ que sea convergente hacia cierto punto x_0 del segmento $[a, b]$ (véase v. I, cap. 3, § 4).

Todas las funciones $r_m(x)$ (cualquiera que sea el número m) son continuas en el punto x_0. Por consiguiente, para cualquier número m tenemos

$$\lim_{k\to\infty} r_m(x_{n_k}) = r_m(x_0). \tag{1.19}$$

Por otra parte, al seleccionar, para todo número fijo m, un número n_k que sea superior a m, obtendremos (teniendo presente que la sucesión no es creciente)

$$r_m(x_{n_k}) \geqslant r_{n_k}(x_{n_k}).$$

Al cotejar la última desigualdad con (1.18), tendremos

$$r_m(x_{n_k}) \geqslant \varepsilon \tag{1.20}$$

(para cualquier m fijo y para todo número n_k que lo supera).

Por fin, comparando (1.19) y (1.20), obtenemos

$$r_m(x_0) \geqslant \varepsilon$$

(para cualquier número m).

La última desigualdad está en contradicción con el hecho de que la sucesión $\{r_n(x)\}$ es convergente hacia cero en el punto x_0.

Esta contradicción obtenida demuestra el teorema.

OBSERVACIÓN 2. En el teorema de Dini es esencial la condición de *monotonía* de la sucesión $\{f_n(x)\}$ en el segmento $[a, b]$, puesto que una sucesión no monótona en $[a, b]$ de funciones continuas en dicho segmento puede converger en cada punto del mismo hacia una función $f(x)$ continua sobre el segmento en consideración, sin converger hacia ella en $[a, b]$ de un modo uniforme.

Puede servir de ejemplo una sucesión de funciones $f_n(x)$ que son iguales a sen nx para $0 \leqslant x \leqslant \pi/n$, e iguales a cero cuando $\frac{\pi}{n} \leqslant$ $\leqslant x \leqslant \pi$ $(n = 1, 2, \ldots)$. Esta sucesión converge hacia $f(x) \equiv 0$ en cada punto del segmento $[0, \pi]$, pero no converge uniformemente en $[0, \pi]$, pues $|f_n(x_n) - f(x_n)| = 1$ para $x_n = \pi/2n$, *cualquiera que sea* el número n.

OBSERVACIÓN 3. Enunciemos el teorema de Dini en términos de las series: *si todos los términos de una serie son continuos y no negativos sobre el segmento $[a, b]$ y si la suma de dicha serie es también continua en $[a, b]$, entonces la serie citada converge hacia su suma uniformemente en el segmento $[a, b]$.*

OBSERVACIÓN 4. El teorema de Dini y su demostración quedan vigentes si en lugar del segmento $[a, b]$ en este teorema tomamos cualquier conjunto $\{x\}$ cerrado y acotado. Tal conjunto suele llamarse *compacto*.

EJEMPLO 3. Una sucesión $\{x^n\}$ converge hacia cero uniformemente sobre el segmento $\left[0, \frac{1}{2}\right]$.

En efecto, 1) para cualquier x de $\left[0, \frac{1}{2}\right]$ la citada sucesión converge hacia cero; 2) todas las funciones x^n y la función límite cero son continuas sobre $\left[0, \frac{1}{2}\right]$; 3) la sucesión $\{x^n\}$ no va creciendo en el segmento $\left[0, \frac{1}{2}\right]$.

Todas las condiciones del teorema de Dini quedan cumplidas.

6. Paso al límite término a término. Continuidad de la suma de una serie y de la función límite de una sucesión.

Examinemos un punto arbitrario a de una recta infinita y supongamos que $\{x\}$ es un conjunto arbitrario que no contiene, quizás, el punto a, pero posee una propiedad de que en cualquier ε-entorno del punto a están contenidos los puntos de dicho conjunto [1].

Resulta válida la siguiente afirmación.

Teorema 1.6. *Supongamos que una serie funcional*

$$\sum_{k=1}^{\infty} u_k(x) \qquad (1.15)$$

[1]) En otras palabras el punto a es punto límite de $\{x\}$.

converge uniformemente sobre el conjunto $\{x\}$ hacia la suma $S(x)$ Admitamos, además, que todos los términos de esta serie cuentan en el punto a con el valor límite

$$\lim_{x\to a} u_k(x) = b_k.$$

Entonces, la función $S\{x\}$ también tiene en el punto a el valor límite con la particularidad de que

$$\lim_{x\to a} S(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \lim_{x\to a} u_k(x) = \sum_{k=1}^{\infty} b_k, \tag{1.21}$$

es decir, el símbolo lím *de límite y el símbolo* $\sum$ *de sumación pueden ser permutados o, como suele decirse, se puede pasar a un límite término a término.*

DEMOSTRACIÓN. Demostremos, ante todo, que la serie numérica $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ es convergente. En virtud del criterio de Cauchy aplicado a la serie funcional (1.15), existe, para cualquier $\varepsilon > 0$, tal número $N(\varepsilon)$ que

$$| u_{n+1}(x) + u_{n+2}(x) + \ldots + u_{n+p}(x) | < \varepsilon, \tag{1.22}$$

cualesquiera que sean $n \geqslant N(\varepsilon)$, p naturales y x del conjunto $\{x\}$.

Pasando en la desigualdad (1.22) al límite de $x \to a$ [1], obtendremos

$$| b_{n+1} + b_{n+2} + \ldots + b_{n+p} | \leqslant \varepsilon < 2\varepsilon$$

(para todos los $n \geqslant N(\varepsilon)$ y todos los p naturales).

Por consiguiente, para la serie numérica $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ queda cumplido el criterio de Cauchy y esta serie es convergente.

Estimemos ahora la diferencia $S(x) - \sum_{k=1}^{\infty} b_k$ para los valores de x de un entorno pequeño del punto a. Por cuanto $S(x) = \sum_{k=1}^{\infty} u_k(x)$ para todos los puntos del conjunto $\{x\}$, entonces para cualquier número n se verifica la identidad

$$S(x) - \sum_{k=1}^{\infty} b_k \equiv \left[\sum_{k=1}^{n} u_k(x) - \sum_{k=1}^{n} b_k \right] + \sum_{k=n+1}^{\infty} u_k(x) - \sum_{k=n+1}^{\infty} b_k.$$

A partir de esta identidad obtenemos la siguiente desigualdad, para todo x de $\{x\}$:

$$\left| S(x) - \sum_{k=1}^{\infty} b_k \right| \leqslant \left| \sum_{k=1}^{n} u_k(x) - \sum_{k=1}^{n} b_k \right| + \left| \sum_{k=n+1}^{\infty} u_k(x) \right| + \left| \sum_{k=n+1}^{\infty} b_k \right|. \tag{1.23}$$

[1] Tal paso límite puede realizarse según alguna sucesión de puntos $\{x_n\}$ que sea convergente hacia a.

Fijamos al azar $\varepsilon > 0$. Por cuanto la serie $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ es convergente y la serie (1.15) converge uniformemente sobre el conjunto $\{x\}$, existe, para ε fijo, un número n tal que

$$\left| \sum_{k=n+1}^{\infty} b_k \right| < \frac{\varepsilon}{3}, \quad \left| \sum_{k=n+1}^{\infty} u_k(x) \right| < \frac{\varepsilon}{3}, \tag{1.24}$$

cualesquiera que sean los puntos x del conjunto $\{x\}$. Como el límite de una suma finita equivale a la suma de límites de los sumandos, para $\varepsilon > 0$ fijo y para el número seleccionado n puede indicarse un $\delta > 0$ tal que

$$\left| \sum_{k=1}^{n} u_k(x) - \sum_{k=1}^{n} b_k \right| < \frac{\varepsilon}{3}, \tag{1.25}$$

cualesquiera que sean los puntos x del conjunto $\{x\}$ que satisfagan la condición $0 < |x - a| < \delta$.

Al introducir (1.24) y (1.25) en el segundo miembro de (1.23), obtenemos en definitiva que

$$\left| S(x) - \sum_{k=1}^{\infty} b_k \right| < \varepsilon$$

para los puntos x del conjunto $\{x\}$ que satisfacen la condición $0 < < |x - a| < \delta$. Con esto queda demostrado que la función $S(x)$ tiene valor límite en el punto $x = a$ y que es válida la igualdad (1.21). El teorema está demostrado.

Enunciemos el teorema 1.6 en términos de las sucesiones funcionales.

Si una sucesión funcional $\{f_n(x)\}$ converge uniformemente sobre el conjunto $\{x\}$ hacia una función límite $f(x)$, y si todos los elementos de la sucesión mencionada tienen valor límite en el punto a, la función límite $f(x)$ también tiene en el punto a el valor límite, con la particularidad de que

$$\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} \left[\lim_{n\to\infty} f_n(x) \right] = \lim_{n\to\infty} \left[\lim_{x\to a} f(x) \right],$$

es decir, el símbolo $\lim\limits_{n\to\infty}$ del límite de la sucesión y el símbolo $\lim\limits_{x\to a}$ del valor límite de la función pueden ser permutados (o, como suele decirse, al límite para $x \to a$ se puede pasar término a término).

OBSERVACIÓN AL TEOREMA 1.6. Si exigimos complementariamente, en las condiciones del teorema 1.6, que el punto a pertenezca al conjunto $\{x\}$ y que todos los términos $u_k(x)$ de la serie (1.15) sean continuos en el punto a (o, respectivamente, continuos en este punto por la derecha y por la izquierda), la suma $S(x)$ de la serie (1.15) será también continua en el punto a (o, respectivamente, continua en el punto a por la derecha y por la izquierda).

En efecto, para el caso dado, $b_k = u_k(a)$, y la igualdad (1.21) adquiere la forma

$$\lim_{x \to a} S(x) = \sum_{k=1}^{\infty} u_k(a) = S(a),$$

lo que significa precisamente la continuidad de la función $S(x)$ en el punto a (o, en el caso de que x tienda hacia a unilateralmente, la continuidad de $S(x)$ en este punto a la derecha o a la izquierda, respectivamente).

Aplicando la Observación citada a todo punto de cierto segmento $[a, b]$, llegaremos al siguiente teorema fundamental.

Teorema 1.7. *Si todos los términos de una serie funcional (de una sucesión funcional) son continuos sobre el segmento $[a, b]$, y si la serie mencionada (sucesión mencionada) converge uniformemente sobre el segmento $[a, b]$, entonces la suma de esta serie (función límite de esta sucesión) es también continua sobre el segmento $[a, b]$.*

OBSERVACIONES AL TEOREMA 1.7. 1) En el teorema 1.7 podemos tomar, en lugar del segmento $[a, b]$, un intervalo, un semisegmento, una semirrecta, una recta infinita y, en general, cualquier conjunto denso en sí $\{x\}$. 2) En el teorema 1.7 resulta ser esencial la exigencia de convergencia *uniforme*, pues una sucesión de funciones continuas, convergente de una manera no uniforme, puede converger hacia una función discontinua (véase el ejemplo (1.3) de los pp. 1 y 2 del párrafo presente).

OBSERVACIÓN FINAL. Todos los teoremas de este párrafo son válidos para las sucesiones de funciones definidas sobre el conjunto $\{x\}$ del espacio E^m.

§ 2. Integración y diferenciación término a término de las sucesiones y series funcionales

1. Integración término a término. Tiene lugar el siguiente teorema *fundamental.*

Teorema 1.8. *Si una sucesión fundamental $\{f_n(x)\}$ converge hacia la función límite $f(x)$ uniformemente sobre el segmento $[a, b]$, y si cada función $f_n(x)$ es integrable en el mismo segmento, la función límite $f(x)$ será también integrable sobre el segmento $[a, b]$, con la particularidad de que la sucesión mencionada puede integrarse sobre el segmento $[a, b]$ término a término, es decir, el límite*

$$\lim_{n \to \infty} \int_a^b f_n(x)\, dx$$

existe y es igual a $\int_a^b f(x)\, dx.$

DEMOSTRACIÓN. Fijamos arbitrariamente $\varepsilon > 0$. Ya que la sucesión $\{f_n(x)\}$ es uniformemente convergente hacia $f(x)$, se encontrará, para $\varepsilon > 0$ fijo, un número $N(\varepsilon)$ tal que, cualesquiera que sean $n \geqslant N(\varepsilon)$ y x del segmento $[a, b]$, se verifique la desigualdad

$$|f_n(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{2(b-a)}. \tag{1.26}$$

Si demostramos que la función límite $f(x)$ es integrable sobre el segmento $[a, b]$, entonces, recurriendo a las estimaciones conocidas de las integrales [1]) y a la desigualdad (1.26), obtendremos

$$\left|\int_a^b f_n(x)\,dx - \int_a^b f(x)\,dx\right| = \left|\int_a^b [f_n(x) - f(x)]\,dx\right| \leqslant$$

$$\leqslant \int_a^b |f_n(x) - f(x)|\,dx \leqslant \frac{\varepsilon}{2(b-a)} \int_a^b dx = \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$$

(para todo $n \geqslant N(\varepsilon)$).

Con ello será demostrado que el límite $\lim\limits_{n\to\infty} \int_a^b f_n(x)\,dx$ existe y equivale a $\int_a^b f(x)\,dx$; nos queda sólo probar la integrabilidad de la función $f(x)$ sobre el segmento $[a, b]$.

Al dividir el segmento $[a, b]$, mediante puntos *arbitrarios* $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_m = b$, en m segmentos parciales $[x_{k-1}, x_k]$ $(k = 1, 2, \ldots, m)$, convengamos en denotar por el símbolo $\omega_k(f)$ $(\omega_k(f_n)$, respectivamente) la oscilación de la función $f(x)$ $(f_n(x)$, respectivamente) [2]) en el k-ésimo segmento parcial $[x_{k-1}, x_k]$.

Cerciorémonos de que para cualquier $\varepsilon > 0$ y cualquier $k = 1, 2, \ldots, m$ existe un número suficientemente grande n, para

[1]) Se tienen en cuenta las siguientes estimaciones de las integrales establecidas en el § 6, cap. 1, v. II: 1) si una función $F(x)$ es integrable sobre el segmento $[a, b]$, será también integrable en $[a, b]$ la función $|F(x)|$, con la particularidad de que $\left|\int_a^b F(x)\,dx\right| \leqslant \int_a^b |F(x)|\,dx$; 2) si $f(x)$ y $g(x)$ son ambas integrables sobre $[a, b]$, y si en cada punto de este segmento $f(x) \leqslant g(x)$, entonces $\int_a^b f(x)\,dx \leqslant \int_a^b g(x)\,dx$.

[2]) Recordemos que se denomina *oscilación* de la función sobre un segmento dado la diferencia entre las cotas superior exacta e inferior exacta de dicha función en el segmento dado.

el cual se verifique una desigualdad

$$\omega_k(f) \leq \omega_k(f_n) + \frac{\varepsilon}{b-a}. \qquad (1.27)$$

Efectivamente, cualesquiera que sean x' y x'' del segmento $[x_{k-1}, x_k]$, se verifica la desigualdad

$$|f(x') - f(x'')| \leq |f(x') - f_n(x')| + \\ + |f_n(x') - f_n(x'')| + |f_n(x'') - f(x'')|. \quad (1.28)$$

Debido a la convergencia uniforme de $\{f_n(x)\}$ hacia $f(x)$ se encontrará, para todo $\varepsilon > 0$, un número n tal que con cualquier x de $[a, b]$ será válida la desigualdad (1.26). De este modo, para dicho número n tenemos

$$|f(x') - f_n(x')| + |f_n(x'') - f(x'')| < \frac{\varepsilon}{b-a}$$

y, por tanto, en virtud de (1.28),

$$|f(x') - f(x'')| \leq |f_n(x) - f_n(x'')| + \frac{\varepsilon}{b-a}.$$

De la última desigualdad y de la arbitrariedad de los puntos x' y x'' se deduce inmediatamente que para el número elegido n la desigualdad (1.27) es válida.

Para la partición, asumida por nosotros, del segmento $[a, b]$, designemos mediante los símbolos S y s las sumas superior e inferior de la función $f(x)$, y mediante los símbolos S_n y s_n, las sumas superior e inferior de la función $f_n(x)$.

Multiplicando la desigualdad (1.27) por la longitud del k-ésimo segmento parcial Δx_k, y sumándola después según todos los $k = 1, 2, \ldots, m$, obtenemos una desigualdad

$$S - s \leq S_n - s_n + \varepsilon. \qquad (1.29)$$

Hemos establecido (1.29) para la partición arbitraria del segmento $[a, b]$. Como la función $f_n(x)$ es integrable sobre el segmento $[a, b]$, existe otra partición de dicho segmento, para la cual $S_n - s_n < \varepsilon$ [1], y, por consiguiente, en virtud de (1.29), $S - s < 2\varepsilon$.

Puesto que ε es un número positivo arbitrario, la última desigualdad demuestra integrabilidad de $f(x)$ sobre el segmento $[a, b]$ [2].

El teorema está demostrado.

---

[1] En virtud del teorema 1.1 del cap. 1, v. II.

[2] En virtud del teorema 1.1, v. II, la existencia, para $\varepsilon > 0$ arbitrario de una partición del segmento, para la cual $S - s < 2\varepsilon$, es condición necesaria y suficiente de integrabilidad de toda función *acotada* en el segmento dado. El carácter acotado de $f(x)$ sobre el segmento $[a, b]$ se deduce en seguida de la desigualdad (1.26) y de lo que la función $f_n(x)$, integrable en el segmento $[a, b]$, está acotada.

Enunciemos el teorema 1.8 en términos de las series funcionales: *Si la serie funcional (1.15) converge hacia su suma $S(x)$ uniformemente sobre el segmento $[a, b]$, y si cada término de esta serie $u_k(x)$ representa una función integrable en el segmento $[a, b]$, la suma $S(x)$ también será integrable sobre el segmento citado, con la particularidad de que la serie en consideración puede integrarse sobre el segmento $[a, b]$ término a término, es decir, la serie*

$$\sum_{k=1}^{\infty} \int_a^b u_k(x)\,dx$$

es convergente y tiene como su suma la integral $\int_a^b S(x)\,dx$.

OBSERVACIÓN. En los libros de texto del análisis matemático el teorema 1.8 se demuestra, como regla, bajo un supuesto más rígido de que cada función $f_n(x)$ no es sólo integrable, sino también continua sobre el segmento $[a, b]$. Admitida esta suposición adicional, se simplifica la demostración aducida más arriba, pues para demostrar la integrabilidad de la función límite $f(x)$ sobre el segmento $[a, b]$ basta referirse al teorema 1.7.

2. Diferenciación término a término. Demostremos el siguiente teorema *fundamental*.

Teorema 1.9. *Supongamos que cada función $f_n(x)$ tiene sobre el segmento $[a, b]$ una derivada $f'_n(x)$* [1]*, y, además, la sucesión de derivadas $\{f'_n(x)\}$ converge en dicho segmento uniformemente, mientras que la propia sucesión $\{f_n(x)\}$ converge por lo menos en un punto x_0 del segmento $[a, b]$. Entonces, la sucesión $\{f_n(x)\}$ converge hacia cierta función límite $f(x)$ uniformemente en todo el segmento $[a, b]$, con la particularidad de que esta sucesión puede diferenciarse en dicho segmento término a término, es decir, en cada punto del segmento $[a, b]$ la función límite $f(x)$ tiene derivada $f'(x)$ que sirve de función límite para la sucesión $\{f'_n(x)\}$.*

DEMOSTRACIÓN. Probemos al principio que *la sucesión $\{f_n(x)\}$ converge uniformemente sobre el segmento $[a, b]$*. De lo que la sucesión numérica $\{f_n(x_0)\}$ es convergente y $\{f'_n(x)\}$, convergente uniformemente en $[a, b]$ concluimos que para un $\varepsilon > 0$ arbitrario existe un número $N(\varepsilon)$ de tal género que se verifiquen las desigualdades

$$|f_{n+p}(x_0) - f_n(x_0)| < \frac{\varepsilon}{2}, \quad |f'_{n+p}(x) - f'_n(x)| < \frac{\varepsilon}{2(b-a)}, \qquad (1.30)$$

cualesquiera que sean $n \geqslant N(\varepsilon)$ de todos p naturales y (esto se refiere a la segunda desigualdad de (1.30)) todos x de $[a, b]$.

[1] Por el término «la función $f(x)$ tiene derivada sobre el segmento $[a, b]$» se sobreentiende aquí y en adelante que existen: la derivada $f'(x)$ en cualquier punto interior de $[a, b]$, la derivada a la derecha $f'(a+0)$ en el punto a, y derivada a la izquierda $f'(b-0)$ en el punto b.

Sea x un punto *arbitrario* del segmento $[a, b]$. Para la función $[f_{n+p}(t) - f_n(t)]$ se cumplen, con cualesquiera n y p fijos, todas las condiciones de Lagrange sobre el segmento $[x_0, x]$ (véase el teorema 8.12 del v. I). De conformidad con este teorema, existe entre x y x_0 un punto ξ tal que

$$[f_{n+p}(x) - f_n(x)] - [f_{n+p}(x_0) - f_n(x_0)] = [f'_{n+p}(\xi) - f'_n(\xi)](x - x_0).$$

Teniendo presente que $|x - x_0| \leqslant b - a$, de la última igualdad y de las desigualdades (1.30) obtenemos:

$$|f_{n+p}(x) - f_n(x)| < \varepsilon$$

(para todo x de $[a, b]$, cualquier $n \geqslant N(\varepsilon)$ y todo número natural p).

Esto es precisamente un indicio de que sobre el segmento $[a, b]$ la sucesión $\{f_n(x)\}$ converge uniformemente hacia cierta función límite $f(x)$ [1]).

Resta por demostrar que en *cualquier punto x_0 del segmento $[a, b]$ la función límite $f(x)$ tiene derivada y que esta derivada constituye la función límite de la sucesión $\{f'_n(x)\}$.*

Fijamos sobre el segmento $[a, b]$ un punto *arbitrario* x_0, y a base del mismo, un número positivo δ tal que el δ-entorno del punto x_0 esté contenido íntegramente dentro de $[a, b]$ (en el caso de que x_0 sea un punto de frontera del segmento $[a, b]$, por δ-entorno del punto x_0 se sobreentenderá el semientorno derecho $[a, a + \delta]$ del punto a, respectivamente, el semientorno izquierdo $(b - \delta, b]$ del punto b).

Designemos con $\{\Delta x\}$ el conjunto de todos los números Δx que satisfacen la condición $0 < |\Delta x| < \delta$ para $a < x_0 < b$, la condición $0 < \Delta x < \delta$ para $x_0 = a$, y la condición $-\delta < \Delta x < 0$, para $x_0 = b$, y demostremos que la sucesión de funciones del argumento Δx

$$\varphi_n(\Delta x) = \frac{f_n(x_0 + \Delta x) - f_n(x_0)}{\Delta x}$$

es uniformemente convergente sobre el conjunto citado $\{\Delta x\}$.

Para un $\varepsilon > 0$ arbitrario, siendo uniformemente convergente la sucesión $\{f'_n(x)\}$, se encontrará un número $N(\varepsilon)$ tal que

$$|f'_{n+p}(x) - f'_n(x)| < \varepsilon, \tag{1.31}$$

cualesquiera que sean x de $[a, b]$, $n \geqslant N(\varepsilon)$ y p naturales.

Teniéndolo en cuenta, fijemos arbitrariamente Δx del conjunto $\{\Delta x\}$ y apliquemos el teorema de Lagrange a la función $[f_{n+p}(t) - f_n(t)]$ (para cualesquiera n y p fijos) sobre el segmento $[x_0, x_0 + \Delta x]$. Según este teorema, existe dentro del intervalo $0 < \theta < 1$

[1]) En virtud del criterio de Cauchy, es decir, del teorema 1.1.

un número θ tal que se verifique la igualdad

$$\varphi_{n+p}(\Delta x)-\varphi_n(\Delta x)=\frac{[f_{n+p}(x_0+\Delta x)-f_n(x_0+\Delta x)]-[f_{n+p}(x_0)-f_n(x_0)]}{\Delta x}=$$
$$=f'_{n+p}(x_0+\theta\Delta x)-f'_n(x_0+\theta\Delta x).$$

De la última igualdad y de la desigualdad (1.31), válida para *todos* los puntos x del segmento $[a, b]$, se deduce que

$$|\varphi_{n+p}(\Delta x)-\varphi_n(\Delta x)|<\varepsilon$$

para todo Δx de $\{\Delta x\}$, cualquier $n \geqslant N(\varepsilon)$ y todo p natural. De este modo, la sucesión $\{\varphi_n(\Delta x)\}$ converge uniformemente sobre el conjunto $\{\Delta x\}$ (en virtud del criterio de Cauchy). Mas, esto nos permite aplicar a la sucesión mencionada en el punto $\Delta x = 0$ el teorema 1.6 sobre el paso límite término a término. De acuerdo con dicho teorema [1]), una función

$$\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x},$$

que es función límite de la sucesión $\{\varphi_n(\Delta x)\}$, tiene, cuando $\Delta x \to 0$, un valor límite, con la particularidad de que

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\left[\lim_{n\to\infty}\varphi_n(\Delta x)\right]=\lim_{n\to\infty}\left[\lim_{\Delta x\to 0}\varphi_n(\Delta x)\right]=$$
$$=\lim_{n\to\infty}\left[\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f_n(x_0+\Delta x)-f_n(x_0)}{\Delta x}\right]=\lim_{n\to\infty}f'_n(x_0).$$

Esto prueba precisamente que la derivada de la función $f(x)$ en el punto x_0 existe y es igual a $\lim\limits_{n\to\infty} f'_n(x_0)$. El teorema está demostrado.

Demos a conocer la formulación del teorema 1.9 en términos de las series funcionales.

Si cada función $u_k(x)$ tiene derivada sobre el segmento $[a, b]$, y si la serie de las derivadas $\sum\limits_{k=1}^{\infty} u'_k(x)$ es uniformemente convergente sobre el segmento $[a, b]$, mientras que la propia serie $\sum\limits_{k=1}^{\infty} u_k(x)$ converge por lo menos en un solo punto del segmento $[a, b]$, entonces la serie $\sum\limits_{k=1}^{\infty} u_k(x)$ converge uniformemente sobre todo el segmento $[a, b]$ hacia cierta suma $S(x)$, con la particularidad de que dicha serie puede diferenciarse en el segmento $[a, b]$ término a término, es decir, su suma $S(x)$ tiene en el segmento $[a, b]$ una derivada que representa la suma de la serie de derivadas $\sum\limits_{k=1}^{\infty} u'_k(x)$.

[1]) Se emplea la formulación del teorema 1.6 en términos de las sucesiones funcionales.

OBSERVACIÓN 1. Subrayemos que en el teorema 1.9 sólo se supone que cada función $f_n(x)$ tiene derivada sobre el segmento $[a, b]$. No se requiere que esta derivada sea acotada, ni, menos aún, integrable o continua. En los cursos del análisis matemático el teorema 1.9 se demuestra, de ordinario, bajo el supuesto adicional de continuidad de cada derivada $f'_n(x)$ sobre el segmento $[a, b]$.

OBSERVACIÓN 2. Si en el teorema 1.9 exigimos complementariamente la continuidad sobre el segmento $[a, b]$ de cada derivada $f'_n(x)$, entonces, en virtud del teorema 1.7, la derivada de la función límite $f(x)$ será también continua sobre dicho segmento.

OBSERVACIÓN 3. Si se examina el caso de las funciones de m variables, el teorema 1.9 se enuncia del modo siguiente: si cada función $f_n(x) = f_n(x_1, \ldots, x_m)$ tiene sobre un conjunto acotado de puntos $\{x\}$ del espacio E^m una derivada parcial $\frac{\partial f_n}{\partial x_k}$, y si la sucesión $\left\{\frac{\partial f_n}{\partial x_k}\right\}$ es uniformemente convergente sobre $\{x\}$, mientras que la propia sucesión $\{f_n(x)\}$ converge en cada punto del conjunto $\{x\}$, entonces la sucesión $\{f_n(x)\}$ puede diferenciarse en el conjunto $\{x\}$ respecto a la variable x_k *término a término*.

Del teorema 1.9 se deduce la siguiente afirmación.

Teorema 1.10. *Si cada función $f_n(x)$ tiene primitiva sobre el segmento $[a, b]$, y si la sucesión $\{f_n(x)\}$ converge uniformemente sobre el segmento $[a, b]$ hacia la función límite $f(x)$, esta última también tendrá en $[a, b]$ su función primitiva. Más aún, si x_0 es un punto cualquiera de $[a, b]$, la sucesión de primitivas $\Phi_n(x)$ de las funciones $f_n(x)$, que satisfacen la condición $\Phi_n(x_0) = 0$, converge uniformemente sobre $[a, b]$ hacia la primitiva $\Phi(x)$ de la función límite $f(x)$ que satisface la condición $\Phi(x_0) = 0$.*

DEMOSTRACIÓN. Basta notar que para la sucesión de primitivas $\Phi_n(x)$, que satisfacen la condición $\Phi_n(x_0) = 0$, se cumplen todas las condiciones del teorema 1.9. Esto asegura la convergencia uniforme en $[a, b]$ de la sucesión $\{\Phi_n(x)\}$ hacia la función límite $\Phi(x)$, la cual tiene en cada punto de $[a, b]$ la derivada igual en valor a la función límite $f(x)$ de la sucesión $\{f_n(x)\}$.

OBSERVACIÓN 4. Subrayemos que en el teorema 1.10 no se requiere que la función $f_n(x)$ sea acotada, ni menos aún, integrable sobre el segmento $[a, b]$.

El material de los últimos 3 puntos permite obtener la siguiente deducción importante: *la convergencia uniforme deja sin cambios la clase de funciones que tienen valor límite* (teorema 1.6), *la clase de funciones continuas* (teorema 1.7), *la clase de funciones integrables* (teorema 1.8), *la clase de funciones que tienen primitiva* (teorema 1.10) *y (en el caso cuando las derivadas son uniformemente convergentes) la clase de funciones diferenciables* (teorema 1.9).

Para concluir, aduzcamos el ejemplo de función $f(x)$ (basado en el teorema 1.9) cuya derivada $f'(x)$ existe en cada punto del segmento $[0, 1]$, pero es discontinua en cada punto racional del segmento citado.

Sea

$$\varphi(x)=\begin{cases} x^2\cos\frac{1}{x} & \text{para } x\neq 0,\\ 0 & \text{para } x=0,\end{cases}$$

de modo que la función

$$\varphi'(x)=\begin{cases} \operatorname{sen}\frac{1}{x}+2x\cdot\cos\frac{1}{x} & \text{para } x\neq 0,\\ 0 & \text{para } x=0\end{cases}$$

resulta ser discontinua para $x=0$, y continua en todos los puntos restantes. Numeremos todos los puntos racionales del segmento $[0, 1]$ en la sucesión x_1, $x_2, \ldots, x_k$ (la posibilidad de hacerlo está demostrada en el p. 2, § 4, cap. 3, v. I) y pongamos $u_k(x)=\frac{1}{k^2}\cdot\varphi(x-x_k)$. Entonces cada derivada $u_k'(x)=$ $=\frac{1}{k^2}\varphi'(x-x_k)$ es discontinua en un solo punto x_k, y continua en todos los demás puntos. Por cuanto para todos los x del segmento $[0, 1]$

$$|u_k(x)|\leqslant\frac{|x-x_k|^2}{k^2}\leqslant\frac{1}{k^2},\quad |u_k'(x)|\leqslant\frac{1+2|x-x_k|}{k^2}\leqslant\frac{3}{k^2},$$

ambas series $\sum\limits_{k=1}^{\infty}u_k(x)$ y $\sum\limits_{k=1}^{\infty}u_k'(x)$ pueden mayorarse mediante la serie numérica $3\cdot\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2}$, y, por esta razón, son convergentes uniformemente sobre el segmento $[0, 1]$. De acuerdo con el teorema 1.9, la suma $f(x)$ de la serie $\sum\limits_{k=1}^{\infty}u_k(x)$ tiene sobre el segmento $[0, 1]$ una derivada $f'(x)$, que es igual a la suma de la serie $\sum\limits_{k=1}^{\infty}u_k'(x)$, y que tiene discontinuidad en cada punto x_k $(k=1, 2, \ldots)$.

3. Convergencia en media. Supongamos que toda función $f_n(x)$ $(n=1, 2, \ldots)$, y también la función $f(x)$, son integrables sobre el segmento $[a, b]$. Entonces (según se sabe del cap. 1, v. II), la función

$$[f_n(x)-f(x)]^2=f_n^2(x)+f^2(x)-2f_n(x)\cdot f(x)$$

será también integrable sobre el segmento $[a, b]$.

Introduzcamos el concepto fundamental de convergencia en media.

Definición 1. *Se dice que una sucesión $\{f_n(x)\}$ converge en media hacia la función $f(x)$ sobre el segmento $[a, b]$, si*

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^b[f_n(x)-f(x)]^2\,dx=0.$$

Definición 2. *Se dice que una serie funcional converge en media hacia la función $S(x)$ sobre el segmento $[a, b]$, si la sucesión de sumas parciales de esta serie converge en media hacia $S(x)$ en el mismo segmento.*

OBSERVACIÓN. De estas definiciones se deduce que si una sucesión (o una serie) converge en media hacia $f(x)$ en todo el segmento $[a, b]$, dicha sucesión (o la serie) converge en media hacia $f(x)$ en cualquier segmento $[c, d]$ contenido dentro de $[a, b]$.

Aclaremos la cuestión acerca de la relación existente entre la convergencia en media y convergencia uniforme de una sucesión.

Demostremos primero que *si una sucesión $\{f_n(x)\}$ converge hacia la función $f(x)$ de manera uniforme en el segmento $[a, b]$, entonces $\{f_n(x)\}$ también convergerá en media sobre el segmento $[a, b]$.*

Fijemos arbitrariamente $\varepsilon > 0$. Para un número positivo $\sqrt{\frac{\varepsilon}{2(b-a)}}$ existe, debido a la convergencia uniforme, un número N tal que

$$|f_n(x) - f(x)| < \sqrt{\frac{\varepsilon}{2(b-a)}} \tag{1.32}$$

para cualquier x de $[a, b]$ y todo $n \geqslant N$.

En virtud de (1.32), para todo $n \geqslant N$ tenemos

$$\int_a^b [f_n(x) - f(x)]^2\, dx \leqslant \frac{\varepsilon}{2(b-a)} \cdot \int_a^b dx = \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon,$$

es decir, sobre el segmento $[a, b]$ la sucesión $\{f_n(x)\}$ converge en media hacia $f(x)$.

Cerciorémonos, ahora, de que *la convergencia en media de una sucesión sobre cierto segmento no trae consigo convergencia uniforme sobre el mismo segmento, ni mucho menos la convergencia al menos en un solo punto del segmento mencionado.*

Veamos una sucesión de segmentos $I_1, I_2, \ldots$ que pertenecen a $[0, 1]$ y que se expresan en la siguiente forma:

$$I_1 = [0, 1],$$
$$I_2 = \left[0, \frac{1}{2}\right],\ I_3 = \left[\frac{1}{2}, 1\right],$$
$$I_4 = \left[0, \frac{1}{4}\right],\ I_5 = \left[\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right],\ I_6 = \left[\frac{1}{2}, \frac{3}{4}\right],\ I_7 = \left[\frac{3}{4}, 1\right],$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$I_{2^n} = \left[0, \frac{1}{2^n}\right],\ I_{2^n+1} = \left[\frac{1}{2^n}, \frac{2}{2^n}\right],\ \ldots,\ I_{2^{n+1}-1} = \left[1 - \frac{1}{2^n}, 1\right],$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

Definamos el n-ésimo término de la sucesión del modo siguiente:

$$f_n(x) = \begin{cases} 1 \text{ sobre el segmento } I_n, \\ 0 \text{ en los puntos restantes de } [0, 1]. \end{cases}$$

La sucesión construida *converge en media hacia la función* $f(x) \equiv 0$ *sobre el segmento* [0, 1].

En efecto,

$$\int_0^1 [f_n(x) - 0]^2 \, dx = \int_{I_n} f_n^2(x) \, dx = \int_{I_n} dx =$$

$$= \text{longitud del segmento } I_n \to 0 \text{ (cuando } n \to \infty).$$

Además, la sucesión construida *no converge en ningún punto del segmento* [0, 1].

Efectivamente cualquiera que sea el punto fijo x_0 del segmento [0, 1], entre todos los números n, *tan grandes como se quiera*, existen tanto aquellos, para los cuales el segmento I_n contiene el punto x_0 (para estos números $f_n(x_0) = 1$), como también aquellos, para los cuales el segmento I_n no contiene el punto x_0 (para estos últimos números $f_n(x_0) = 0$). De este modo, la sucesión $\{f_n(x_0)\}$ contiene un número infinito de términos, tanto iguales a la unidad, como nulos, es decir, dicha sucesión diverge.

Resulta que la convergencia en media de la sucesión $\{f_n(x)\}$ hacia la función límite $f(x)$ sobre el segmento $[a, b]$ asegura la posibilidad de integrar término a término dicha sucesión en el segmento citado.

Teorema 1.11. *Si una sucesión* $\{f_n(x)\}$ *converge en media sobre el segmento* $[a, b]$ *hacia una función* $f(x)$, *dicha sucesión puede integrarse término a término sobre* $[a, b]$, *es decir, el límite*

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(x) \, dx$$

existe y es igual a la integral $\int_a^b f(x) \, dx$.

Demostremos, ante todo, el siguiente lema.

Lema 1. *Para cualesquiera funciones* $f(x)$ *y* $g(x)$, *integrables sobre el segmento* $[a, b]$, *se verifica la siguiente desigualdad*

$$\left| \int_a^b f(x) g(x) \, dx \right| \leqslant \sqrt{\int_a^b f^2(x) \, dx \int_a^b g^2(x) \, dx}, \qquad (1.33)$$

llamada desigualdad de Cauchy—Buniakovski.

DEMOSTRACIÓN DEL LEMA 1. Veamos el siguiente trinomio cuadrado respecto de λ:

$$\int_a^b [f(x)-\lambda g(x)]^2\,dx=$$

$$=\int_a^b f^2(x)\,dx-2\lambda\int_a^b f(x)\,g(x)\,dx+\lambda^2\int_a^b g^2(x)\,dx\geqslant 0.$$

Como que este trinomio es *no negativo*, *no tiene*, pues, *raíces reales diferentes*. Pero, en tal caso su discriminante no es positivo, es decir,

$$\left(\int_a^b f(x)\,g(x)\,dx\right)^2-\int_a^b f^2(x)\,dx\int_a^b g^2(x)\,dx\leqslant 0.$$

El lema está demostrado.

DEMOSTRACIÓN DEL TEOREMA 1.11. Haciendo uso de la desigualdad (1.33) para $g(x)\equiv 1$, tendremos

$$\left|\int_a^b f_n(x)\,dx-\int_a^b f(x)\,dx\right|=\left|\int_a^b [f_n(x)-f(x)]\,dx\right|\leqslant$$

$$\leqslant\sqrt{\int_a^b [f_n(x)-f(x)]^2\,dx\int_a^b dx}=$$

$$=\sqrt{(b-a)\int_a^b [f_n(x)-f(x)]^2\,dx}\to 0$$

(cuando $n\to\infty$). El teorema queda demostrado.

§ 3. Equicontinuidad de una sucesión de funciones. Teorema de Arzelà

Supongamos que cada una de las funciones $f_n(x)$ está definida en cierto segmento $[a, b]$.

Definición. *Una sucesión de funciones $\{f_n(x)\}$ se llama equicontinua sobre el segmento $[a, b]$, si para cualquier $\varepsilon>0$ existe un $\delta>0$ tal que la desigualdad*

$$|f_n(x')-f_n(x'')|<\varepsilon$$

es válida con todo n y todos los puntos x', x'' del segmento $[a, b]$ ligados entre sí mediante una desigualdad

$$|x'-x''|<\delta.$$

OBSERVACIÓN 1. Directamente de esta definición se deduce que si la sucesión $\{f_n(x)\}$ es equicontinua sobre $[a, b]$, cualquiera de sus subsucesiones será también equicontinua sobre el mismo segmento.

Demostremos la siguiente afirmación notable.

Teorema 1.12* (*teorema de Arzelà*). *Si una sucesión de funciones $\{f_n(x)\}$ es equicontinua y uniformemente acotada sobre el segmento $[a, b]$, en la sucesión mencionada puede elegirse una subsucesión que sea uniformemente convergente en el segmento $[a, b]$.

DEMOSTRACIÓN. Examinemos en el segmento $[a, b]$ la siguiente sucesión de puntos $\{x_n\}$: a título de x_1 tomemos aquel punto que divide el segmento $[a, b]$ en dos partes iguales; a título de x_2 y x_3,

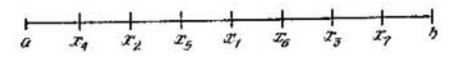


Fig. 1.3.

aquellos dos puntos que, junto con x_1, dividen el segmento $[a, b]$ en cuatro partes iguales (fig. 1.3); a título de x_4, x_5, x_6 y x_7 tomamos cuatro puntos los cuales dividen el segmento $[a, b]$, junto con x_1, x_2 y x_3 en ocho partes iguales (fig. 1.3), etc.

La sucesión construida $\{x_n\}$ posee la siguiente *propiedad*: cualquiera que sea un $\delta > 0$ elegido, existe para él un número n_0 de tal índole que en todo segmento de longitud δ, perteneciente a $[a, b]$, se ubique al menos uno de los elementos $x_1, x_2, \ldots, x_{n_0}$ [1].

Procedamos ahora con la elección de una subsucesión uniformemente convergente sobre el segmento $[a, b]$ a partir de la sucesión $\{f_n(x)\}$.

Analicemos al principio la sucesión $\{f_n(x)\}$ en el punto x_1. Obtendremos una sucesión numérica *acotada* $\{f_n(x_1)\}$, de la cual puede ser separada, en virtud del teorema de Bolzano—Weierstrass (véase v. I, cap. 3, § 4) una subsucesión convergente que se denotará del modo siguiente:

$$f_{11}(x_1),\ f_{12}(x_1),\ \ldots,\ f_{1n}(x_1),\ \ldots$$

Examinemos luego una sucesión funcional

$$f_{11}(x),\ f_{12}(x),\ \ldots,\ f_{1n}(x),\ \ldots$$

en el punto x_2. De acuerdo con el teorema de Bolzano—Weierstrass, podemos elegir en ella una subsucesión convergente que se denotará del modo siguiente:

$$f_{21}(x_2),\ f_{22}(x_2),\ \ldots,\ f_{2n}(x_2),\ \ldots$$

[1] Sobre una sucesión que posee tal propiedad suele decirse que es *densa en todo punto* del segmento $[a, b]$.

De este modo, la sucesión funcional

$$f_{21}(x),\ f_{22}(x),\ \ldots,\ f_{2n}(x),\ \ldots \tag{1.34}$$

resulta ser convergente tanto en el punto x_1, como en el x_2.

Ahora examinamos la sucesión funcional (1.34) en el punto x_3 y elegimos en ella una subsucesión convergente

$$f_{31}(x_3),\ f_{32}(x_3),\ \ldots,\ f_{3n}(x_3),\ \ldots$$

Al continuar los razonamientos análogos, obtendremos una infinidad de subsucesiones

$$\begin{array}{l} f_{11}(x),\ f_{12}(x),\ f_{13}(x),\ \ldots,\ f_{1n}(x),\ \ldots \\ f_{21}(x),\ f_{22}(x),\ f_{23}(x),\ \ldots,\ f_{2n}(x),\ \ldots \\ f_{31}(x),\ f_{32}(x),\ f_{33}(x),\ \ldots,\ f_{3n}(x),\ \ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ f_{n1}(x),\ f_{n2}(x),\ f_{n3}(x),\ \ldots,\ f_{nn}(x),\ \ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}$$

con la particularidad de que la subsucesión que figura en la n-ésima fila es convergente en cada uno de los puntos $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

Veamos ahora la así llamada sucesión «diagonal»

$$f_{11}(x),\ f_{22}(x),\ \ldots,\ f_{nn}(x),\ \ldots$$

Demostremos que *esta sucesión es uniformemente convergente en el segmento* $[a, b]$.

Con el fin de reducir la notación, esta sucesión diagonal se denotará en adelante (al igual que también la sucesión de partida) con el símbolo

$$f_1(x),\ f_2(x),\ \ldots,\ f_n(x),\ \ldots$$

(es decir, escribiremos un solo índice en vez del índice doble). Fijemos arbitrariamente un $\varepsilon > 0$.

Por cuanto la sucesión diagonal es equicontinua sobre el segmento $[a, b]$, existe, para $\varepsilon > 0$ fijo, un $\delta > 0$ tal que, cualesquiera que sean dos puntos x y x_m del segmento $[a, b]$ relacionados entre sí por la desigualdad $|x - x_m| < \delta$, se verifica para todo número n la desigualdad

$$|f_n(x) - f_n(x_m)| < \frac{\varepsilon}{3}. \tag{1.35}$$

Teniéndolo presente, dividamos el segmento $[a, b]$ en un número *finito* de segmentos de longitud inferior a δ. Elijamos en la sucesión $\{x_n\}$ un número finito n_0 de primeros términos $x_1, x_2, \ldots, x_{n_0}$ tan grande que *en cada uno de los segmentos mencionados esté contenido por lo menos uno de los puntos* $x_1, x_2, \ldots, x_{n_0}$.

Es obvio que la sucesión diagonal es convergente en cada uno de los puntos $x_1, x_2, \ldots, x_{n_0}$. Por eso, para $\varepsilon > 0$, fijado más arriba,

existe tal número N que

$$|f_{n+p}(x_m) - f_n(x_m)| < \frac{\varepsilon}{3}, \tag{1.36}$$

cualesquiera que sean $n \geqslant N$, p naturales y $m = 1, 2, \ldots, n_0$.

Sea, ahora, x un punto *arbitrario* del segmento $[a, b]$. Este punto se dispone forzosamente en uno de los segmentos mencionados más arriba cuya longitud es inferior a δ, razón por la cual existe para dicho punto al menos un solo punto x_m (m es uno de los números iguales a $1, 2, \ldots, n_0$) que satisfaga la condición $|x - x_m| < \delta$.

Debido a que el módulo de una suma de tres magnitudes no sobrepasa la suma de módulos, podemos escribir

$$|f_{n+p}(x) - f_n(x)| \leqslant |f_{n+p}(x) - f_{n+p}(x_m)| + \\ + |f_{n+p}(x_m) - f_n(x_m)| + |f_n(x_m) - f_n(x)|. \tag{1.37}$$

Estimemos el segundo término en el miembro derecho de (1.37) con ayuda de la desigualdad (1.36), y para estimar los términos primero y tercero en el segundo miembro de (1.37) tendremos en cuenta que $|x - x_m| < \delta$, y emplearemos la desigualdad (1.35) que se verifica para cualquier número n (y, por tanto, para cualquier $n + p$).

Obtendremos en definitiva que para un $\varepsilon > 0$ arbitrario existe tal número N que

$$|f_{n+p}(x) - f_n(x)| < \varepsilon$$

para todo $n \geqslant N$, todos los p naturales y cualquier punto x de $[a, b]$. La convergencia uniforme de la sucesión diagonal queda demostrada. El teorema 1.12 está también demostrado.

OBSERVACIÓN 2. Al tratar el teorema de Arzelà, en lugar de exigir que la sucesión $\{f_n(x)\}$ sea uniformemente acotada sobre el segmento $[a, b]$ es suficiente exigir que esta sucesión sea acotada *al menos en un solo punto* del segmento en consideración. Efectivamente, resulta legítima la siguiente afirmación: *si la sucesión* $\{f_n(x)\}$ *es equicontinua sobre el segmento* $[a, b]$ *y está acotada por lo menos en un solo punto* x_0 *de dicho segmento, la sucesión citada es uniformemente acotada en el segmento* $[a, b]$. Con miras de probar esta afirmación indiquemos que, según la definición de equicontinuidad, existe, para $\varepsilon = 1$, un $\delta > 0$ tal que *la oscilación* de cualquier función $f_n(x)$ en cada segmento, cuya longitud no es superior a δ, no sobrepasa el número $\varepsilon = 1$. Por cuanto todo el segmento $[a, b]$ puede ser cubierto con un número finito n_0 de segmentos, cuya longitud no sea superior a δ, la oscilación de cualquier función $f_n(x)$ en todo el segmento $[a, b]$ no sobrepasa el número n_0. Mas, en este caso, de la desigualdad $|f_n(x_0)| \leqslant A$, que expresa carácter acotado de la sucesión $\{f_n(x)\}$ en el punto x_0, se desprende la desigualdad $|f_n(x)| \leqslant A + n_0$, que es válida para todo punto x del segmento $[a, b]$ y que es indicio

del carácter uniformemente acotado de la sucesión citada sobre este segmento.

OBSERVACIÓN 3. Demos a conocer *el criterio de equicontinuidad: si la sucesión* $\{f_n(x)\}$ *se compone de las funciones diferenciables sobre el segmento* $[a, b]$, *y si la sucesión de derivadas* $\{f'_n(x)\}$ *está uniformemente acotada sobre dicho segmento, entonces la sucesión* $\{f_n(x)\}$ *es equicontinua en el segmento* $[a, b]$.

Para demostrar, tomemos sobre el segmento $[a, b]$ dos puntos arbitrarios, x' y x'', y escribamos para la función $f_n(x)$ en el segmento $[x', x'']$ la fórmula de Lagrange (véase v. I, cap. 8, § 9).

De conformidad con el teorema de Lagrange, existe sobre el segmento $[x', x'']$ un punto ξ_n tal que

$$|f_n(x') - f_n(x'')| = |f'_n(\xi_n)| \cdot |x' - x''|. \tag{1.38}$$

Por cuanto la sucesión de derivadas $\{f'_n(x)\}$ es uniformemente acotada sobre el segmento $[a, b]$, existe una constante A tal que para todos los números n se verifique la desigualdad

$$|f'_n(\xi_n)| \leqslant A. \tag{1.39}$$

Introduciendo (1.39) en (1.38), obtenemos

$$|f_n(x') - f_n(x'')| \leqslant A\,|x' - x''|. \tag{1.40}$$

Fijamos cualquier $\varepsilon > 0$. Entonces, si tomamos $\delta = \varepsilon/A$, y si recurrimos a (1.40), llegamos a que para todos los números n, y para cualesquiera x' y x'' de $[a, b]$, ligados entre sí mediante la condición $|x' - x''| < \delta$, se verificará la desigualdad

$$|f_n(x') - f_n(x'')| < \varepsilon.$$

La equicontinuidad de la sucesión $\{f_n(x)\}$ queda demostrada.

Examinemos, a título de ejemplo, una sucesión $\left\{\frac{\operatorname{sen} nx}{n}\right\}$. Esta sucesión es equicontinua en cualquier segmento $[a, b]$, pues en cualquier segmento $[a, b]$ la sucesión de derivadas $\{\cos nx\}$ está uniformemente acotada.

OBSERVACIÓN 4. El concepto de equicontinuidad puede formularse no sólo con relación al segmento $[a, b]$, sino también respecto de un intervalo, un semisegmento, una semirrecta, una recta infinita y, en general, respecto de todo conjunto denso en sí [1]. Además, este concepto puede introducirse no con relación a una sucesión de funciones, sino respecto de cualquier conjunto infinito de funciones.

[1] En este caso el teorema de Arzelà queda en vigor, si en su formulación sustituimos el segmento $[a, b]$ por cualquier conjunto cerrado acotado.

§ 4. Series de potencias

1. Serie de potencias y dominio de su convergencia. Se denomina *serie de potencias* a una serie funcional de la forma

$$a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} a_k x^k = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n + \ldots, \qquad (1.41)$$

donde $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ son unos números reales constantes llamados *coeficientes* de la serie (1.41). Trataremos de aclarar cómo está construido *el dominio de convergencia* de una serie de potencias.

Notemos que *toda serie de potencias converge en el punto* $x = 0$, con la particularidad de que existen series de potencias que son convergentes solamente en este punto (por ejemplo, una serie $\sum_{k=1}^{\infty} k! \cdot x^k$).

Formemos la siguiente sucesión numérica con ayuda de los coeficientes a_n de la serie (1.41):

$$\{\sqrt[n]{|a_n|}\} \quad (n = 1, 2, \ldots). \qquad (1.42)$$

Pueden examinarse dos casos: 1) la sucesión (1.42) es *no acotada;* 2) la sucesión (1.42) es *acotada.*

En el caso (2) la sucesión (1.42) *tiene límite superior finito* (véase v. I, cap. 3, § 4, p 3) que se denotará con L. Subrayemos que el citado límite superior L es a ciencia cierta no *negativo* (puesto que todos los elementos de la sucesión (1.42) son no negativos y, por tanto, cualquier punto límite de esta sucesión es no negativo).

Al resumir, llegamos a una conclusión de que pueden tener lugar los siguientes tres casos: I) la sucesión (1.42) es no acotada; II) la sucesión (1.42) es acotada y tiene límite superior finito $L > 0$; III) la sucesión (1.42) es acotada y tiene límite superior $L = 0$.

Demostremos ahora la siguiente afirmación notable.

***Teorema 1.13* (*teorema de Cauchy—Hadamard*).**

I. *Si la sucesión* (1.42) *no es acotada, la serie de potencias* (1.41) *converge sólo cuando* $x = 0$.

II. *Si la sucesión* (1.42) *es acotada y tiene límite superior* $L > 0$, *la serie* (1.41) *es absolutamente convergente para los valores de* x *que satisfacen la desigualdad* $|x| < 1/L$, *y divergente, para aquellos valores de* x *que satisfacen la desigualdad* $|x| > 1/L$.

III. *Si la sucesión* (1.42) *es acotada y su límite superior* L *es igual a cero* ($L = 0$), *la serie* (1.41) *es absolutamente convergente para todos los valores de* x.

DEMOSTRACIÓN.

I. Supongamos que la sucesión (1.42) no es acotada. Entonces, para $x \neq 0$ la sucesión

$$|x| \cdot \sqrt[n]{|a_n|} = \sqrt[n]{|a_n \cdot x^n|}$$

tampoco es acotada, es decir, dicha sucesión contiene *términos con los números n tan grandes como se quiera* y los términos mencionados satisfacen la desigualdad

$$\sqrt[n]{|a_n \cdot x^n|} > 1, \text{ o bien } |a_n \cdot x^n| > 1.$$

Mas, esto significa que para la serie (1.41) (cuando $x \neq 0$) está perturbada la condición necesaria de convergencia (véase v. II, cap. 4, § 1, p. 2), es decir, la serie (1.41) es divergente para $x \neq 0$.

II. Supongamos que la sucesión (1.42) es acotada y su límite superior L es mayor que cero ($L > 0$). Demostremos que la serie (1.41) converge absolutamente cuando $|x| < 1/L$, y diverge, cuando $|x| > 1/L$.

a) Al principio fijamos cualquier x que satisface la desigualdad $|x| < 1/L$. Existe, entonces, un $\varepsilon > 0$ tal que $|x| < 1/(L + \varepsilon)$. En virtud de las propiedades que posee el límite superior, todos los elementos $\sqrt[n]{|a_n|}$, a partir de cierto número n, satisfacen la desigualdad

$$\sqrt[n]{|a_n|} < L + \frac{\varepsilon}{2}.$$

De este modo, a partir del número indicado n, queda válida la desigualdad

$$\sqrt[n]{|a_n \cdot x^n|} = |x| \cdot \sqrt[n]{|a_n|} < \frac{L + \frac{\varepsilon}{2}}{L + \varepsilon} < 1,$$

es decir, la serie (1.41) es absolutamente convergente según el criterio de Cauchy (véase v. II, cap. 4, § 2, p. 3).

b) Fijamos ahora cualquier x que satisfaga una desigualdad $|x| > 1/L$.

Existe, entonces, tal $\varepsilon > 0$ que $|x| > 1/(L - \varepsilon)$. Por definición del límite superior, en la sucesión (1.42) puede ser elegida una subsucesión $\{\sqrt[n_k]{|a_{n_k}|}\}$ $(k = 1, 2, \ldots)$ que sea convergente hacia L.

Mas, esto quiere decir que, a partir de cierto número k, queda válida la desigualdad

$$L - \varepsilon < \sqrt[n_k]{|a_{n_k}|} < L + \varepsilon.$$

Así pues, a partir del número indicado k, se verifica la desigualdad

$$\sqrt[n_k]{|a_{n_k} \cdot x^{n_k}|} = |x| \cdot \sqrt[n_k]{|a_{n_k}|} > \frac{L - \varepsilon}{L - \varepsilon} = 1,$$

o bien

$$|a_{n_k} \cdot x^{n_k}| > 1,$$

es decir, está perturbada la condición necesaria de convergencia de la serie (1.41) y dicha serie diverge.

III. Supongamos que la sucesión (1.42) es acotada y su límite superior es nulo ($L = 0$). Demostremos que la serie (1.41) es absolutamente convergente para cualquier x.

Fijamos arbitrariamente $x \neq 0$ (con $x = 0$ la serie (1.41) es absolutamente convergente a ciencia cierta). Por cuanto el límite superior L es igual a cero ($L = 0$) y la sucesión (1.42) no puede tener puntos límites negativos, el número $L = 0$ será el *único* punto límite, y, por consiguiente, sirve de límite para dicha sucesión, es decir, la sucesión (1.42) es infinitamente pequeña.

Pero, en este caso, para un número positivo $1/2\,|x|$ existe un número, a partir del cual se verifica la desigualdad

$$\sqrt[n]{|a_n|} < \frac{1}{2\,|x|}.$$

Por consiguiente, a partir del número mencionado,

$$\sqrt[n]{|a_n x^n|} = |x| \cdot \sqrt[n]{|a_n|} < \frac{1}{2} < 1,$$

es decir, la serie (1.41) es absolutamente convergente según el criterio de Cauchy (véase v. II, cap. 4, § 2, p. 3). El teorema está completamente demostrado.

El teorema demostrado nos lleva directamente a la siguiente afirmación fundamental.

Teorema 1.14. *Para cualquier serie de potencias* (1.41), *siempre que ella no representa una serie que converge sólo en el punto* $x = 0$, *existe un número positivo* R (*igual, quizás, al infinito*) *tal que la citada serie sea absolutamente convergente cuando* $|x| < R$, *y divergente, cuando* $|x| > R$.

Este número R se denomina *radio de convergencia* de la serie de potencias en consideración, y el intervalo $(-R,\ R)$, *intervalo de convergencia* de esta serie. Para el cálculo del radio de convergencia vale una fórmula

$$R = \frac{1}{\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|a_n|}} \tag{1.43}$$

(en el caso en que $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|a_n|} = 0,\ R = \infty$).

OBSERVACIÓN 1. En los extremos del intervalo de convergencia, es decir, en los puntos $x = -R$, y $x = R$, la serie de potencias puede ser tanto convergente, como divergente [1].

---

[1]) Indiquemos el siguiente *teorema de Abel: si la serie de potencias* (1.41) *converge para* $x = R$, *la suma de ella* $S(x)$ *es continua en el punto* R *a la izquierda.* Sin perder la generalidad de razonamientos podemos considerar que $R = 1$ mas en esta forma el teorema de Abel (que confirma, de hecho, la regularidad del método de Poisson—Abel) fue demostrado en el anexo 3 al cap. 4, v. II

Como que para la serie $1+\sum_{k=1}^{\infty} x^k$ el radio de convergencia es igual a uno, el intervalo de convergencia será $(-1, 1)$, y esta serie diverge en los extremos del intervalo mencionado.

Para la serie $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{k^2}$ el intervalo de convergencia es el mismo, es decir, $(-1, 1)$, pero esta última serie converge en ambos extremos del citado intervalo.

OBSERVACIÓN 2. Todos los resultados obtenidos en este punto son legítimos para la serie (1.41), en la cual la variable real x está sustituida por una variable compleja z.

Para la serie de este tipo se establece la existencia de un número positivo R tal que la serie converge absolutamente cuando $|z| < R$, y diverge, cuando $|z| > R$.

Para el cálculo de R vale la fórmula (1.43). El número R recibe el nombre de *radio de convergencia*, y el campo $|z| < R$, *círculo de convergencia* de la citada serie de potencias.

2. Continuidad de la suma de una serie de potencias. Supongamos que la serie de potencias (1.41) tiene el radio de convergencia $R > 0$.

Lema 2. *Cualquiera que sea un número positivo r que satisfaga la condición $r < R$, la serie* (1.41) *es uniformemente convergente sobre el segmento $[-r, r]$, es decir, para $|x| \leqslant r$.*

DEMOSTRACIÓN. En virtud del teorema 1.14, la serie (1.41) es absolutamente convergente cuando $x = r$, es decir, converge la serie

$$|a_0| + \sum_{k=1}^{\infty} |a_k| \cdot r^k.$$

Pero, la última serie numérica es mayorante para la serie (1.41) para todo x del segmento $[-r, r]$. Debido al criterio de Weierstrass, la serie (1.41) converge uniformemente sobre el segmento $[-r, r]$. El lema está demostrado.

Corolario. *En las condiciones del lema 2 la suma de la serie* (1.41) *es una función continua sobre el segmento $[-r, r]$* (en virtud del teorema 1.7).

Teorema 1.15. *La suma de una serie de potencias en el interior de su intervalo de convergencia es una función continua.*

DEMOSTRACIÓN. Sea $S(x)$ la suma de la serie de potencias (1.41), y sea R, su radio de convergencia. Fijamos cualquier x en el interior del intervalo de convergencia, es decir, tal que sea $|x| < R$. Existe siempre un número r tal que $|x| < r < R$. La función $S(x)$ es continua sobre el segmento $[-r, r]$, en virtud del corolario del lema 2. Por consiguiente, $S(x)$ también es continua en el punto x. El teorema está demostrado.

3. Integración y diferenciación término a término de una serie de potencias.

Teorema 1.16. *Si $R > 0$ es el radio de convergencia de la serie de potencias* (1.41), *y si x satisface la condición $|x| < R$, entonces la serie* (1.41) *puede integrarse término a término sobre el segmento* $[0, x]$. *La serie obtenida como resultado de la integración término a término tendrá el mismo radio de convergencia que la serie de partida.*

DEMOSTRACION. Para cualquier x que satisface una condición $|x| < R$, se encontrará un r tal que $|x| < r < R$. De acuerdo con el lema 2, la serie (1.41) converge uniformemente sobre el segmento $[-r, r]$, y, por lo tanto, también sobre el segmento $[0, x]$. Mas, en este caso dicha serie puede integrarse, debido al teorema 1.8, término a término sobre el segmento $[0, x]$.

Como resultado de la integración término a término se obtendrá la siguiente serie de potencias

$$a_0 x + \frac{a_1}{2} x^2 + \ldots + \frac{a_{n-1}}{n} x^n + \ldots,$$

cuyo radio de convergencia constituirá, de conformidad con el teorema 1.14, una magnitud inversa del límite superior de la sucesión

$$\sqrt[n]{\frac{|a_{n-1}|}{n}} = \frac{\sqrt[n]{|a_{n-1}|}}{\sqrt[n]{n}}. \qquad (1.44)$$

El límite superior de la sucesión (1.44) es el mismo que en (1.42) [1]), por lo cual el teorema queda demostrado.

Teorema 1.17. *La serie de potencias* (1.41) *puede diferenciarse término a término en el interior de su radio de convergencia. Una serie que se obtendrá por diferenciación término a término tendrá el mismo radio de convergencia R que la serie de partida.*

DEMOSTRACIÓN. En virtud del teorema 1.9 y lema 2, resulta suficiente demostrar solamente la segunda afirmación del teorema.

Como resultado de la diferenciación término a término de (1.41), obtendremos la serie

$$a_1 + 2 \cdot a_2 \cdot x + \ldots + n \cdot a_n \cdot x^{n-1} + \\ + (n+1) \cdot a_{n+1} \cdot x^n + \ldots,$$

cuyo radio de convergencia R (de acuerdo con el teorema 1.14) es inverso al límite superior de la sucesión

$$\{\sqrt[n]{(n+1)\,|a_{n+1}|}\}. \qquad (1.45)$$

---

[1]) Pues, $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$, $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|a_{n-1}|} = \overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \sqrt[n+1]{|a_n|} = \overline{\lim\limits_{n\to\infty}} [\sqrt[n]{|a_n|}]^{\frac{n}{n+1}} =$
$= \overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \{\sqrt[n]{|a_n|}\}$.

Por cuanto la sucesión (1.45) y la (1.42) tienen un mismo límite superior [1], el teorema queda demostrado.

Corolario. *Una serie de potencias puede diferenciarse término a término, en el interior de su intervalo de convergencia, cualquier número de veces.*

Una serie, obtenida por n-ésima diferenciación término a término de la serie de potencias inicial tiene el mismo radio de convergencia que la serie inicial.

§ 5. Desarrollo de las funciones en series de potencias

1. Desarrollo de una función en serie de potencias.

Definición 1. *Diremos que una función $f(x)$ puede desarrollarse sobre el intervalo $(-R, R)$, (sobre el conjunto $\{x\}$) en serie de potencias, si existe una serie de potencias que converge hacia $f(x)$ en el segmento citado (conjunto citado).*

Son válidas las siguientes afirmaciones.

1°. *Para que una función $f(x)$ pueda desarrollarse en serie de potencias sobre el intervalo $(-R, R)$, es necesario que dicha función tenga en el intervalo citado derivadas continuas de cualquier orden* [2].

En efecto, una serie de potencias puede diferenciarse término a término, en el interior de su intervalo de convergencia que en todo caso contiene el intervalo $(-R, R)$, cualquier número de veces, con la particularidad de que todas las series obtenidas en este caso son convergentes en el interior del mismo intervalo de convergencia (teorema 1.17).

Pero, las sumas de las series obtenidas por diferenciación cualquier número de veces representan (en virtud del teorema 1.15) funciones continuas en el interior del intervalo citado de convergencia y, por lo tanto, son continuas sobre el intervalo $(-R, R)$.

2°. *Si una función $f(x)$ se desarrolla sobre el intervalo $(-R, R)$ en serie de potencias, se lo puede hacer sólo de un único modo.*

Efectivamente, supongamos que la función $f(x)$ puede ser desarrollada sobre el intervalo $(-R, R)$ en la serie de potencias (1.41).

---

[1]) Pues, $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n+1}=1$, $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|a_{n+1}|}=\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \sqrt[n-1]{|a_n|}=\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} [\sqrt[n]{|a_n|}]^{\frac{n}{n-1}}=$
$=\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|a_n|}$.

[2]) Observemos que existen funciones que tienen en el intervalo $(-R, R)$ derivadas continuas de cualquier orden, pero no son desarrollables en dicho intervalo en serie de potencias. Como ejemplo de tal función puede servir

$$f(x)=\begin{cases} e^{-1/x^2} & \text{para } x\neq 0, \\ 0 & \text{para } x=0. \end{cases}$$

Al diferenciar la serie indicada término a término n veces (lo que puede realizarse a ciencia cierta en el interior del intervalo $(-R, R)$), obtendremos

$$f^{(n)}(x) = a_n \cdot n! + a_{n+1} \cdot (n+1)!\, x + \ldots$$

De aquí, para $x = 0$ encontramos

$$f^{(n)}(0) = a_n \cdot n!$$

o bien

$$a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!}. \tag{1.46}$$

Así pues, los coeficientes de la serie de potencias (1.41), en la que puede desarrollarse la función $f(x)$, *se definen unívocamente por la fórmula* (1.46).

Supongamos ahora que la función $f(x)$ tiene sobre el intervalo $(-R, R)$ derivadas continuas de cualquier orden.

Definición 2. *La serie de potencias* (1.41), *cuyos coeficientes se definen mediante la fórmula* (1.46), *se llama serie de Taylor de la función* $f(x)$.

La afirmación 2° nos conduce a lo siguiente:

3°. *Si una función* $f(x)$ *puede ser desarrollada sobre el intervalo* $(-R, R)$ *en serie de potencias, dicha serie es serie de Taylor de la función* $f(x)$.

Enunciemos, para concluir, la siguiente afirmación que se deduce directamente del § 14, cap. 8, v. I.

4°. *Para que una función* $f(x)$ *pueda ser desarrollada en serie de Taylor sobre el intervalo* $(-R, R)$ *(sobre el conjunto* $\{x\}$*), es necesario y suficiente que el término residual en la fórmula de Maclaurin para esta función tienda a cero sobre el intervalo mencionado (conjunto mencionado).*

2. Desarrollo de algunas funciones elementales en serie de Taylor. En el v. I (véase p. 2, § 15, cap. 8) se ha demostrado que los términos residuales en la fórmula de Maclaurin para las funciones e^x, $\cos x$ y $\operatorname{sen} x$ tienden a cero en toda la recta infinita, mientras que el término residual en la fórmula de Maclaurin para la función $\ln(1 + x)$ tiende a cero sólo sobre el semisegmento $-1 < x \leqslant +1$.

En vista de la afirmación 4° del punto anterior, estos razonamientos nos llevan a los siguientes desarrollos:

$$e^x = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n!},$$

$$\cos x = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!},$$

$$\operatorname{sen} x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!},$$

$$\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} x^n}{n}.$$

Los primeros tres de los desarrollos citados convergen para todos los valores de x, y el último, para los valores de x pertenecientes al semisegmento $-1 < x \leqslant 1$.

Detengámonos ahora en un desarrollo en serie de potencias de la función $(1+x)^\alpha$, o en la llamada *serie binomial*.

Si $f(x) = (1+x)^\alpha$, tenemos

$$f^{(n)}(x) = \alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\ldots$$
$$\ldots(\alpha-n+1)\cdot(1+x)^{\alpha-n}.$$

Por eso, la fórmula de Maclaurin con el término residual en forma de Cauchy tiene por expresión (véase v. I, cap. 8, § 14)

$$(1+x)^\alpha = 1 + \sum_{k=1}^{n} \frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-k+1)}{k!} x^k + R_{n+1}(x), \quad (1.47)$$

donde

$$R_{n+1}(x) = \frac{(1-\theta)^n}{n!} x^{n+1} \cdot f^{n+1}(\theta x) =$$
$$= \frac{(1-\theta)^n}{n!} \cdot x^{(n+1)} \cdot \alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n)(1+\theta x)^{\alpha-n-1} =$$
$$= \left(\frac{1-\theta}{1+\theta x}\right)^n \cdot \frac{(\alpha-1)(\alpha-2)\ldots(\alpha-n)}{n!} \cdot \alpha(1+\theta x)^{\alpha-1} \cdot x^{n+1} \quad (1.48)$$

(θ es un número del intervalo $0 < \theta < 1$).

Cerciorémonos al principio de lo que para $\alpha > 0$ el término residual $R_{n+1}(x)$ tiende hacia cero (con $n \to \infty$) en cada punto del intervalo $-1 < x < 1$.

En efecto, todos los términos de la sucesión $\left\{\left(\frac{1-\theta}{1+\theta x}\right)^n\right\}$ nunca sobrepasan la unidad en el intervalo citado; la sucesión $\left\{\frac{(\alpha-1)(\alpha-2)\ldots(\alpha-n)}{n!}\right\}$ es acotada para cualquier $\alpha > 0$ fijo [1]); el número $\alpha(1+\theta x)^{\alpha-1}$ está definido para cualquier $\alpha > 0$ y para todo x del intervalo $-1 < x < +1$; por fin, la sucesión $\{x^{n+1}\}$ es infinitamente pequeña para cualquier x del intervalo $-1 < x < 1$.

[1]) Todos los elementos de esta sucesión están acotados en módulo por el número $\frac{(\alpha-1)(\alpha-2)\ldots(\alpha-[\alpha])}{[\alpha]!}$, donde $[\alpha]$ es la parte entera de α.

Así pues, el término residual $R_{n+1}(x)$ tiende, en virtud de (1.48), a cero, cualesquiera que sean $\alpha > 0$ fijo y x del intervalo $-1 < x < 1$.

Por consiguiente, debido a (1.47), *cuando $\alpha > 0$, en cualquier punto del intervalo $-1 < x < 1$ es válido el desarrollo*

$$(1+x)^{\alpha} = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-k+1)}{k!} x^k. \qquad (1.49)$$

Demostremos, ahora, que *cuando $\alpha > 0$, la serie en el segundo miembro de* (1.49) *converge uniformemente hacia la función $(1+x)^{\alpha}$ sobre el segmento cerrado $-1 \leq x \leq 1$.*

En cualquier punto del segmento mencionado esta serie puede mayorarse por la siguiente serie numérica

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{|\alpha|\cdot|1-\alpha|\ldots|k-1-\alpha|}{k!}. \qquad (1.50)$$

De acuerdo con el criterio de Weierstrass, para establecer convergencia uniforme sobre el segmento $-1 \leq x \leq 1$ de la serie que figura en el segundo miembro de (1.49), basta demostrar convergencia de la serie mayorante (1.50).

Denotemos con p_k el k-ésimo término de la serie (1.50). Obtendremos para todos los k suficientemente grandes

$$\frac{p_{k+1}}{p_k} = \frac{k-\alpha}{k+1} = 1 - \frac{1+\alpha}{k+1}. \qquad (1.51)$$

De la fórmula (1.51) se deduce que

$$\lim_{k\to\infty} k\left(1 - \frac{p_{k+1}}{p_k}\right) = (1+\alpha)\cdot\lim_{k\to\infty}\frac{k}{k+1} = 1+\alpha > 1,$$

es decir, la serie (1.50) es convergente, en virtud del *criterio* de Raabe (véase v. II, cap. 4, § 2, p. 5).

Con ello queda demostrado que, cuando $\alpha > 0$, la serie que figura en el segundo miembro de (1.49) converge uniformemente sobre el segmento $-1 \leq x \leq 1$. Resta por demostrar que la serie mencionada converge sobre el segmento $-1 \leq x \leq 1$ hacia la función $(1+x)^{\alpha}$.

En virtud de lo demostrado más arriba, la suma de la serie mencionada $S(x)$ y la función $(1+x)^{\alpha}$ *coinciden en todo punto sobre el intervalo* $-1 < x < 1$. Además, ambas funciones, $S(x)$ y $(1+x)^{\alpha}$, *son continuas en el segmento* $-1 \leq x \leq 1$ (la función $S(x)$ es continua, pues representa la suma de la serie convergente compuesta por las funciones continuas; la continuidad de la función $(1+x)^{\alpha}$ para $\alpha > 0$ es obvia).

Pero, en tal caso, los valores de las funciones $S(x)$ y $(1+x)^{\alpha}$ en los puntos $x = -1$, y $x = 1$ han de coincidir, es decir, la serie en el segundo miembro de (1.49) es uniformemente convergente hacia $(1+x)^{\alpha}$ sobre el segmento cerrado $-1 \leq x \leq 1$.

3. Nociones elementales sobre las funciones de una variable compleja. Se ha notado más arriba que al caso de la serie de potencias

respecto de la variable compleja z

$$a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \ldots + a_n z^n + \ldots$$

se extienden los teoremas 1.13 y 1.14 (sobre la existencia y valores del radio de convergencia). Las series de esta índole se utilizan para definir funciones de variable compleja z.

Las funciones e^z, $\cos z$ y $\operatorname{sen} z$ de la variable compleja z se definen como sumas de las siguientes series:

$$e^z = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n!}, \tag{1.52}$$

$$\cos z = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot z^{2n}}{(2n)!}, \tag{1.53}$$

$$\operatorname{sen} z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot z^{2n+1}}{(2n+1)!}. \tag{1.54}$$

Es fácil comprobar que las tres series mencionadas convergen absolutamente para todos los valores de z (su radio de convergencia es $R = \infty$).

Establezcamos ahora la relación existente entre las funciones e^z, $\cos z$ y $\operatorname{sen} z$.

Al sustituir en la fórmula (1.52) z por iz, obtendremos

$$e^{iz} = 1 + iz + \frac{(iz)^2}{2!} + \frac{(iz)^3}{3!} + \frac{(iz)^4}{4!} + \frac{(iz)^5}{5!} + \ldots =$$
$$= \left(1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \ldots\right) + i\left(z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \ldots\right). \tag{1.55}$$

Al cotejar el segundo miembro de la igualdad (1.55) con los desarrollos (1.53) y (1.54), llegamos a la siguiente fórmula notable:

$$e^{iz} = \cos z + i \cdot \operatorname{sen} z. \tag{1.56}$$

La fórmula (1.56) desempeña un papel fundamental en la teoría de funciones de la variable compleja y se denomina *fórmula de Euler*

Atribuyendo a la variable z en la fórmula de Euler el valor de un número real x, y luego, el del número real $-x$, obtenemos las siguientes dos fórmulas:

$$e^{ix} = \cos x + i \cdot \operatorname{sen} x,$$
$$e^{-ix} = \cos x - i \operatorname{sen} x.$$

Al sumar y restar estas dos fórmulas, obtendremos fórmulas que expresan $\cos x$ y $\operatorname{sen} x$ en términos de la función exponencial:

$$\begin{cases} \cos x = \dfrac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}, \\ \operatorname{sen} x = \dfrac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}. \end{cases} \tag{1.57}$$

Detengámonos en conclusión en la definición de función logarítmica $w = \ln z$ de la variable compleja z. Dicha función se define naturalmente como función inversa de la función exponencial, es decir, a base de la relación $z = e^w$. Al asumir $w = u + iv$, $z = x + iy$, propongámonos el objetivo de expresar u y v en términos de $z = x + iy$.

De la correlación

$$z = x + iy = e^{u+iv} = e^u (\cos v + i \operatorname{sen} v)$$

obtendremos, haciendo uso del concepto de módulo y argumento de un número complejo (véase fórmula (7.6) del v. I),

$$|z| = \sqrt{x^2 + y^2} = e^u, \quad \arg z = v - 2\pi k,$$

donde

$$k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

De las últimas igualdades encontramos que

$$u = \ln |z| = \ln \sqrt{x^2 + y^2},$$
$$v = \arg z + 2\pi k \quad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$$

o bien, en definitiva

$$\ln z = \ln |z| + i (\arg z + 2\pi k), \quad \text{donde } k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots \quad (1.58)$$

La fórmula (1.58) enseña que la función logarítmica en un campo complejo *no es unívoca*; su parte imaginaria tiene, para el mismo valor de z, una infinidad de valores correspondientes a diferentes $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$

Es fácil comprender que la situación análoga tendrá lugar también al definir en un campo complejo funciones trigonométricas inversas.

4. Aproximación uniforme de una función continua mediante los polinomios (teorema de Weierstrass). En este punto demostremos un teorema fundamental que se debe a Weierstrass y que fue enunciado por él en 1895.

Teorema 1.18 (teorema de Weierstrass). *Si una función $f(x)$ es continua en el segmento $[a, b]$, existe una sucesión de polinomios $\{P_n(x)\}$ que converge uniformemente sobre $[a, b]$ hacia la función $f(x)$, es decir, para cualquier $\varepsilon > 0$ se encontrará un polinomio $P_n(x)$ con el número n (dependiente sólo de ε) tal que*

$$|P_n(x) - f(x)| < \varepsilon,$$

simultáneamente para todos los x del segmento $[a, b]$.

Dicho de otro modo, *una función $f(x)$, continua sobre el segmento $[a, b]$, puede ser uniformemente aproximada sobre dicho segmento mediante un polinomio con la exactitud ε prefijada con anticipación.*

DEMOSTRACIÓN. Sin limitar la generalidad de nuestros razonamientos, podemos examinar el segmento $[0, 1]$ [1]) en lugar del segmento $[a, b]$. Además, es suficiente demostrar el teorema para una función continua $f(x)$ que se anula en los extremos del segmento $[0, 1]$, es decir, que satisface las condiciones $f(0) = 0$, y $f(1) = 0$. Efectivamente, si la función $f(x)$ fallase a satisfacer estas condiciones,

[1]) Puesto que uno de estos segmentos se transforma en otro mediante una sustitución lineal $x = (b - a) t + a$.

entonces, al poner

$$g(x) = f(x) - f(0) - x[f(1) - f(0)],$$

obtendríamos una función $g(x)$ continua sobre el segmento $[0, 1]$ que satisfaga las condiciones $g(0) = 0$ y $g(1) = 0$, mientras que la posibilidad de representar $g(x)$ en forma del límite para una sucesión uniformemente convergente de polinomios nos permitiría llegar a una deducción de que $f(x)$ es también representable en forma del límite de una sucesión uniformemente convergente de polinomios (ya que la diferencia $f(x) - g(x)$ es un polinomio de primer grado).

Así pues, admitamos que la función $f(x)$ es continua sobre el segmento $[0, 1]$ y satisface las condiciones $f(0) = 0$, $f(1) = 0$. Tal función $f(x)$ podemos prolongarla a toda la recta infinita, haciéndola igual a cero fuera de los márgenes del segmento $[0, 1]$ y afirmar que la función prolongada de la manera aducida *es uniformemente continua en toda la recta infinita.*

Veamos la siguiente sucesión concreta de polinomios no negativos de grado $2n$:

$$Q_n(x) = c_n(1 - x^2)^n \quad (n = 1, 2, \ldots), \tag{1.59}$$

en cada uno de los cuales la constante c_n está elegida de un modo tal que se cumpla la igualdad

$$\int_{-1}^{1} Q_n(x)\,dx = 1 \quad (n = 1, 2, \ldots). \tag{1.60}$$

Sin calcular el valor exacto de la constante c_n, estimémosla superiormente.

Con este fin notemos que para cualquier número $n = 1, 2, \ldots$ y para todo x del segmento $[0, 1]$ se verifica la desigualdad [1])

$$(1 - x^2)^n \geqslant 1 - nx^2. \tag{1.61}$$

Aplicando la desigualdad (1.61) y teniendo presente que $1/\sqrt{n} \leqslant 1$, tendremos para todo $n \geqslant 1$:

$$\int_{-1}^{1} (1 - x^2)^n\,dx = 2\int_{0}^{1} (1 - x^2)^n\,dx \geqslant$$

$$\geqslant 2\int_{0}^{1/\sqrt{n}} (1 - x^2)^n\,dx \geqslant 2\int_{0}^{1/\sqrt{n}} (1 - nx^2)\,dx = \frac{4}{3}\frac{1}{\sqrt{n}} > \frac{1}{\sqrt{n}}. \tag{1.62}$$

De las fórmulas (1.59), (1.60) y (1.62) concluimos que para todos los números $n = 1, 2, \ldots$ es válida la siguiente estimación supe-

[1]) Esta desigualdad se deduce de lo que para cualquier $n \geqslant 1$ una función $\varphi(x) = (1 - x^2)^n - (1 - nx^2)$ *es no negativa en todo punto del segmento* $0 \leqslant x \leqslant 1$, pues dicha función se anula cuando $x = 0$ y tiene en cualquier punto del segmento citado derivada no negativa $\varphi'(x) = 2nx[1 - (1 - x^2)^{n-1}]$.

rior para la constante c_n:

$$c_n \leqslant \sqrt{n}. \tag{1.63}$$

De (1.63) y (1.59) se deduce que, cualquiera que sea $\delta > 0$, para todo x del segmento $\delta \leqslant x \leqslant 1$ se verifica la desigualdad

$$0 \leqslant Q_n(x) \leqslant \sqrt{n}\,(1-\delta^2)^n. \tag{1.64}$$

De (1.64) se desprende que, *cualquiera que sea $\delta > 0$ fijo, la sucesión de polinomios no negativos $\{Q_n(x)\}$ es uniformemente convergente hacia cero sobre el segmento $\delta \leqslant x \leqslant 1$* [1].

Pongamos ahora para todo x del segmento $0 \leqslant x \leqslant 1$

$$P_n(x) = \int_{-1}^{1} f(x+t)\,Q_n(t)\,dt \tag{1.65}$$

y cerciorémonos de que para cualquier $n = 1, 2, \ldots$ la función $P_n(x)$ es un polinomio de $2n$-ésimo grado, con la particularidad de que $\{P_n(x)\}$ es precisamente la sucesión buscada de polinomios uniformemente convergente sobre el segmento $0 \leqslant x \leqslant 1$ hacia la función $f(x)$.

Ya que la función analizada $f(x)$ es igual a cero fuera de los márgenes del segmento $[0, 1]$, para cualquier x del segmento $[0, 1]$ la integral (1.65) puede escribirse en la forma

$$P_n(x) = \int_{-x}^{1-x} f(x+t)\,Q_n(t)\,dt.$$

Sustituyendo en la última integral la variable t por la $t-x$, comuniquémosle una forma

$$P_n(x) = \int_{0}^{1} f(t)\,Q_n(t-x)\,dt. \tag{1.66}$$

De (1.66) y (1.59) se pone claro que la función $P_n(x)$ representa un polinomio de $2n$-ésimo grado.

Resta por demostrar que la sucesión $\{P_n(x)\}$ es uniformemente convergente sobre el segmento $0 \leqslant x \leqslant 1$ hacia la función $f(x)$.

---

[1] Efectivamente, es suficiente demostrar que la sucesión $a_n = (1-\delta^2)^n \cdot \sqrt{n}$ converge hacia cero, lo que se deduce, por ejemplo, de que la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge según el criterio de Cauchy (véase teorema 4.6 del v. II) por cuanto

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = (1-\delta^2) \lim_{n\to\infty} n^{1/2n} = (1-\delta^2) < 1.$$

Fijamos arbitrariamente $\varepsilon > 0$. Para ε fijo existe, por ser $f(x)$ uniformemente continua en toda la recta infinita, un $\delta > 0$ tal que

$$|f(x)-f(y)| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{para} \quad |x-y| < \delta. \tag{1.67}$$

Además, puesto que $f(x)$ es continua sobre el segmento $[0, 1]$, será en adición acotada en el mismo, y, por consiguiente, en todo punto de la recta infinita. Esto quiere decir que existe una constante A tal que para cualquier x se verifica

$$|f(x)| \leqslant A. \tag{1.68}$$

Haciendo uso de (1.60), (1.64), (1.67), (1.68), y teniendo presente que $Q(x)$ es no negativa, estimemos la diferencia $P_n(x) - f(x)$.

Para todo x del segmento $0 \leqslant x \leqslant 1$ tendremos

$$|P_n(x)-f(x)| = \left|\int_{-1}^{1} [f(x+t)-f(x)]\, Q_n(t)\, dt\right| \leqslant$$

$$\leqslant \int_{-1}^{1} |f(x+t)-f(x)|\, Q_n(t)\, dt \leqslant 2A\int_{-1}^{-\delta} Q_n(t)\, dt +$$

$$+\frac{\varepsilon}{2}\int_{-\delta}^{\delta} Q_n(t)\, dt + 2A\int_{\delta}^{1} Q_n(t)\, dt \leqslant 4A\sqrt{n}\cdot(1-\delta^2)^n + \frac{\varepsilon}{2}.$$

Con el fin de finalizar la demostración del teorema, basta observar que para todos los números n suficientemente grandes se verifica la siguiente desigualdad

$$4A\sqrt{n}\,(1-\delta^2)^n < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Corolario. *Si no sólo la propia función $f(x)$, sino también las derivadas suyas hasta cierto orden k inclusive son continuas sobre el segmento $[0, 1]$*[1]*, existe, entonces, una sucesión de polinomios $\{P_n(x)\}$ tal que cada una de las sucesiones $\{P_n(x)\}$, $\{P_n'(x)\}$, . . ., $\{P_n^{(k)}(x)\}$ converge uniformemente sobre el segmento $[0, 1]$ hacia $f(x)$, $f'(x)$, ..., $f^{(k)}(x)$, respectivamente.*

En efecto, sin perder la generalidad de los razonamientos, podemos considerar que cada una de las funciones $f(x)$, $f'(x)$, ..., $f^{(k)}(x)$ se anula cuando $x = 0$, y $x = 1$ [2], mas, en estas con-

[1] En lugar de $[0, 1]$ podemos tomar, por supuesto, $[a, b]$.

[2] Si la función $f(x)$ fallara a satisfacer estas condiciones, encontraríamos un polinomio $\overline{P}_k(x)$ de $2n$-ésimo grado de tal género que para la función $g(x) = f(x) - \overline{P}_k(x)$ estas condiciones se cumplan.

diciones la función $f(x)$ puede ser prolongada a toda la recta infinita, suponiéndola igual a cero fuera de $[0, 1]$, de modo que la función prolongada y todas las derivadas suyas de orden hasta el k-ésimo inclusive resultarán ser *uniformemente continuas en toda la recta infinita*.

Pero, en este caso, al denotar con $P_n(x)$ el mismo polinomio (1.65) que se trató más arriba, y al repetir los razonamientos aducidos en la demostración del teorema 1.18, demostremos que cada una de las diferencias

$$P_n(x) - f(x),\ P'_n(x) - f'(x),\ \ldots,\ P_n^{(k)}(x) - f^{(k)}(x)$$

es una infinitésima, uniforme con relación a x sobre el segmento $0 \leqslant x \leqslant 1$.

OBSERVACIÓN 1. La demostración expuesta se generaliza con facilidad al caso de una función de m variables $f(x_1, x_2, \ldots, x_m)$ continua en el cubo m-dimensional $0 \leqslant x_i \leqslant 1$ $(i = 1, 2, \ldots, m)$.

Por analogía completa con el teorema 1.18 se demuestra que para tal función $f(x_1, x_2, \ldots, x_m)$ existe una sucesión de polinomios de m variables $x_1, x_2, \ldots, x_m$ que es uniformemente convergente hacia dicha función en el cubo m-dimensional.

OBSERVACIÓN 2. Observemos que los polinomios que figuran en el teorema 1.18 pueden ser sustituidos por las funciones de un tipo más general, conservando intacta la afirmación sobre la posibilidad de aproximación uniforme mediante tales funciones de cualquier función continua f.

Convengamos en denominar *álgebra* una totalidad arbitraria A de funciones, definidas sobre cierto conjunto E, si[1] 1) $f + g \in A$; 2) $f \cdot g \in A$; 3) $\alpha \cdot f \in A$ para $f \in A$ y $g \in A$ arbitrarias y para cualquier α real.

Dicho de otro modo, álgebra es totalidad de funciones cerrada con relación a la sumación y multiplicación de funciones y a la multiplicación de las funciones por los números reales.

Si para cada punto x del conjunto E existe cierta función $g \in A$ tal que $g(x) \neq 0$, suele decirse que el álgebra A *no desaparece en ningún punto x del conjunto E*.

Se dice que una totalidad A de funciones definidas sobre el conjunto E *separa los puntos del conjunto E*, si para cualesquiera puntos diferentes x_1 y x_2 del conjunto mencionado se encuentra una función de A tal que $f(x_1) \neq f(x_2)$.

Tiene lugar la siguiente afirmación notable llamada *teorema de Weierstrass — Stone*[2].

Sea A un álgebra de funciones, continuas sobre el conjunto compacto E[3], *la que separa los puntos del conjunto E y no desaparece en ningún punto de este conjunto. Entonces, toda función $f(x)$, continua sobre el conjunto E, puede ser representada en forma del límite de una sucesión de funciones del álgebra A uniformemente convergente.*

---

[1] Recordemos que el símbolo $f \in A$ denota la pertenencia de f a A.

[2] *M. Stone* es matemático contemporáneo norteamericano.

[3] Recordemos que compacto se llama un conjunto acotado cerrado.

Capítulo 2

INTEGRALES DOBLES E INTEGRALES N-MÚLTIPLES

En el v. 1 se han analizado problemas físicos y geométricos que conducían al concepto de integral definida simple.

Como problemas tipo de este género intervienen el problema de cálculo de la masa de un vástago no homogéneo a base de la densidad lineal conocida del vástago citado y el de cálculo del área de un trapecio curvilíneo (es decir, del área que se dispone por debajo de la gráfica de la función no negativa $y = f(x)$ sobre el segmento $[a, b]$).

No es difícil indicar problemas «multidimensionales» análogos que conducen al concepto de integral doble o integral triple.

Por ejemplo, el problema de cálculo de la masa de un cuerpo no homogéneo T según la densidad volumétrica conocida $\rho(M)$ de este cuerpo nos lleva, naturalmente, al concepto de la integral triple.

Al objeto de calcular la masa del cuerpo mencionado T, dividámoslo en secciones suficientemente pequeñas $T_1, T_2, \ldots, T_n$. Podemos considerar aproximadamente que la densidad volumétrica $\rho(M)$ de cada sección T_k es constante e igual a $\rho(M_k)$, donde M_k es cierto punto de la sección T_k. En este caso la masa de cada sección T_k será aproximadamente igual a $\rho(M_k)\cdot v_k$, donde v_k es el volumen de la sección T_k.

El valor aproximado de la masa de todo el cuerpo T será igual a la suma

$$\sum_{k=1}^{n} \rho(M_k)\cdot v_k.$$

Resulta natural que el valor exacto de la masa esté definido como límite de la citada suma cuando cada sección T_k disminuye indefinidamente [1]). Precisamente este límite puede tomarse por la definición de integral triple, extendida al campo tridimensional T, de la función $\rho(M)$.

De un modo sumamente análogo puede examinarse el problema geométrico sobre el cálculo del volumen del llamado cilindro con fondo encorvado (es decir, volumen del cuerpo que está expuesto en la fig. 2.1 por debajo de la gráfica de una función no negativa $z = f(x, y)$ en cierto dominio bidimensional D). Este problema

---

[1]) Por supuesto, conviene precisar el término «disminución indefinida».

conduce al concepto de integral doble de la función $f(x, y)$ extendida al dominio bidimensional D.

En el presente capítulo se expone la teoría de las integrales dobles, triples y, en general, de integrales n-múltiples.

Para el empleo más efectivo de la analogía con la integral simple, introduzcamos primero el concepto de integral doble para un rectán-

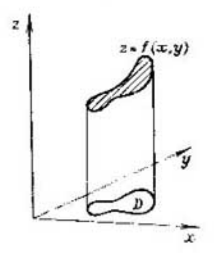


Fig. 2.1.

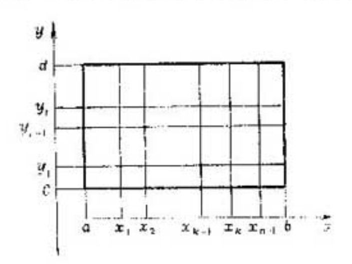


Fig. 2.2.

gulo y sólo luego, de la integral doble extendida a un dominio arbitrario tanto con ayuda de la partición rectangular, como mediante partición arbitraria del campo mencionado.

§ 1. Definición y existencia de la integral doble

1. Definición de la integral doble para rectángulos. Admitamos que una función arbitraria $f(x, y)$ está definida en todo punto sobre el rectángulo $R = [a \leqslant x \leqslant b] \cdot [c \leqslant y \leqslant d]$ (fig. 2.2).

Dividamos el segmento $a \leqslant x \leqslant b$ en n segmentos parciales con ayuda de los puntos $a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_n = b$, y el segmento $c \leqslant y \leqslant d$, en p segmentos parciales con ayuda de los puntos $c = y_0 < y_1 < y_2 < \ldots < y_p = d$.

A la partición citada mediante unas rectas paralelas a los ejes Ox y Oy (véase fig. 2.2) le corresponde la partición del rectángulo R en $n \cdot p$ rectángulos parciales

$$R_{kl} = [x_{k-1} \leqslant x \leqslant x_k] \cdot [y_{l-1} \leqslant y \leqslant y_l] \quad (k = 1, 2, \ldots, n;\ l = 1, 2, \ldots, p).$$

La partición mencionada del rectángulo R se designará con el símbolo T.

En este capítulo por término «rectángulo» se entenderá siempre un rectángulo con lados paralelos a los ejes coordenados.

Elijamos en cada rectángulo parcial R_{kl} un punto arbitrario (ξ_k, η_l). Al poner $\Delta x_k = x_k - x_{k-1}$, $\Delta y_l = y_l - y_{l-1}$, denotemos con ΔR_{kl} el área del rectángulo R_{kl}. Es evidente que $\Delta R_{kl} = \Delta x_k \times \times \Delta y_l$.

Definición 1. *Un número*

$$\sigma = \sum_{k=1}^{n} \sum_{l=1}^{p} f(\xi_k, \eta_l) \cdot \Delta R_{kl} \tag{2.1}$$

se llama suma integral de la función $f(x, y)$, correspondiente a la partición dada T del rectángulo R y a la elección dada de los puntos intermedios (ξ_k, η_l) en los rectángulos parciales de la partición T.

La diagonal $\sqrt{(\Delta x_k)^2 + (\Delta y_l)^2}$ se denominará *diámetro* del rectángulo R_{kl}. Con el símbolo Δ se designará el mayor de los diámetros de todos los rectángulos parciales R_{kl}.

Definición 2. *El número I se llama límite de las sumas integrales (2.1) con $\Delta \to 0$, si para cualquier número positivo ε puede indicarse tal número positivo δ que para $\Delta < \delta$ se verifica la desigualdad*

$$| \sigma - I | < \varepsilon,$$

cualquiera que sea la elección de los puntos (ξ_k, η_l) sobre los rectángulos parciales R_{kl}.

Definición 3. *Una función $f(x, y)$ se llama integrable (según Riemann) sobre el rectángulo R, si existe un límite finito I de las sumas integrales de dicha función para $\Delta \to 0$.*

El límite mencionado I se denomina integral doble de la función $f(x, y)$ extendida al rectángulo R y se denota por uno de los siguientes símbolos:

$$I = \iint\limits_R f(x, y)\, dx\, dy = \iint\limits_R f(M)\, d\sigma.$$

OBSERVACIÓN. Al igual que en el caso de una integral definida simple, (véase v. II, cap 1, § 1), se establece que *cualquier función $f(x, y)$, integrable sobre el rectángulo R, es acotada en dicho rectángulo.*

Esto nos presta los fundamentos para analizar en adelante solamente funciones acotadas $f(x, y)$.

2. Existencia de la integral doble para un rectángulo. La teoría de Darboux, desarrollada en el cap. 1, v. II para la integral definida simple, es completamente aplicable para el caso de la integral doble en un rectángulo R. En vista de la citada analogía, limitémonos a esbozar un esquema general de razonamientos.

Sean M_{kl} y m_{kl} la cota superior exacta y la cota inferior exacta, respectivamente, de una función $f(x, y)$ sobre el rectángulo parcial R_{kl}. Compongamos dos sumas para la partición dada T del rectángulo R:

una **superior**

$$S = \sum_{k=1}^{n} \sum_{l=1}^{p} M_{kl} \cdot \Delta R_{kl}$$

y otra inferior

$$s=\sum_{k=1}^{n}\sum_{l=1}^{p} m_{kl}\cdot\Delta R_{kl}.$$

Resultan válidas las siguientes afirmaciones (cuya demostración es completamente análoga a las demostraciones aducidas en el p. 2, § 2, cap. 1, v. II).

1°. *Para cualquier partición fija T y todo $\varepsilon>0$, las puntos intermedios (ξ_k, η_l) en los rectángulos parciales R_{kl} pueden elegirse de un modo tal que la suma integral σ satisfaga las desigualdades $0\leqslant S-\sigma<\varepsilon$. Los puntos (ξ_k, η_l) pueden también elegirse de tal modo que la suma integral satisfaga las desigualdades $0\leqslant\sigma-S<\varepsilon$.*

2°. *Si una partición T' del rectángulo R se ha obtenido por adición de unas rectas nuevas a las que forman la partición T, entonces la suma superior S' de la partición T' no sobrepasa la suma superior S de la partición T, mientras que la suma inferior s' de la partición T' no es menor que la suma inferior s de la partición T, es decir,*

$$s\leqslant s',\quad S'\leqslant S.$$

3°. *Sean T' y T'' cualesquiera dos particiones del rectángulo R. Entonces, la suma inferior de una de estas particiones no sobrepasa la suma superior de la otra. A saber, si s', S' y s'', S'' son sumas inferiores y superiores, respectivamente, de las particiones T' y T'', entonces*

$$s'\leqslant S'',\quad s''\leqslant S'.$$

4°. *Un conjunto $\{S\}$ de sumas superiores de una función dada $f(x, y)$ para toda clase de particiones del rectángulo R está acotado inferiormente. El conjunto $\{s\}$ de sumas inferiores está acotado superiormente. De este modo, existen unos números*

$$\overline{I}=\inf\{S\},\quad \underline{I}=\sup\{s\},$$

llamados integrales de Darboux, superior e inferior, respectivamente, (de la función $f(x, y)$) extendida al rectángulo R.

Es fácil convencerse de que $\underline{I}\leqslant\overline{I}$.

5°. *Supongamos que la partición T' del rectángulo R se ha obtenido a base de la partición T por adición a la última de p rectas nuevas, y sea s', S' y s, S las sumas inferiores y superiores, respectivamente, de las particiones T' y T.*

Entonces, para las diferencias $S-S'$ y $s'-s$ puede obtenerse una estimación cuyo valor depende del diámetro máximo Δ del rectángulo parcial de la partición T, del número p de rectas añadidas, de las cotas exactas M y m de la función $f(x, y)$ en el rectángulo R y del diámetro d del rectángulo R.

A saber, $S-S'\leqslant(M-m)\cdot p\cdot\Delta\cdot d,$

$$s'-s\leqslant(M-m)\cdot p\cdot\Delta\cdot d.$$

6°. *Las integrales de Darboux superior e inferior, $\overline{I}$ e $\underline{I}$, de la función $f(x, y)$ extendidas al rectángulo R son límites de las sumas superiores e inferiores, respectivamente, para $\Delta \to 0$* [1].

De las propiedades 1°—6° se deduce el siguiente teorema fundamental.

***Teorema 2.1.** Para que una función $f(x, y)$ acotada sobre el rectángulo R sea integrable en dicho rectángulo, es necesario y suficiente que con todo $\varepsilon > 0$ se encuentre tal partición T del rectángulo R, para la cual $S - s < \varepsilon$.*

Al igual que en el cap. 1, v. II, el teorema 2.1 permite, siendo analizado en conjunto con el teorema de continuidad uniforme de la función, indicar las clases más importantes de funciones integrables.

***Teorema 2.2.** Cualquier función $f(x, y)$ continua en el rectángulo R está integrable en dicho rectángulo.*

***Definición 1.** Llamemos figura elemental a un conjunto de puntos que representan una suma del número finito de rectángulos (cuyos lados son paralelos a los ejes Ox y Oy)* [2].

***Definición 2.** Diremos que una función $f(x, y)$ posee en el rectángulo R (en un dominio cerrado arbitrario D) la I-propiedad, si: 1) $f(x, y)$ está acotada en el rectángulo R (en el dominio D); 2) para todo $\varepsilon > 0$ existe una figura elemental que contiene todos los puntos y líneas de discontinuidad de la función $f(x, y)$ y que tiene área inferior a ε.*

***Teorema 2.3.** Si una función $f(x, y)$ posee en el rectángulo R la I-propiedad, será integrable en dicho rectángulo.*

La demostración de los teoremas 2.2 y 2.3 es completamente análoga a la que se usaba al demostrar los teoremas 1.3 y 1.4 del v. II.

3. Definición y existencia de la integral doble para un dominio arbitrario. En el p. 1, § 2, cap. 2, v. II se han introducido los conceptos *de cuadrabilidad* y *de área* de una figura plana Q. Estos conceptos se extienden sin cambios algunos al caso del conjunto acotado arbitrario Q de puntos del plano.

En todas las definiciones y afirmaciones del punto mencionado en lugar de la figura Q puede estudiarse el conjunto acotado arbitrario Q.

En el mismo punto se ha dado la definición de una curva (o de frontera de la figura) *del área cero*. Llamamos Γ *curva del área cero*, si para cualquier $\varepsilon > 0$ existe un polígono que contenga todos los puntos de Γ y que tenga área menor que ε.

---

[1]) El concepto de sumas superiores e inferiores se define sumamente igual que el de sumas integrales. A saber, el número $\overline{I}$ se llama *límite de las sumas superiores* S para $\Delta \to 0$, si con todo $\varepsilon > 0$ puede indicarse tal $\delta > 0$ que $|S - \overline{I}| < \varepsilon$, cuando $\Delta < \delta$.

[2]) Observemos que la suma de un número finito de rectángulos (completamente arbitrarios y con lados paralelos a los ejes Ox y Oy) es representable en forma de la suma, también de un número finito de rectángulos (cuyos lados son paralelos a los ejes mencionados) *privados de los puntos interiores comunes*. Por eso, en la Definición 1 pueden tomarse los rectángulos, tanto aquellos que tienen puntos interiores comunes, como también aquellos que no los tienen.

Notemos que en esta definición el término «polígono» se lo puede sustituir por el término «figura elemental». Esto se deduce de lo que toda figura elemental es un polígono, y cualquier polígono de área menor que el número ε está contenido dentro de la figura elemental cuya área es menor que el número 8ε [1].

Es fácil demostrar la siguiente *afirmación*.

Si Γ *es una curva del área cero y si el plano está cubierto con una red cuadrada de paso* h, *entonces, para todo* $\varepsilon > 0$ *existe un* $h > 0$ *tal que la suma de áreas de todos los cuadrados que tienen con* Γ *puntos comunes es inferior a* ε.

En efecto, para cualquier $\varepsilon > 0$ se puede fijar una figura elemental D que contiene Γ dentro de sí y que tiene área menor que $\varepsilon/4$. Nos resta señalar que si el paso h de la red cuadrada es suficientemente pequeño, todos los cuadrados que tienen con Γ puntos comunes están contenidos dentro de una figura elemental que se obtiene como resultado de sustituir cada rectángulo de Q por un rectángulo dos veces mayor con el mismo centro.

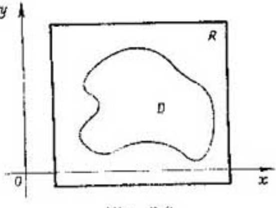


Fig. 2.3.

Subrayemos que la clase de curvas del área cero es bastante amplia. A esta clase pertenece, por ejemplo, cualquier curva rectificable (véase el teorema 2.3, v. II).

Pasemos, ahora, a la definición de integral doble para un dominio bidimensional arbitrario D.

Sea D un dominio acotado cerrado cuya frontera Γ es del área cero, y sea $f(x, y)$ una función arbitraria definida y acotada en el campo D.

Designemos con R cualquier rectángulo (con lados paralelos a los ejes coordenadas) que contenga el dominio D (fig. 2.3).

En el rectángulo R definamos la siguiente función:

$$F(x, y) = \begin{cases} f(x, y) & \text{en los puntos del dominio } D, \\ 0 & \text{en los demás puntos de } R \end{cases} \qquad (2.2)$$

[1] En efecto: 1) un polígono es igual a la suma finita de triángulos; 2) cada triángulo es igual a la suma (o diferencia) de dos triángulos rectangulares; 3) un triángulo rectangular está contenido en un rectángulo cuya área es dos veces mayor. 4) cualquier rectángulo es igual a la suma de un número finito de cuadrados y un rectángulo, en el que la relación de sus lados está encerrada entre 1 y 2, 5) cualquier cuadrado está contenido dentro de otro cuadrado cuyos lados son paralelos a los ejes Ox y Oy, y cuya área es dos veces mayor en comparar con la del cuadrado primero; 6) todo rectángulo con relación de los lados encerrada entre 1 y 2 puede ser completado hasta que se obtenga un cuadrado, razón por la cual está contenido dentro del cuadrado cuyos lados son paralelos a los ejes Ox y Oy, y cuya área es cuatro veces mayor que el área del rectángulo.

Definición. *Una función $f(x, y)$ se llamará integrable en el dominio D, si la función $F(x, y)$ es integrable dentro del rectángulo R.*

Llamemos en este caso el número $I = \iint\limits_R F(x, y)\,dx\,dy$ integral doble de la función $f(x, y)$, extendida al campo D, y designémosla con el símbolo

$$I = \iint\limits_D f(x, y)\,dx\,dy = \iint\limits_D f(M)\,d\sigma.$$

OBSERVACIÓN 1. De esta definición se deduce inmediatamente que la integral $\iint\limits_D 1 \cdot dx\,dy$ *es igual al área del dominio D*. Efectivamente, al someter el rectángulo correspondiente R a las particiones cada vez más menudas, llegaremos a que las sumas superiores de dichas particiones serán iguales a las áreas de las figuras elementales que contienen D, mientras que las sumas inferiores, a las áreas de las figuras elementales contenidas en el interior de D.

OBSERVACIÓN 2. *Supongamos que una función $f(x, y)$ es integrable en el campo cuadrable acotado D; el plano está cubierto con una red cuadrada de paso h; $C_1, C_2, \ldots, C_{n(h)}$ son cuadrados de la red citada íntegramente contenidos en el campo D; (ξ_k, η_k) es un punto arbitrario del cuadrado C_k; $m_k = \inf\limits_{C_k} f(x, y)$ $(k = 1, 2, \ldots, n(h))$.*

Entonces, cada una de las sumas

$$\sum_{k=1}^{n(h)} f(\xi_k, \eta_k) \cdot h^2, \quad \sum_{k=1}^{n(h)} m_k \cdot h^2$$

tiene límite para $h \to 0$, el cual is igual a $\iint\limits_D f(x, y)\,dx\,dy$.

Para demostrarlo, basta constatar que las sumas mencionadas se diferencian de la suma integral ordinaria (de la suma inferior, respectivamente) de la función $f(x, y)$ en el dominio D sólo por la ausencia de los sumandos referentes a los cuadrados que tienen puntos comunes con la frontera Γ del campo D, con la particularidad de que la suma de todos los sumandos ausentes es inferior en módulo al producto de la cota superior exacta M de la función $|f(x, y)|$ en el dominio D por el área S de la figura elemental compuesta por los cuadrados que tienen con Γ puntos comunes. De acuerdo con la afirmación demostrada más arriba, $S \to 0$ cuando $h \to 0$.

Con relación a la definición dada por nosotros surge, naturalmente, una pregunta de si depende el hecho de existencia de la integral doble y su valor I: 1) de la elección en el plano de los ejes

coordenados Ox y Oy; 2) de la elección del rectángulo R, en el cual se define la función $F(x, y)$.

En el punto siguiente se dará otra definición de la función integrable $f(x,y)$ y de la integral doble la cual no depende del modo de elegir los ejes coordenadas, ni tampoco de la elección del rectángulo R y se demostrará la equivalencia de esta definición con la aducida más arriba.

Por ahora enunciemos, entre tanto, el siguiente teorema *fundamental* que se desprende del teorema 2.3 y de la definición dada anteriormente.

Teorema 2.4. *Si una función $f(x, y)$ posee en el dominio D la I-propiedad, será integrable en D.*

DEMOSTRACION. La función $F(x, y)$, definida por la fórmula (2.2), poseerá, para tal función $f(x, y)$, la I-propiedad en el rectángulo R.

En efecto, la función $F(x, y)$ está acotada en el rectángulo R y todos los puntos y las líneas de discontinuidad de esta función o bien coinciden con las discontinuidades correspondientes de $f(x, y)$, o bien se disponen en la frontera Γ del dominio D. Por cuanto Γ tiene el área cero, el teorema queda demostrado.

Corolario 1. *Si una función $f(x, y)$ está acotada en el dominio D y tiene en dicho dominio discontinuidades sólo en un punto finito de líneas rectificables, entonces $f(x, y)$ es integrable en el dominio D*

Corolario 2. *Si $f(x, y)$ es integrable en el dominio D, y $g(x, y)$ es acotada y coincide con $f(x, y)$ en todo punto de D, a excepción del conjunto de puntos del área cero, entonces $g(x, y)$ también es integrable en el campo D.*

4. Definición de integral doble con ayuda de las particiones arbitrarias de un dominio. Más arriba hemos definido la integral doble, partiendo de las particiones de un dominio mediante líneas rectas en un número finito de rectángulos parciales. En este punto se enunciará otra definición de la integral doble que se fundamente en la partición del dominio D mediante cualesquiera curvas del área cero en un número finito de dominios parciales y se demostrará que esta definición es equivalente a la aducida anteriormente.

Sea D un dominio acotado cerrado con la frontera Γ del área cero. Dividamos el dominio D, mediante un número finito de curvas arbitrarias del área cero, en un número finito r de dominios parciales cerrados $D_1, D_2, \ldots, D_r$ (¡no forzosamente conexos!).

Indiquemos que cada dominio D_i es cuadrable, pues su frontera tiene el área cero (véase v. II, cap. 2, § 2) y denotemos con el símbolo ΔD_i el área del dominio D_i.

En cada campo parcial D_i elijamos arbitrariamente un punto $P_i(\xi_i, \eta_i)$.

Definición 1. *Un número*

$$\tilde{\sigma} = \sum_{i=1}^{r} f(P_i) \cdot \Delta D_i \tag{2.3}$$

se denomina suma integral de la función $f(x, y)$ correspondiente a la partición dada del dominio D en dominios parciales D_i y a la elección dada de los puntos intermedios P_i en los dominios parciales.

Llamemos *diámetro del dominio* D_i a la cota superior exacta de las distancias entre cualesquiera dos puntos de este dominio. Con el símbolo $\tilde{\lambda}$ se denotará el mayor de los diámetros de los dominios parciales $D_1, D_2, \ldots, D_r$.

Definición 2. *Un número I se llama límite de las sumas integrales (2.3) con $\tilde{\lambda} \to 0$, si para cualquier número positivo ε puede indicarse tal número positivo δ que con $\tilde{\lambda} < \delta$ en los dominios parciales D_i se verifique la desigualdad*

$$|\tilde{\sigma} - I| < \varepsilon,$$

independientemente de cómo se eligen los puntos P_i.

Definición 3 (definición general de integrabilidad). *Una función $f(x, y)$ se llama integrable (según Riemann) en el dominio D, si existe un límite finito I de las sumas integrales σ de esta función para $\tilde{\Delta} \to 0$. El límite citado I recibe el nombre de integral doble de la función $f(x, y)$ extendida al dominio D.*

Demostremos el siguiente teorema fundamental.

Teorema 2.5. *La enunciada definición general de integrabilidad es equivalente a la definición dada en el p. 3.*

DEMOSTRACIÓN. Es evidente que si una función $f(x, y)$ es integrable según la definición general de integrabilidad y su integral doble, de acuerdo con dicha definición, es igual a I, esta función será integrable también según la definición del p. 3, y tiene, según ésta última, la misma integral doble I.

Resta por demostrar que si la función $f(x, y)$ es integrable en el dominio D, según la definición del p. 3, e I es la integral doble de $f(x, y)$, extendida al dominio D, según la misma definición, para la función $f(x, y)$ existe un límite de las sumas integrales $\tilde{\sigma}$, cuando $\tilde{\Delta} \to 0$, el cual es igual a I.

Designemos con $\tilde{M}_i$ y $\tilde{m}_i$ las cotas exactas superior e inferior de la función $f(x, y)$ en un dominio parcial D_i e introduzcamos en el análisis las sumas superior e inferior

$$\tilde{S} = \sum_{i=1}^{r} \tilde{M}_i \cdot \Delta D_i \quad \text{y} \quad \tilde{s} = \sum_{i=1}^{r} \tilde{m}_i \cdot \Delta D_i.$$

Por cuanto para cualquier partición

$$\tilde{s} \leqslant \tilde{\sigma} \leqslant \tilde{S},$$

resulta suficiente demostrar que ambas sumas $\tilde{S}$ y $\tilde{s}$ tienden hacia I, cuando $\tilde{\lambda} \to 0$.

Se requiere demostrar que para todo $\varepsilon > 0$ existe un $\delta > 0$ tal que cada una de las sumas $\widetilde{S}$ y $\widetilde{s}$ quede desviada de I en una magnitud inferior a ε cada vez que $\widetilde{\Delta} < \delta$.

Fijamos un $\varepsilon > 0$ arbitrario. Para tal ε se encontrará una *partición* T del rectángulo R que contiene el dominio D en rectángulos parciales R_k de tal género que para ella

$$S - s < \frac{\varepsilon}{2}. \tag{2.4}$$

Designemos con M_0 la cota superior exacta $|f(x, y)|$ en el dominio D, y hagamos encerrar todos los segmentos de las curvas, que realizan la partición T, y la frontera Γ del dominio D *en el interior* de una figura elemental cuya área sea inferior al número $\varepsilon/4M_0$.

Entonces, existe a ciencia cierta una cota inferior exacta *positiva* δ de la distancia entre dos puntos, uno de los cuales pertenece a la frontera la citada figura elemental, y el otro, a los segmentos de las rectas que realizan la partición T, o bien a la frontera Γ del dominio D [1]).

Demostremos que para las sumas $\widetilde{S}$ y $\widetilde{s}$ de cualquier partición del dominio D que satisfaga la condición $\Delta < \delta$ se verifican las desigualdades

$$\widetilde{S} < S + \frac{\varepsilon}{2}. \tag{2.5}$$

$$s - \frac{\varepsilon}{2} < \widetilde{s}. \tag{2.6}$$

Limitémonos a la demostración de la desigualdad (2.5), pues la desigualdad (2.6) se demuestra del modo análogo.

Eliminemos en la suma $\widetilde{S}$ todos los sumandos $M_i \cdot \Delta D_i$, correspondientes a los dominios D_i, cada uno de los cuales *no se dispone íntegramente dentro de un solo rectángulo parcial de la partición* T. Todos los dominios D_i de esta índole pertenecen a la figura elemental mencionada más arriba, por lo cual la suma de áreas de tales campos es inferior al número $\varepsilon/4M_0$.

---

[1]) En efecto, examinemos dos conjuntos: 1) un conjunto $\{P\}$ de todos los puntos de la frontera de la figura elemental en consideración y 2) un conjunto $\{Q\}$ de todos los puntos en los segmentos de partición T y de la frontera Γ del dominio D. Ambos conjuntos, $\{P\}$ y $\{Q\}$ son acotados y *cerrados*. Supongamos que la cota inferior exacta δ de la distancia $\rho(P, Q)$ es igual a cero. Entonces, existen dos sucesiones de puntos $\{P_n\}$ y $\{Q_n\}$ tales que $\rho(P_n, Q_n) \to 0$. En las sucesiones mencionadas pueden elegirse, en virtud del teorema de Bolzano — Weierstrass, las subsucesiones convergentes $\{P_{k_n}\}$ y $\{Q_{k_n}\}$, cuyos límites P y Q pertenecen (por ser cerrados) a $\{P\}$ y $\{Q\}$, respectivamente. Mas, en este caso $\rho(P, Q) = 0$, es decir, los puntos P y Q coinciden, lo que no es posible, puesto que el conjunto $\{Q\}$ se dispone extrictamente dentro de la figura elemental y no tiene puntos comunes con $\{P\}$. La contradicción obtenida demuestra precisamente que δ es positivo.

Por consiguiente, la suma de todos los sumandos eliminados $\widetilde{M}_i \cdot \Delta D_i$ es inferior al número $\varepsilon/4$.

Así pues, con un error no superior a $\varepsilon/4$ se verifica la igualdad

$$\widetilde{S} = \sum{}' \widetilde{M}_i \cdot \Delta D_i, \tag{2.7}$$

donde la virgulilla es indicio de que la suma queda extendida sólo en los dominios D_i *dispuestos íntegramente en los rectángulos correspondientes de la partición* T.

Ahora, en el segundo miembro de (2.7) sustituyamos las cotas exactas $\widetilde{M}_i$ en los dominios D_i, contenidos en el rectángulo parcial R_k, por la cota superior exacta M_k del rectángulo R_k. En este caso obtendremos

$$\sum{}' \widetilde{M}_i \cdot \Delta D_i \leqslant \sum_k M_k \cdot \Delta \widetilde{R}_k, \tag{2.8}$$

donde $\Delta \widetilde{R}_k$ denota el área del dominio $\widetilde{R}_k$ que es igual a la suma de todos los dominios D_i íntegramente contenidos dentro del rectángulo R_k.

Todos los dominios $R_k - \widetilde{R}_k$ pertenecen a la figura elemental elegida más arriba. Por eso

$$\sum_k (\Delta R_k - \Delta \widetilde{R}_k) < \frac{\varepsilon}{4M_0},$$

y, por lo tanto,

$$\left| S - \sum_k M_k \cdot \Delta \widetilde{R}_k \right| = \left| \sum_k M_k (\Delta R_k - \Delta \widetilde{R}_k) \right| < \frac{\varepsilon}{4}.$$

De este modo, con un error no superior a $\varepsilon/4$ queda válida la igualdad

$$\sum_k M_k \cdot \Delta \widetilde{R}_k = S. \tag{2.9}$$

Al comparar las igualdades (2.7) y (2.9), válidas con un error no superior a $\varepsilon/4$, con la desigualdad (2.8), obtendremos la desigualdad (2.5).

Del modo análogo se demuestra la desigualdad (2.6).

De (2.5) y (2.6) obtenemos

$$s - \frac{\varepsilon}{2} < \widetilde{s} \leqslant \widetilde{S} < S + \frac{\varepsilon}{2}. \tag{2.10}$$

Por cuanto, en virtud de (2.4), cada una de las sumas s y S se desvía de I en una magnitud menor que $\varepsilon/2$, cada una de las sumas $\widetilde{s}$ y $\widetilde{S}$ se desvía, en virtud de (2.10), de I a una magnitud no superior a ε. El teorema está demostrado.

§ 2. Propiedades principales de la integral doble

Las propiedades de la integral doble (como también las deducciones de ellas) son bien análogas a las propiedades correspondientes de una integral definida simple. Por eso, limitémonos a la enunciación de estas propiedades.

1°. ADITIVIDAD. Si una función $f(x, y)$ es integrable en el dominio D y si el dominio D se parte, mediante la curva de área cero Γ, en dos dominios D_1 y D_2 que sean conexos y no tengan puntos interiores comunes, entonces, la función $f(x, y)$ será integrable en cada uno de los dominios D_1 y D_2, con la particularidad de que

$$\iint_D f(x, y)\,dx\,dy = \iint_{D_1} f(x, y)\,dx\,dy + \iint_{D_2} f(x, y)\,dx\,dy.$$

2°. PROPIEDAD LINEAL. Si las funciones $f(x, y)$ y $g(x, y)$ son integrables en el dominio D, y si α y β son cualesquiera números reales, entonces $[\alpha \cdot f(x, y) + \beta \cdot g(x, y)]$ será también integrable en el dominio D, con la particularidad de que

$$\iint_D [\alpha \cdot f(x, y) + \beta \cdot g(x, y)]\,dx\,dy =$$

$$= \alpha \iint_D f(x, y)\,dx\,dy + \beta \iint_D g(x, y)\,dx\,dy.$$

3°. Si las funciones $f(x, y)$ y $g(x, y)$ son integrables en el dominio D, el producto de estas funciones será también integrable en D.

4°. Si $f(x, y)$ y $g(x, y)$ son ambas integrables en el dominio D, y si en todo punto de este dominio $f(x, y) \leqslant g(x, y)$, entonces

$$\iint_D f(x, y)\,dx\,dy \leqslant \iint_D g(x, y)\,dx\,dy.$$

5°. Si $f(x, y)$ es integrable en el dominio D, la función $|f(x, y)|$ será también integrable en el dominio D, con la particularidad de que

$$\left| \iint_D f(x, y)\,dx\,dy \right| \leqslant \iint_D |f(x, y)|\,dx\,dy.$$

(Por supuesto, de la integrabilidad de $|f(x, y)|$ en D no se deduce integrabilidad en D de $f(x, y$.)

6°. TEOREMA DEL VALOR MEDIO. Si las funciones $f(x, y)$ y $g(x, y)$ son ambas integrables en el dominio D, y si la función $g(x, y)$ es no negativa (no positiva) en cada punto de este dominio, mientras que M y m representan las cotas exactas superior e inferior, respectivamente, de la función $f(x, y)$ en el dominio D, se encontrará un

número μ que satisface la desigualdad $m \leqslant \mu \leqslant M$, y que es de tal índole que queda válida la fórmula siguiente

$$\iint_D f(x, y)\, g(x, y)\, dx\, dy = \mu \iint_D g(x, y)\, dx\, dy. \qquad (2.11)$$

En particular, si la función $f(x, y)$ es continua en D, siendo D *conexo*, existe [1]) en este dominio un punto (ξ, η) tal que $\mu = f(\xi, \eta)$ y la fórmula (2.11) adquiere la forma

$$\iint_D f(x, y)\, g(x, y)\, dx\, dy = f(\xi, \eta) \iint_D g(x, y)\, dx\, dy.$$

7°. PROPIEDAD GEOMETRICA DE IMPORTANCIA $\iint_D 1 \cdot dx\, dy$ es igual al área del dominio D. (Según lo observado más arriba, esta propiedad se deduce inmediatamente de la definición de integrabilidad enunciada en el p. 3 § 1.)

§ 3. Reducción de la integral doble a la integral reiterada

La reducción de la integral doble a una integral simple reiterada que se expone en este párrafo representa uno de los métodos más efectivos para el cálculo de la integral doble.

1. Caso de un rectángulo.

Teorema 2.6. *Supongamos que para una función $f(x, y)$ existe en el rectángulo $R = [a \leqslant x \leqslant b] \times [c \leqslant y \leqslant d]$ una integral doble* $\iint_R f(x, y)\, dx\, dy$.

Admitamos también que para todo x del segmento $a \leqslant x \leqslant b$ existe la integral simple

$$I(x) = \int_c^d f(x, y)\, dy. \qquad (2.12)$$

Existe, entonces, una integral reiterada

$$\int_a^b I(x)\, dx = \int_a^b dx \int_c^d f(x, y)\, dy$$

y se verifica la igualdad

$$\iint_R f(x, y)\, dx\, dy = \int_a^b dx \int_c^d f(x, y)\, dy. \qquad (2.13)$$

[1]) En virtud del teorema 5.5 del v. II.

DEMOSTRACIÓN. Dividamos el rectángulo R, al igual que en el § 1, mediante unos puntos $a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_n = b$ y $c = y_0 < y_1 < y_2 < \ldots < y_p = d$ en $n \cdot p$ rectángulos parciales

$$R_{kl} = [x_{k-1} \leqslant x \leqslant x_k] \times [y_{l-1} \leqslant y \leqslant y_l]$$
$$(k = 1, 2, \ldots, n; \quad l = 1, 2, \ldots, p).$$

Pongamos $\Delta x_k = x_k - x_{k-1}$, $\Delta y_l = y_l - y_{l-1}$, y designemos con M_{kl} y m_{kl} las cotas exactas de la función $f(x, y)$ en el rectángulo parcial R_{kl}. Entonces, en cada punto del citado rectángulo tendremos

$$m_{kl} \leqslant f(x, y) \leqslant M_{kl}. \tag{2.14}$$

Al poner en esta desigualdad $x = \xi_k$, donde ξ_k es un punto arbitrario del segmento $[x_{k-1}, x_k]$, e integremos, a continuación, (2.14) respecto de y dentro de los límites desde y_{l-1} hasta y_l. Obtendremos

$$m_{kl} \cdot \Delta y_l \leqslant \int\limits_{y_{l-1}}^{y_l} f(\xi_k, y)\, dy \leqslant M_{kl} \cdot \Delta y_l. \tag{2.15}$$

Sumando (2.15) por todos los l de 1 a p, y haciendo uso de la designación (2.12), tendremos

$$\sum_{l=1}^{p} m_{kl} \cdot \Delta y_l \leqslant I(\xi_k) \leqslant \sum_{l=1}^{p} M_{kl} \cdot \Delta y_l. \tag{2.16}$$

Multipliquemos ahora (2.16) por Δx_k y sumemos por todos los k de 1 a n. Obtendremos

$$\sum_{k=1}^{n} \sum_{l=1}^{p} m_{kl}\, \Delta x_k\, \Delta y_l \leqslant \sum_{k=1}^{n} I(\xi_k) \cdot \Delta x_k \leqslant \sum_{k=1}^{n} \sum_{l=1}^{p} M_{kl} \cdot \Delta x_k \cdot \Delta y_l. \tag{2.17}$$

Hagamos tender hacia cero el diámetro mayor Δ de los rectángulos parciales. Entonces tenderá a cero también la máxima de las longitudes Δx_k. Los términos extremos en (2.17) que representan las sumas inferior y superior tienden en este caso a la integral doble $\iint\limits_R f(x, y)\, dx\, dy$.

Por consiguiente, existe también un límite para el término medio de (2.17), que es igual a la misma integral doble. Mas, este límite equivale, según la definición de integral simple, a

$$\int\limits_a^b I(x)\, dx = \int\limits_a^b dx \int\limits_c^d f(x, y)\, dy.$$

Con ello quedan demostradas la existencia de la integral reiterada y la igualdad (2.13). El teorema está demostrado.

OBSERVACION. En el teorema 2.6 se pueden cambiar de papeles x e y, es decir, se puede suponer la existencia de la integral doble y la existencia de una integral reiterada para cualquier y del segmento $c \leqslant y \leqslant d$.

$$K(y) = \int_a^b f(x, y)\, dx.$$

En este caso el teorema confirmará la existencia de la integral reiterada

$$\int_c^d K(y)\, dy = \int_c^d dy \int_a^b f(x, y)\, dx$$

y de la igualdad

$$\iint_R f(x, y)\, dx\, dy = \int_c^d dy \int_a^b f(x, y)\, dx. \tag{2.18}$$

2. Caso de un dominio arbitrario.

Teorema 2.7. *Supongamos cumplidas las siguientes condiciones: 1) el dominio D es acotado, cerrado y de tal índole que cualquier recta*

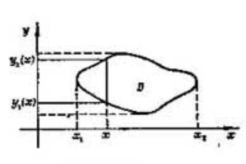


Fig. 2.4.

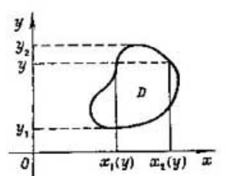


Fig. 2.5.

paralela al eje Oy corta la frontera de este dominio a lo sumo en dos puntos cuyas coordenadas son $y_1(x)$ e $y_2(x)$, donde $y_1(x) \leqslant y_2(x)$ (fig. 2.4); 2) *la función $f(x, y)$ admite la existencia de una integral doble*

$$\iint_D f(x, y)\, dx\, dy$$

y la existencia, para x cualquiera, de una integral simple

$$\int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x, y)\, dy.$$

En estas condiciones existe una integral reiterada

$$\int_{x_1}^{x_2} dx \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x, y)\, dy$$

(x_1 y x_2 *representan las abscisas mínima y máxima de los puntos del dominio* D) *y se verifica la igualdad*

$$\iint_D f(x, y)\, dx\, dy = \int_{x_1}^{x_2} dx \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x, y)\, dy. \qquad (2.19)$$

DEMOSTRACIÓN. Designemos con R un rectángulo con lados paralelos a los ejes coordenados que contienen el dominio D, y con $F(x, y)$, una función que coincida con $f(x,y)$ en los puntos del dominio D y que sea igual a cero en los puntos restantes de R. Para la función $F(x, y)$ se cumplen en el rectángulo R todas las condiciones del teorema 2.7, y, por consiguiente, es válida la fórmula (2.13) la cual (habida cuenta de que $F(x, y)$ es igual a cero fuera de D y coincide con $f(x, y)$ en D) se transforma en la fórmula (2.19). El teorema queda demostrado.

OBSERVACIÓN 1. En el teorema 2.7 se pueden cambiar de papeles x e y, es decir, podemos suponer que se cumplen las siguientes dos condiciones: 1) el dominio D es tal que cualquier recta paralela al

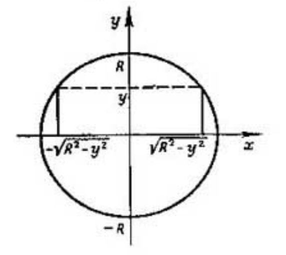


Fig. 2.6.

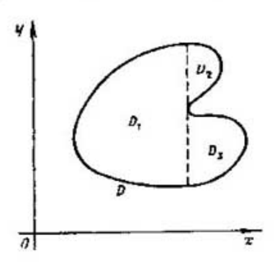


Fig. 2.7.

eje Ox corta la frontera de este dominio a lo sumo en dos puntos cuyas abscisas son $x_1(y)$ y $x_2(y)$, donde $x_1(y) \leqslant x_2(y)$ (fig. 2.5); 2) la función $f(x, y)$ admite la existencia de una integral doble extendida al dominio D y la existencia, para y cualquiera, de una integral simple

$$\int_{x_1(y)}^{x_2(y)} f(x, y)\, dx.$$

Si se cumplen estas condiciones, existe la integral reiterada

$$\int\limits_{y_1}^{y_2} dy \int\limits_{x_1(y)}^{x_2(y)} f(x, y)\, dx$$

(y_1 e y_2 son las ordenadas mínima y máxima de los puntos del campo D) y se verifica la igualdad

$$\iint\limits_D f(x, y)\, dx\, dy = \int\limits_{y_1}^{y_2} dy \int\limits_{x_1(y)}^{x_2(y)} f(x, y)\, dx. \qquad (2.19')$$

EJEMPLO. Sea D un círculo $x^2 + y^2 \leqslant R^2$ (fig. 2.6), y sea $f(x, y) = x^2 (R^2 - y^2)^{3/2}$. Cualquier recta paralela al eje Ox corta la frontera de D a lo sumo en dos puntos cuyas abscisas son $x_1 = -\sqrt{R^2 - y^2}$ y $x_2 = \sqrt{R^2 - y^2}$ (véase fig. 2.6). Por eso, aplicando la fórmula (2.19'), obtendremos

$$\iint\limits_D f(x, y)\, dx\, dy = \int\limits_{-R}^{R} dy \int\limits_{-\sqrt{R^2-y^2}}^{\sqrt{R^2-y^2}} x^2 (R^2 - y^2)^{3/2}\, dx =$$

$$= \int\limits_{-R}^{R} (R^2 - y^2)^{3/2} \left[\int\limits_{-\sqrt{R^2-y^2}}^{\sqrt{R^2-y^2}} x^2\, dx \right] dy =$$

$$= \frac{2}{3} \int\limits_{-R}^{R} (R^2 - y^2)^3\, dy = \frac{64}{105} R^7.$$

OBSERVACIÓN 2. Cuando el dominio D no satisface los requisitos del teorema 2.7 o de la Observación 1 al teorema citado, se logra frecuentemente dividir este dominio en la suma de un número finito de dominios de este tipo que no tienen puntos interiores comunes. Entonces, la integral extendida al campo D es igual, en virtud de la propiedad de aditividad (véase la propiedad 1 del § 2) a la suma de integrales extendidas a los dominios correspondientes. Así por ejemplo, el dominio D, expuesto en la fig. 2.7, se logra partirlo en una suma de tres dominios D_1, D_2 y D_3, a cada uno de los cuales puede aplicarse o bien el teorema 2.7, o bien la Observación 1.

§ 4. Integrales triples e integrales n-múltiples

La teoría expuesta de la integral doble se extiende sin complicaciones algunas o ideas nuevas al caso de la integral *triple* y, en general, de la integral *n-múltiple*. Detengámonos en las nociones principales de la teoría de integral n-múltiple.

Convengamos en considerar ante todo, que el volumen de un paralelepípedo rectangular n-dimensional es igual, por definición,

al producto de las longitudes de todas las aristas suyas que tienen por origen un mismo vértice.

Llamemos, además, *cuerpo elemental* a un conjunto de puntos de un espacio n-dimensional que representa la suma de un número finito de paralelepípedos rectangulares n-dimensionales que no tienen puntos interiores comunes, pero sí tienen aristas paralelas a los ejes coordenados.

El volumen de cualquier cuerpo elemental es conocido, siendo igual a la suma de volúmenes de los paralelepípedos que lo constituyen.

Ahora, sea D un dominio acotado arbitrario en el espacio euclídeo n-dimensional. Denominemos *volumen inferior* del dominio D a la cota superior exacta $\underline{V}$ de los volúmenes de todos los cuerpos elementales contenidos en $\bar{D}$, y *volumen superior* del dominio D, la cota inferior exacta $\overline{V}$ de los volúmenes de todos los cuerpos elementales que contienen un dominio T.

Es fácil convencerse de que $\underline{V} \leqslant \overline{V}$ [1]).

Un dominio D se llama *cubicable*, si $\underline{V} = \overline{V}$. En este caso el número $V = \underline{V} = \overline{V}$ lleva el nombre de *volumen n-dimensional* del dominio $\bar{D}$.

Por analogía completa con el caso de un dominio plano se demuestra la siguiente afirmación.

Para que un dominio n-dimensional D sea cubicable, es necesario y suficiente que con cualquier número positivo ε existan dos cuerpos elementales, uno de los cuales contenga D, y el otro, esté contenido en D, y que la diferencia entre los volúmenes de dichos cuerpos elementales en módulo sea menor que el número ε.

Se llama *superficie* (o *variedad*) *del volumen cero n-dimensional* a un conjunto cerrado, todos los puntos del cual pertenecen a un cuerpo elemental de volumen n-dimensional tan pequeño como se quiera.

Es evidente que un dominio n-dimensional D es cubicable, cuando y sólo cuando, la frontera de este campo representa una variedad del volumen cero n-dimensional.

Al principio la integral n-múltiple de una función de n variables $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ se define en el paralelepípedo rectangular n-dimensional R cuyas aristas son paralelas a los ejes coordenados.

Con este fin realizamos la partición de cada una de n aristas del paralelepípedo R en un número finito de segmentos parciales y de este modo obtenemos la partición T del paralelepípedo R en un número finito de paralelepípedos parciales n-dimensionales [2]).

---

[1]) La desigualdad $\underline{V} \leqslant \overline{V}$ se demuestra sumamente igual que la desigualdad $\underline{P} \leqslant \overline{P}$ en el p. 1, § 2, cap. 2, v. II.

[2]) Podemos decir que la partición T se realiza con ayuda de un número finito de hiperplanos $(n-1)$-dimensionales paralelos a los ejes coordenados.

Por analogía completa con el caso de $n = 2$, se definen, para la partición T, las sumas integrales superior e inferior de toda función acotada $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$.

La integral n-múltiple de la función $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, extendida al paralelepípedo R, se define como límite de las sumas integrales, cuando tiende a cero la longitud de la mayor de las diagonales de los paralelepípedos parciales n-dimensionales.

Igual que en el caso de $n = 2$, la teoría de Darboux establece en la siguiente forma la condición necesaria y suficiente de integrabididad: *para que una función f sea integrable en el paralelepípedo R, es necesario y suficiente que con cualquier $\varepsilon > 0$ exista una partición T del paralelepípedo R, para la cual la diferencia entre las sumas superior e inferior sea inferior a ε.*

Ahora se hace fácil definir la integral n-múltiple de una función f extendida a un dominio n-dimensional D, acotado, cerrado y arbitrariamente elegido, cuya frontera tiene volumen cero n-dimensional.

Esta integral se define como integral extendida al paralelepípedo rectangular n-dimensional R (con los lados paralelos a los ejes coordenados), que contiene el dominio D, de una función F la cual coincide con f dentro del dominio D y es igual a cero fuera de D.

Para designar la integral n-múltiple de una función $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ extendida al dominio D, resulta natural emplear el símbolo

$$\int\int \underset{D}{\cdots} \int f(x_1, x_2, \ldots, x_n)\, dx_1\, dx_2 \ldots dx_n. \tag{2.20}$$

No obstante, con el fin de reducir la notación denotaremos la integral (2.20), siempre que ello no causa incomprensiones algunas, con un símbolo breve

$$\int_D f(x)\, dx \tag{2.20'}$$

Si se emplea la notación (2.20'), por símbolo x conviene entender el punto $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ de un espacio E^n; por el símbolo dx, el producto $dx = dx_1 dx_2 \ldots dx_n$ [1]), y por el símbolo $\int_D$, la integral n-múltiple extendida al dominio D.

Sumamente igual al caso de $n = 2$ se demuestra la integrabilidad en el dominio n-dimensional D de cualquier función f que posee en el dominio D la *I-propiedad* (es decir, de una función acotada en el dominio D cuyos puntos de discontinuidad pertenecen a un cuerpo elemental de volumen n-dimensional tan pequeño como se quiera).

[1]) Este producto se llama, de ordinario, elemento del volumen en el espacio E^n.

En general, la variación de la función integrable f sobre el conjunto de puntos de un volumen cero n-dimensional no cambia el valor de la integral de dicha función.

Para el cálculo de una integral n-múltiple puede emplearse la partición del dominio D, mediante un número finito de variedades arbitrarias del volumen cero en un número finito de dominios parciales con forma arbitraria. Por analogía completa con el teorema 2.5 se demuestra que esta definición general de la integral n-múltiple es equivalente a la definición enunciada anteriormente.

Sumamente igual que en los teoremas 2.6 y 2.7, se deduce la *fórmula de integración reiterada* para la integral (2.20).

Supongamos que un dominio n-dimensional D_n *posee la propiedad de que cualquier recta paralela al eje* Ox_1 *corta la frontera del dominio a lo sumo en dos puntos cuyas proyecciones sobre el eje* Ox_1 *son*

$$a(x_2, x_3, \ldots, x_n) \quad \text{y} \quad b(x_2, x_3, \ldots, x_n),$$

donde $a(x_2, x_3, \ldots, x_n) \leqslant b(x_2, x_3, \ldots, x_n)$.

Supongamos, además, que la función $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ *admite la existencia de una integral n-múltiple*

$$\iint\limits_{D_n} \ldots \int f(x_1, x_2, \ldots, x_n)\, dx_1\, dx_2 \ldots dx_n$$

y la existencia, para cualesquiera $x_2, x_3, \ldots, x_n$, *de una integral simple*

$$\int\limits_{a(x_2, x_3, \ldots, x_n)}^{b(x_2, x_3, \ldots, x_n)} f(x_1, x_2, \ldots, x_n)\, dx_1.$$

Entonces, existe una integral (n-1)-múltiple

$$\iint\limits_{D_{n-1}} \ldots \int dx_2\, dx_3 \ldots dx_n \int\limits_{a(x_2, x_3, \ldots, x_n)}^{b(x_2, x_3, \ldots, x_n)} f(x_1, x_2, \ldots, x_n)\, dx_1,$$

extendida al dominio $(n-1)$*-dimensional* D_{n-1}, *que es proyección de* D_n *sobre el hiperplano coordenado* $Ox_2x_3 \ldots x_n$, *y queda válida la fórmula de integración reiterada*

$$\iint\limits_{D_n} \ldots \int f(x_1, x_2, \ldots, x_n)\, dx_1\, dx_2 \ldots dx_n =$$

$$= \iint\limits_{D_{n-1}} \ldots \int dx_2\, dx_3 \ldots dx_n \int\limits_{a(x_2, x_3, \ldots, x_n)}^{b(x_2, x_3, \ldots, x_n)} f(x_1, x_2, \ldots, x_n)\, dx_1. \tag{2.21}$$

Por supuesto, en la afirmación enunciada el papel de x_1 puede desempeñar cualquiera de las variables $x_2, x_3, \ldots, x_n$.

Convengamos en llamar *simple* un dominio D, si cada recta paralela a cualquier eje coordenado o bien corta la frontera de D a lo sumo en dos puntos o bien tiene en la frontera citada un segmento entero.

La fórmula de integración reiterada puede aplicarse en el caso de un dominio simple respecto de cualquiera de las variables $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

Como ejemplo de un dominio simple puede servir un paralelepípedo rectangular n-dimensional (cuyas aristas no son forzosamente paralelas a los ejes coordenados).

Notemos, como conclusión, que para una integral n-múltiple quedan válidas propiedades 1°—7° enunciadas en el § 2 para el caso de la integral doble.

En particular, $\int\int\limits_D \ldots \int 1 \cdot dx_1 dx_2 \ldots dx_n$ es igual al volumen n-dimensional $V(D)$ del dominio D.

Además, lo mismo que en el caso de $n = 2$, resulta válida la siguiente *afirmación*.

Supongamos que una función $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ es integrable en un dominio acotado cubicable D. Supongamos, además, que el espacio E^n está cubierto con una red de cubos n-dimensionales de arista h; $C_1, C_2, \ldots, C_{n(h)}$ son los cubos de la citada red que están contenidos íntegramente en D; $(\xi_1^{(k)}, \xi_2^{(k)}, \ldots, \xi_n^{(k)})$ es un punto arbitrario del cubo C_k; m_k es la cota inferior exacta de la función f en el cubo C_k $(k = 1, 2, \ldots, n(h))$. Entonces, las sumas

$$\sum_{k=1}^{n(h)} f(\xi_1^{(k)}, \xi_2^{(k)}, \ldots, \xi_n^{(k)}) \cdot h^n \quad y \quad \sum_{k=1}^{n(h)} m_k \cdot h^n$$

cuentan, para $h \to 0$, con un límite igual a $\int\int\limits_D \ldots \int f(x_1, x_2, \ldots, x_n)\, dx_1\, dx_2 \ldots dx_n$.

§ 5. Cambio de variables en una integral n-múltiple

El objetivo de este párrafo consiste en argumentar la fórmula de cambio de variables en la integral n-múltiple.

La fórmula a deducir será uno de los medios más importantes para el cálculo de la integral n-múltiple.

Supongamos que una función $f(y_1, y_2, \ldots, y_n)$ admite la existencia de la integral n-múltiple

$$\int\limits_D f(y)\, dy = \int\int\limits_D \ldots \int f(y_1, y_2, \ldots, y_n)\, dy_1\, dy_2 \ldots dy_n \quad (2.22)$$

extendida a cierto dominio acotado cerrado y cubicable D en el espacio de las variables $y_1, y_2, \ldots, y_n$. Supongamos, además, que de las variables $y_1, y_2, \ldots, y_n$ pasamos a las variables nuevas $x_1, x_2, \ldots, x_n$, es decir, realizamos una transformación

$$\left\{\begin{array}{l} y_1 = \psi_1(x_1, x_2, \ldots, x_n), \\ y_2 = \psi_2(x_1, x_2, \ldots, x_n), \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ y_n = \psi_n(x_1, x_2, \ldots, x_n). \end{array}\right. \tag{2.23}$$

Esta breve transformación (2.23) se denotará con el símbolo

$$y = \psi(x),$$

entendiendo por x e y los puntos del espacio n-dimensional $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $y = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$, y por símbolo ψ, totalidades de n funciones $\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_n$.

Denotemos con D' un dominio del espacio de variables $x_1, x_2, \ldots, x_n$, que, al realizarse la transformación (2.23), pasa a D, es decir, pongamos que $D = \psi(D')$ [1].

Demostremos que si las funciones (2.23) tienen en el dominio D' derivadas parciales continuas de primer orden y si el jacobiano

$$\frac{\mathscr{D}(y)}{\mathscr{D}(x)} = \frac{\mathscr{D}(y_1, y_2, \ldots, y_n)}{\mathscr{D}(x_1, x_2, \ldots, x_n)} \tag{2.24}$$

está distinto de cero en D', para la integral (2.22) se verifica la siguiente *fórmula de cambio de variables*

$$\int\limits_D f(y)\, dy = \int\limits_{D'} f[\psi(x)] \left| \frac{\mathscr{D}(y)}{\mathscr{D}(x)} \right| dx. \tag{2.25}$$

La notación detallada de la fórmula (2.25) tiene por expresión

$$\int\int \underset{D}{\ldots} \int f(y_1, y_2, \ldots, y_n)\, dy_1\, dy_2 \ldots dy_n =$$
$$= \int\int \underset{D'}{\ldots} \int f[\psi_1(x_1, \ldots, x_n), \ldots, \psi_n(x_1, \ldots$$
$$\ldots, x_n)] \left| \frac{\mathscr{D}(y_1, \ldots, y_n)}{\mathscr{D}(x_1, \ldots, x_n)} \right| dx_1 \ldots dx_n. \tag{2.25'}$$

Demostremos de este modo el siguiente teorema *fundamental*.

Teorema 2.8. *Si la transformación* (2.23) *convierte el dominio D' en D, siendo biunívoca, y si las funciones* (2.23) *tienen en el dominio D'*

---

[1] Suponemos que la transformación (2.23) admite lo inverso y que $D' = \psi^{-1}(D)$.

derivadas parciales continuas de primer orden y el jacobiano (2.24) [1], *distinto de cero, entonces, bajo la condición de existencia de la integral* (2.22) *se verifica la fórmula de cambio de variables* (2.25′).

La demostración del teorema 2.8 no es de ninguna manera elemental. La idea principal de la demostración aducida consiste en que al principio se da la argumentación de la fórmula (2.25) para el caso en que la transformación (2.23) es *lineal*, y sólo después se reduce a este caso la transformación general (2.23).

Para la comodidad, dividamos la demostración del teorema 2.8 en unas etapas diferentes.

DEMOSTRACIÓN DEL TEOREMA 2.8.

1°. **Lema 1.** *Si la transformación* $z = \psi(x)$ *es una superposición (o, como suele decirse, producto) de dos transformaciones,* $y = \psi_1(x)$ *y* $z = \psi_2(y)$, *el jacobiano* $\frac{\mathscr{D}(z)}{\mathscr{D}(x)}$, *tomado en cualquier punto* $\overset{0}{x} = (\overset{0}{x}_1, \overset{0}{x}_2, \ldots, \overset{0}{x}_n)$, *será igual al producto de jacobianos* $\frac{\mathscr{D}(y)}{\mathscr{D}(x)}$ *y* $\frac{\mathscr{D}(z)}{\mathscr{D}(y)}$, *tomados en los puntos* $\overset{0}{x} = (\overset{0}{x}_1, \overset{0}{x}_2, \ldots, \overset{0}{x}_n)$ *e* $\overset{0}{y} = (\overset{0}{y}_1, \overset{0}{y}_2, \ldots, \overset{0}{y}_n)$, *donde* $\overset{0}{y} = \psi_1(\overset{0}{x})$, *es decir,*

$$\frac{\mathscr{D}(z)}{\mathscr{D}(x)} = \frac{\mathscr{D}(z)}{\mathscr{D}(y)} \cdot \frac{\mathscr{D}(y)}{\mathscr{D}(x)}. \tag{2.26}$$

En la inscripción más detallada la fórmula (2.26) tiene por expresión

$$\frac{\mathscr{D}(z_1, z_2, \ldots, z_n)}{\mathscr{D}(x_1, x_2, \ldots, x_n)} = \frac{\mathscr{D}(z_1, z_2, \ldots, z_n)}{\mathscr{D}(y_1, y_2, \ldots, y_n)} \frac{\mathscr{D}(y_1, y_2, \ldots, y_n)}{\mathscr{D}(x_1, x_2, \ldots, x_n)}. \tag{2.26′}$$

DEMOSTRACIÓN DEL LEMA 1. Un elemento que se dispone en la intersección de la k-ésima fila y k-ésima columna del jacobiano $\frac{\mathscr{D}(z)}{\mathscr{D}(x)}$ es igual a $\frac{\partial z_i}{\partial x_k}$, con la particularidad de que la citada derivada parcial se toma en el punto x. Según la regla de diferenciación de una función compuesta (véase § 7, cap. 5, v. II) dicho elemento es

$$\frac{\partial z_i}{\partial x_k} = \sum_{l=1}^{n} \frac{\partial z_i}{\partial y_l} \cdot \frac{\partial y_l}{\partial x_k}, \tag{2.27}$$

[1]) Notemos que si se cumplen las condiciones del teorema 2.8, las ecuaciones (2.23) pueden ser resueltas respecto de $x_1, x_2, \ldots, x_n$, con la particularidad de que la transformación inversa $x = \psi^{-1}(y)$, obtenida en el proceso de resolución, tendrá, en el dominio D, debido al teorema 5.2, v. II, derivadas parciales continuas de primer orden y, además, el jacobiano $\frac{\mathscr{D}(x)}{\mathscr{D}(y)}$ distinto de cero.

con la particularidad de que todas las derivadas parciales en el segundo miembro de (2.27) se toman en el punto $\overset{0}{x}$, y todas las derivadas parciales $\frac{\partial z_i}{\partial y_l}$, en el punto correspondiente $\overset{0}{y} = \psi_1(\overset{0}{x})$.

De las igualdades (2.27) que son válidas para cualesquiera $i = 1, 2, \ldots, n$ y $k = 1, 2, \ldots n$, y del teorema sobre el determinante de un producto de dos matrices (véase la Publicación «Algebra lineal») se deduce directamente la fórmula (2.26).

El lema 1 está demostrado.

2°. Antes de formular el lema siguiente, recordemos la definición de *transformación lineal de las coordenadas.*

Se denomina transformación lineal a una transformación de la forma

$$\left\{\begin{array}{l} y_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n, \\ y_2 = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ y_n = a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n, \end{array}\right. \tag{2.28}$$

en la que a_{ik} ($i = 1, 2, \ldots, n$; $k = 1, 2, \ldots, n$) son unos números constantes.

La transformación lineal (2.28) se denotará brevemente por el símbolo $y = Tx$, entendiendo por x e y los puntos $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ e $y = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$ del espacio E^n, y por T, la matriz $T = \| a_{ik} \|$ ($i = 1, 2, \ldots, n$; $k = 1, 2, \ldots, n$).

La matriz T se llama, de ordinario, *matriz de la transformación lineal.*

Si el determinante de una matriz de transformación lineal $\det T$ es distinto de cero, la transformación lineal $y = Tx$ se llama *regular*. Para tal transformación podemos resolver las ecuaciones (2.28), en virtud del teorema de Cramer [1]), respecto de $x_1, x_2, \ldots, x_n$, y podemos afirmar la existencia de una transformación inversa $x = T^{-1}y$, la cual es también lineal y regular.

Observemos en adición que para la transformación lineal (2.28) el jacobiano $\frac{\mathcal{D}(y)}{\mathcal{D}(x)}$ coincide con el determinante de la matriz T de la citada transformación, es decir,

$$\frac{\mathcal{D}(y)}{\mathcal{D}(x)} = \det T. \tag{2.29}$$

El objetivo principal del punto presente y de los dos puntos siguientes consiste en demostrar que para una transformación regular lineal arbitraria (2.28) es válida la fórmula de cambio de variables (2.25). En virtud de la relación (2.29), basta demostrar que para

[1]) Véase el teorema de Cramer en la Publicación «Algebra lineal».

cualquier transformación regular lineal $y = Tx$ se verifica la fórmula

$$\int_D f(y)\,dy = \int_{T^{-1}D} f(Tx)\,|\det T|\,dx \tag{2.30}$$

(a condición de que existe la integral en el primer miembro de esta fórmula).

En este punto se demostrará que la fórmula (2.30) es válida para dos tipos especiales de las transformaciones lineales: 1) transformación lineal T_i^λ, la cual consiste en que la i-ésima coordenada se multiplica por un número real $\lambda \neq 0$, mientras que todas las demás coordenadas no cambian [1]), y 2) transformación lineal T_{ij}, la cual consiste en que a la i-ésima coordenada se le agrega la j-ésima coordenada, mientras que las coordenadas restantes, salvo la i-ésima, no cambian [2]).

Lema 2. *Si una función $f(y)$ es integrable en el dominio D, para cada una de las transformaciones T_i^λ y T_{ij} es válida la fórmula de cambio de variables* (2.30).

DEMOSTRACIÓN DEL LEMA 2. Designemos con R un paralelepípedo rectangular n-dimensional que contenga el dominio D, y con F, una función que es igual a f en D, y a cero, en $R - D$. Es suficiente probar que para cada una de las transformaciones T_i^λ y T_{ij} queda válida una fórmula

$$\int_R F(y)\,dy = \int_{T^{-1}R} F(Tx)\cdot|\det T|\,dx, \tag{2.31}$$

en la cual mediante T está designada una de las transformaciones, T_i^λ ó T_{ij}.

Un cálculo elemental muestra que

$$\det T_i^\lambda = \lambda, \ \det T_{ij} = 1. \tag{2.32}$$

Además, es obvio que si R es un paralelepípedo rectangular $a_k \leqslant y_k \leqslant b_k$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$, entonces $[T_i^\lambda]^{-1} R$ representa el paralelepípedo rectangular

$$\begin{cases} a_k \leqslant x_k \leqslant b_k \quad \text{para } k \neq i, \\ \dfrac{a_i}{\lambda} \leqslant x_i \leqslant \dfrac{b_i}{\lambda}. \end{cases} \tag{2.33}$$

---

[1]) En la forma simbólica esta transformación puede escribirse así:

$$(x_1, x_2, \ldots, x_n) \to (x_1, \ldots, x_{i-1}, \lambda x_i, x_{i+1}, \ldots, x_n).$$

[2]) En la forma simbólica esta transformación puede escribirse así:

$$(x_1, x_2, \ldots, x_n) \to (x_1, \ldots, x_{i-1}, x_i + x_j, x_{i+1}, \ldots, x_n).$$

mientras que $[T_{ij}]^{-1}R$ representa un dominio que es a ciencia cierta cubicable

$$\begin{cases} a_k \leqslant x_k \leqslant b_k & \text{para } k \neq i, \\ a_i - x_j \leqslant x_i \leqslant b_i - x_j. \end{cases} \tag{2.34}$$

Rigiéndonos por la fórmula de integración reiterada (2.21), tenemos

$$\int_R F(y)\,dy = \int_{a_1}^{b_1} \ldots \int_{a_{i-1}}^{b_{i-1}} \int_{a_{i+1}}^{b_{i+1}} \ldots \int_{a_n}^{b_n} dy_1 \ldots$$

$$\ldots dy_{i-1}\,dy_{i+1} \ldots dy_n \int_{a_i}^{b_i} F(y_1, \ldots, y_n)\,dy_i. \tag{2.35}$$

Aplicando a la integral simple respecto de la variable y_i la fórmula de cambio de la variable $y_i = \lambda x_i$ para el caso de la transformación T_i^λ, e $y_i = x_i + x_j$, en el caso de la transformación T_{ij} (véase § 7, cap. 1, v. II), obtendremos:

a) para el caso de la transformación T_i^λ

$$\int_{a_i}^{b_i} F(y_1, \ldots, y_n)\,dy_i =$$

$$= \begin{cases} \displaystyle\int_{a_i/\lambda}^{b_i/\lambda} F(y_1, \ldots, y_{i-1}, \lambda x_i, y_{i+1}, \ldots, y_n)\,\lambda\,dx_i, & \text{cuando } \lambda > 0, \\ \displaystyle\int_{b_i/\lambda}^{a_i/\lambda} F(y_1, \ldots, y_{i-1}, x_i, y_{i+1}, \ldots, y_n)(-\lambda)\,dx_i, & \text{cuando } \lambda < 0; \end{cases} \tag{2.36}$$

b) para el caso de la transformación T_{ij}

$$\int_{a_i}^{b_i} F(y_1, \ldots, y_n)\,dy_i =$$

$$= \int_{a_i - x_j}^{b_i - x_j} F(y_1, \ldots, y_{i-1}, x_i + x_j, y_{i+1}, \ldots, y_n)\,dx_i. \tag{2.37}$$

Introduciendo (2.36) en (2.35), aplicando una vez más la fórmula de integración reiterada (2.21) y teniendo presente la igualdad $y_k = x_k$ para $k \neq i$, la forma (2.33) del dominio $[T_i^\lambda]^{-1}R$ y la primera igualdad

de (2.32), obtendremos la fórmula (2.31) para el caso de la transformación T_i^λ.

Análogamente, introduciendo (2.37) en (2.35), aplicando la fórmula de integración reiterada y teniendo presente la igualdad $y_k = x_k$ para $k \neq i$, la forma (2.34) del dominio $[T_{ij}]^{-1}R$ y la segunda igualdad de (2.32), obtendremos la fórmula (2.31) para el caso de la transformación T_{ij}. El lema 2 queda demostrado.

3°. ***Lema 3.*** *Toda transformación regular lineal T puede ser representada en forma de una superposición de un número finito de transformaciones lineales del tipo T_i^λ y T_{ij}.*

DEMOSTRACIÓN DEL LEMA 3. Comprobemos, ante todo, que una transformación lineal T', la cual consiste en permutación de cualesquiera dos coordenadas, puede ser representada en forma de una superposición de seis transformaciones del tipo T_i^λ y T_{ij}. En efecto, supongamos que T' consiste en cambio de lugar de las coordenadas i-ésima y j-ésima (las demás coordenadas no varían en este caso). Entonces es fácil compobar que [1])

$$T' = T_i^{-1} T_{ij} T_j^{-1} T_{ij} T_i^{-1} T_{ij}. \qquad (2.38)$$

Indiquemos ahora que una transformación regular lineal, sumamente arbitraria, T puede ser reducida, mediante un número finito de permutaciones de dos filas y dos columnas, a la transformación lineal (2.28) con matriz $\| a_{ik} \|$, en la que son distintos de cero todos los así llamados *menores principales*, es decir, todos los determinantes

$$\Delta_k = \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1k} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{k1} & \dots & a_{kk} \end{vmatrix} \quad (k = 1, 2, \dots, n). \qquad (2.39)$$

Resta por demostrar que la última transformación lineal es representable en forma de una superposición de un número finito de transformaciones del tipo T_i^λ y T_{ij}.

Demostrémoslo por inducción.

Por cuanto $\Delta_1 = a_{11} \neq 0$, obtendremos mediante la transformación $T_1^{a_{11}} : (x_1, x_2, \dots, x_n) \to (a_{11}x_1, x_2, \dots, x_n)$.

Supongamos ahora que mediante una superposición de un número finito de transformaciones del tipo T_i^λ y T_{ij} hemos logrado de reducir la sucesión inicial de coordenadas $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ a la forma

$$(a_{11}x_1 + \dots + a_{1k}x_k, \dots, a_{k1}x_1 + \dots + a_{kk}x_k, \\ x_{k+1}, \dots, x_n). \qquad (2.40)$$

[1]) En efecto, al conservar en la notación sólo las coordenadas i-ésima y j-ésima, obtendremos, realizando una cadena de transformaciones (2.38): $(x_i, x_j) \to (x_i + x_j, x_j) \to (-x_i - x_j, x_j) \to (-x_i - x_j, -x_i) \to (-x_i - x_j, x_i) \to (-x_j, x_i) \to (x_j, x_i)$.

Para finalizar la inducción, basta demostrar que por medio de la superposición de un número finito de transformaciones del tipo T_i^λ y T_{ij} podemos reducir la sucesión de coordenadas (2.40) a la forma

$$(a_{11}x_1 + \ldots + a_{1(k+1)}x_{k+1}, \ldots, a_{k1}x_1 + \ldots + a_{k(k+1)}x_{k+1},$$
$$a_{(k+1)1}x_1 + \ldots + a_{(k+1)(k+1)}x_{k+1}, x_{k+2}, \ldots, x_n). \qquad (2.41)$$

Al principio realicemos sucesivamente para cada número i, para el cual es distinto de cero el elemento $a_{i(k+1)}$, un par de transformaciones $T_{i(k+1)}T_{k+1}^{a_{i(k+1)}}$ (no realizamos transformaciones correspondientes para aquellos i, para los cuales $a_{i(k+1)} = 0$. La superposición de todos los pares mencionados conduce la sucesión (2.40) a la forma

$$(a_{11}x_1 + \ldots + a_{1(k+1)}x_{k+1}, \ldots, a_{k1}x_1 + \ldots + a_{k(k+1)}x_{k+1},$$
$$x_{k+1}, x_{k+2}, \ldots, x_n). \qquad (2.42)$$

Luego digamos que por cuanto el menor (2.39) es distinto de cero, será distinto de cero también el determinante

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1k} & a_{1(k+1)} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{k1} & \ldots & a_{kk} & a_{k(k+1)} \\ 0 & \ldots & 0 & 1 \end{vmatrix} \qquad (2.43)$$

que es igual al menor. Pero, en este caso se encontrarán tales números reales $\lambda_1, \ldots, \lambda_k, \lambda_{k+1}$ que la combinación lineal de filas del determinante (2.43) con estos números será [1])

$$a_{(k+1)1}, \ldots, a_{(k+1)k}, a_{(k+1)(k+1)}. \qquad (2.44)$$

Esto quiere decir que si realizamos sucesivamente, para cada número $j = 1, 2, \ldots, k+1$, para el cual $\lambda_j \neq 0$, un par de transformaciones $T_{(k+1)j}\,T_j^{\lambda_j}$ (el par correspondiente de transformaciones, para aquellos j, para los cuales $\lambda_j = 0$, no realizamos), la superposición de todos los pares de transformaciones realizadas hará pasar la sucesión (2.42) en la (2.41). Con ello queda finalizada la inducción y el lema está demostrado.

4°. ***Lema 4.*** *Para una transformación regular lineal arbitraria* (2.28) *se verifica la fórmula de cambio de variables* (2.30), *siempre que existe la integral que figura en el primer miembro de* (2.30).

Para demostrar el lema 4, basta notar que la fórmula (2.30) es válida para cada una de las transformaciones del tipo T_i^λ y T_{ij} (lema 2) y que la transformación regular lineal arbitraria (2.28) puede ser representada en forma de una superposición de un número finito

[1]) Para demostrarlo, basta añadir a la matriz del detrerminante (2.43) la fila (2.44) y aplicar el teorema sobre el menor básico (véase «Algebra lineal», v. I)

de transformaciones del tipo T_i^λ y T_{ij} (lema 3), con la particularidad de que al realizarse la superposición de las transformaciones lineales tiene lugar multiplicación de los jacobianos correspondientes (lema 1).

Corolario del lema 4. *Si G es un dominio cubicable arbitrario en el espacio E^n y T, una transformación regular lineal arbitraria, entonces, el volumen n-dimensional $V(G)$ del dominio G y el volumen n-dimensional $V(TG)$ de la imagen TG de dicho dominio están entrelazados mediante una ecuación*

$$V(TG) = |\det T| \cdot V(G). \tag{2.45}$$

Para demostrar el corolario, basta poner en la igualdad (2.30) $f \equiv 1$, $D = TG$, y tomar en consideración que en este caso $T^{-1}D = G$.

5°. Pasemos ahora a la argumentación de la fórmula de cambio de variables (2.25) para una transformación sumamente arbitraria $y = \psi(x)$ que satisfaga las condiciones del teorema 2.8.

Conviene subrayar que si se cumplen las condiciones del teorema 2.8, existen ambas integrales que figuran en los miembros primero y segundo de (2.25), de modo que nos resta demostrar solamente la igualdad de dichas integrales.

Convengamos en designar con el símbolo $J_{ij}(x)$ los elementos de la matriz de Jacobi $\frac{\partial \psi_i}{\partial x_j}$ $(i = 1, 2, \ldots, n;\ j = 1, 2, \ldots, n)$ tomados en un punto $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$.

La propia matriz de Jacobi $\| J_{ij}(x) \|$ se denotará con el símbolo $J_\psi(x)$.

Resulta cómodo introducir el concepto de *norma de un punto* $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ y el de norma *de una matriz* $A = \| a_{ij} \|$ $(i = 1, 2, \ldots, n;\ j = 1, 2, \ldots, n)$.

Se llamará norma de un punto $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ a un número que se denota con el símbolo $\| x \|$ y que es igual a $\max\limits_{i=1,2,\ldots,n} |x_i|$.

Se llamará norma de una matriz $A = \| a_{ij} \|$ a un número denotado con el símbolo $\| A \|$ que es igual a

$$\max_{i=1,2,\ldots,n} \left[\sum_{j=1}^{n} |a_{ij}| \right].$$

Tendremos en cuenta que con tal definición de norma de un punto y de una matriz, de la igualdad $y = Ax$ se deduce que

$$\| y \| \leqslant \| A \| \cdot \| x \| \tag{2.46}$$

Además, es fácil comprobar que para la matriz unidad E se verifica la igualdad $\| E \| = 1$.

En este punto demostraremos el siguiente lema.

Lema 5. *Si se cumplen las condiciones del teorema* 2.8, *y si C es un cubo n-dimensional perteneciente al dominio D', los volúmenes n-dimensionales del cubo C y de su imagen $\psi(C)$ están ligados entre sí mediante la desigualdad*

$$V(\psi(C)) \leqslant \left| \max_{x\in C} \| J_\psi(x) \| \right|^n \cdot V(C) \qquad (2.47)$$

DEMOSTRACIÓN. Sea C un cubo n-dimensional con centro en el punto $\overset{0}{x} = (\overset{0}{x}_1, \overset{0}{x}_2, \ldots, \overset{0}{x}_n)$ y de arista $2s$. Entonces, el cubo C puede definirse por la desigualdad

$$\| x - \overset{0}{x} \| \leqslant s. \qquad (2.48)$$

En virtud de la fórmula de Taylor, para una función de n variables $\psi_i(x)$ existe (véase p. 3, § 5, cap. 5, v. II) un número θ_i del intervalo $0 < \theta_i < 1$ de tal índole que

$$\psi_i(x) - \psi_i(\overset{0}{x}) = \sum_{j=1}^{n} J_{ij}(\overset{0}{x} + \theta_i(x - \overset{0}{x}))(x_j - \overset{0}{x}_j).$$

De la última igualdad y de la relación (2.46) resulta que

$$\| \psi(x) - \psi(\overset{0}{x}) \| \leqslant \max_{x\in C} \| J_\psi(x) \| \cdot \| x - \overset{0}{x} \|. \qquad (2.49)$$

Poniendo $y = \psi(x)$, $\overset{0}{y} = \psi(\overset{0}{x})$, obtenemos de (2.49) y (2.48)

$$\| y - \overset{0}{y} \| \leqslant s \cdot \max_{x\in C} \| J_\psi(x) \|.$$

Así pues, *cuando el punto x cambia su posición dentro de los límites de un cubo n-dimensional C de arista $2s$, la imagen y del punto x no sale de los márgenes del cubo n-dimensional cuya arista es igual a* $2s \cdot \max_{x\in C} \| J_\psi(x) \|$.

De aquí se infiere inmediatamente la cubicabilidad de la imagen $\psi(G)$ de cualquier conjunto cubicable G[1]) (en particular, la cubicabilidad de $\psi(C)$) se deduce precisamente de la desigualdad (2.47). El lema 5 está demostrado.

6°. ***Lema 6.*** *Supongamos cumplidas las condiciones del teorema* 2.8, *siendo G un subconjunto cubicable arbitrario de D'. Entonces, para un volumen n-dimensional de la imagen $\psi(G)$ del conjunto G se veri-*

---

[1]) En efecto, la frontera de cualquier conjunto cubicable G es un conjunto del volumen cero n-dimensional, y, de acuerdo con lo demostrado anteriormente, tal conjunto se transforma en un conjunto cuyo volumen n-dimensional es también igual a cero.

fica la desigualdad [1]).

$$V(\psi(G)) \leqslant \int_G |\det J_\psi(x)|\, dx. \qquad (2.50)$$

DEMOSTRACIÓN DEL LEMA 6. Demostremos ante todo que para cualquier transformación regular lineal T y para todo cubo n-dimensional C contenido en D', se verifica la desigualdad

$$V(\psi(C)) \leqslant |\det T| \cdot \left|\max_{x\in C} \| T^{-1}J_\psi(x) \|\right|^n \cdot V(C). \qquad (2.51)$$

En virtud del corolario del lema 4, para cualquier conjunto cubicable G y para la transformación lineal T^{-1} es válida la igualdad

$$V(T^{-1}G) = |\det T^{-1}| \cdot V(G).$$

De este modo, si $G = \psi(C)$, resulta [2]):

$$V(\psi(C)) = |\det T| \cdot V(T^{-1}\psi(C)). \qquad (2.52)$$

Estimemos el segundo miembro de (2.52) mediante la desigualdad (2.47), tomando (2.47) no para transformar ψ, sino para superponer las transformaciones $T^{-1}\psi$. Obtendremos

$$V(\psi(C)) \leqslant |\det T| \cdot \left|\max_{x\in C} \| J_{T^{-1}\psi}(x) \|\right|^n \cdot V(C). \qquad (2.53)$$

Teniendo presente que la matriz de Jacobi de una transformación lineal coincide con la matriz de esta transformación, obtendremos, en virtud del lema 1:

$$T_{T^{-1}_\psi}(x) = T^{-1}J_\psi(x).$$

Mas, esto significa precisamente que la desigualdad (2.53) puede escribirse en la forma (2.51).

Con ello queda demostrada la desigualdad (2.51).

Ahora, para demostrar el lema 6, cubramos el espacio E^n con una red de cubos n-dimensionales de arista h, y supongamos que C_1, C_2, . . ., $C_{n(h)}$ son aquellos de los cubos que están contenidos íntegramente en G y que el símbolo G_h denota la suma de todos los cubos mencionados.

Al elegir en cada cubo C_i un punto arbitrario x_i, escribamos para él la desigualdad (2.51), suponiendo que $T = J_\psi(x_i)$. Obtendremos

$$V(\psi(C_i)) \leqslant |\det J_\psi(x_i)| \cdot \{\max_{x\in C_i} \| [J_\psi(x_i)]^{-1} J_\psi(x) \|\}^n \cdot V(C_i).$$

---

[1]) El mismo hecho de cubicabilidad de la imagen $\psi(G)$ se deduce de la afirmación demostrada en el lema antecedente.

[2]) Tomamos en consideración que en este caso $T\cdot T^{-1} = E$, de suerte que $\det T \cdot \det T^{-1} = 1$.

Sumando la última desigualdad respecto de todos los números de 1 a $n(h)$, obtendremos

$$V(\psi(G_h)) \leqslant \sum_{i=1}^{n(h)} |\det J_\psi(x_i)| \times$$
$$\times \{\max_{x\in C_i} \| [J_\psi(x_i)]^{-1} \cdot J_\psi(x) \|\}^n \cdot V(C_i). \tag{2.54}$$

Por cuanto los elementos de la matriz de Jacobi $J_\psi(x)$ son funciones continuas del punto x en todo el dominio D' y, con mayor razón, en G, y teniendo presente que el producto $[J_\psi(x)]^{-1} \cdot J_\psi(x)$ es una matriz unidad cuya norma es igual a uno, entonces

$$\lim_{h\to 0} \max_{x\in C_i} \| [J_\psi(x_i)]^{-1} \cdot J_\psi(x) \| = 1.$$

La afirmación enunciada al final del § 4 de este capítulo deja constancia de que el límite de todo el segundo miembro de (2.54), cuando $h \to 0$, existe y es igual a $\int\limits_G |\det J_\psi(x)|\, dx$.

De la misma afirmación proviene que $\lim\limits_{h\to 0} G_h = G$, de suerte que en el límite para $h \to 0$ obtendremos de (2.54) la desigualdad (2.50). El lema 6 queda demostrado.

7°. **Lema 7.** *Supongamos cumplidas todas las condiciones del teorema 2.8, y, además, se admite complementariamente que la función $f(y)$ es no negativa en el dominio D. Entonces será válida la fórmula de cambio de variables (2.23).*

DEMOSTRACIÓN. Cubramos el espacio E^n con una red de cubos n-dimensionales de arista h, y supongamos que $C_1, C_2, \ldots, C_{n(h)}$ son aquellos de los cubos que están contenidos íntegramente en el dominio D. Admitamos a continuación que $G_i = \psi^{-1}(C_i)$. Al escribir para cada dominio G_i la igualdad (2.50), tendremos

$$V(C_i) \leqslant \int\limits_{G_i} |\det J_\psi(x)|\, dx. \tag{2.55}$$

Sea, ahora, m_i la cota inferior exacta de la función $f(y)$ sobre el cubo C_i (o bien, que es lo mismo, la cota inferior exacta de la función $f[\psi(x)]$ en G_i). Multiplicando ambos miembros de (2.55) por m_i, y sumando respecto de todo i desde 1 hasta $n(h)$, tendremos

$$\sum_{i=1}^{n(h)} m_i V(C_i) \leqslant \sum_{i=1}^{n(h)} m_i \int\limits_{G_i} |\det J_\psi(x)|\, dx. \tag{2.56}$$

En vista de la afirmación enunciada al final del § 4 en este capítulo, el primer miembro de (2.56) tiene límite para $h \to 0$ que

es igual a $\int\limits_{D} f(y)\,dy$. Por cuanto la suma de todos los dominios G_i está contenida en D' [1]) y la función f es *no negativa*, el segundo miembro de (2.56) no es superior a la integral

$$\int\limits_{D'} f[\psi(x)]\cdot|\det J_{\psi}(x)|\,dx,$$

cualquiera que sea $h > 0$.

Así pues, en límite, para $h \to 0$, obtendremos de (2.56) una desigualdad

$$\int\limits_{D} f(y)\,dy \leqslant \int\limits_{D'} f[\psi(x)]\cdot|\det J_{\psi}(x)|\,dx. \qquad (2.57)$$

En los razonamientos aducidos podemos hacer que los dominios D y D' cambien de papel, y, en lugar de la función $f(y)$ en el dominio D examinar una función $g(x)\,f[\psi(x)]\cdot|\det J_{\psi}(x)|$ en el dominio D'. En este caso, haciendo uso del lema 1 y del teorema sobre el determinante del producto de dos matrices, obtendremos una desigualdad opuesta

$$\int\limits_{D'} f[\psi(x)]\cdot\det J_{\psi}(x)|\,dx \leqslant \int\limits_{D} f(y)\,dy. \qquad (2.58)$$

De (2.57) y (2.58) se deduce la fórmula de cambio de variables (2.25). El lema 7 está demostrado.

8°. Resta por finalizar la demostración del teorema 2.8, es decir, deshacerse de la exigencia adicional, impuesta en el lema 7, de que la función $f(y)$ sea no negativa.

Supongamos que $f(y)$ es una función sumamente arbitraria integrable en el dominio D, y el número M, la cota superior exacta de la función $|f(y)|$ en el campo D [2]).

En virtud del lema 7, para cada una de las funciones no negativas $f_1(y) \equiv M$ y $f_2(y) = M - f(y)$ es válida la fórmula de cambio de variables (2.25).

Mas, en este caso, de la propiedad lineal de la integral proviene que la fórmula (2.25) es también válida para la diferencia $f_1(y) - f_2(y) = f(y)$. El teorema 2.8 está completamente demostrado.

OBSERVACIÓN 1. En las condiciones del teorema 2.8 podemos asumir que el jacobiano (2.24) se reduce a cero sobre cierto conjunto

---

[1]) En virtud de lo que $\sum\limits_{i=1}^{n(h)} C_i$ está contenida en D, $D' = \psi^{-1}(D)$, $G_i = \psi^{-1}(C_i)$.

[2]) Recordemos que de la integrabilidad de $f(y)$ en el dominio D se desprende que $f(y)$ está acotada en D y que las cotas exactas existen

de puntos S que pertenece a D' y que tiene volumen cero n-dimensional. Efectivamente, el conjunto de puntos S se dispone en el interior de una figura elemental C de área tan pequeña como se quiera, con la particularidad de que, de conformidad con lo demostrado más arriba, es válida la fórmula

$$\int\limits_{\psi(D'-C)} f(y)\,dy = \int\limits_{D'-C} f[\psi(x)]\cdot|\det J_\psi(x)|\,dx. \qquad (2.59)$$

Al realizar en la fórmula (2.59) el paso límite respecto de la sucesión de figuras elementales $\{C_k\}$, cuyo volumen n-dimensional $V(C_k)$ tiende hacia cero, vemos que la fórmula (2.25) es válida también para el caso en consideración.

OBSERVACIÓN 2 Por cuanto la integral

$$I = \int\int\limits_D \ldots \int 1\,dy_1\,dy_2 \ldots dy_n \qquad (2.60)$$

es igual al volumen n-dimensional $V(D)$ del dominio D, resulta natural llamar la magnitud $dy_1dy_2 \ldots dy_n$ *elemento de volumen* en el sistema de coordenadas cartesiano $Oy_1y_2 \ldots y_n$ que se considera.

Con ayuda de la transformación (2.23) pasamos de las coordenadas cartesianas $y_1, y_2, \ldots, y_n$ a las coordenadas nuevas $x_1, x_2, \ldots, x_n$ que son, en general, curvilíneas. De acuerdo con la fórmula de cambio de variables (2.25), en el proceso de tal paso la integral (2.60) se transforma en la

$$I = \int\int\limits_D \ldots \int \left|\frac{\mathcal{D}(y_1, y_2, \ldots, y_n)}{(x_1, x_2, \ldots, x_n)}\right| dx_1\,dx_2 \ldots dx_n$$

razón por la cual la magnitud

$$\left|\frac{\mathcal{D}(y_1, y_2, \ldots, y_n)}{\mathcal{D}(x_1, x_2, \ldots, x_n)}\right| dx_1\,dx_2 \ldots dx_n$$

se denominará, naturalmente, *elemento de volumen* en el sistema curvilíneo de coordenadas $x_1x_2 \ldots x_n$.

Por consiguiente, el módulo del jacobiano caracteriza «extensión» (o «compresión») de un volumen, al pasar de las coordenadas cartesianas $y_1, y_2, \ldots, y_n$ a las curvilíneas $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

Calculemos el elemento de volumen en las coordenadas esféricas y en las cilíndricas.

1°. Para las coordenadas esféricas (en el espacio tridimensional)

$$\begin{cases} x = r\cos\varphi\,\mathrm{sen}\,\theta, \\ y = r\,\mathrm{sen}\,\varphi\,\mathrm{sen}\,\theta, \\ z = r\cos\theta \end{cases} \quad (r \geqslant 0,\ 0 \leqslant \theta \leqslant \pi,\ 0 \leqslant \varphi < 2\pi).$$

El jacobiano tiene por expresión

$$\frac{\mathcal{D}(x, y, z)}{\mathcal{D}(r, \varphi, \theta)} = \begin{vmatrix} \cos\varphi \operatorname{sen}\theta & -r\operatorname{sen}\varphi\operatorname{sen}\theta & r\cos\varphi\cos\theta \\ \operatorname{sen}\varphi\operatorname{sen}\theta & r\cos\varphi\operatorname{sen}\theta & r\operatorname{sen}\varphi\cos\theta \\ \cos\theta & 0 & -r\operatorname{sen}\theta \end{vmatrix} = r^2\operatorname{sen}\theta.$$

Por consiguiente, el elemento de volumen es igual a $r^2 \operatorname{sen}\theta\, dr\, d\theta d\varphi$.

2°. Para las coordenadas cilíndricas (en el espacio tridimensional)

$$\begin{cases} x = r\cos\varphi, \\ y = r\operatorname{sen}\varphi, \quad (r \geqslant 0,\ 0 \leqslant \varphi < 2\pi). \\ z = z \end{cases}$$

El jacobiano tiene por expresión

$$\frac{\mathcal{D}(x, y, z)}{\mathcal{D}(r, \varphi, z)} \begin{vmatrix} \cos\varphi & -r\operatorname{sen}\varphi & 0 \\ \operatorname{sen}\varphi & r\cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = r.$$

Por consiguiente, el elemento de volumen es igual a $r\,dr \times d\varphi\, dz$.

En particular, para las coordenadas polares en un plano el elemento de área es igual a $r\,dr\,d\varphi$.

3°. En un espacio n-dimensional las coordenadas polares se definen por las igualdades [1])

$$\begin{cases} x_1 = r\operatorname{sen}\theta_1\operatorname{sen}\theta_2 \ldots \operatorname{sen}\theta_{n-1}, \\ x_m = r\cos\theta_{m-1}\prod\limits_{h=m}^{n-1}\operatorname{sen}\theta_h \quad \text{para } m = 2, 3, \ldots, n-1, \\ x_n = r\cos\theta_{n-1}, \end{cases}$$

en las cuales el radio esférico r y los ángulos esféricos $\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_{n-1}$ varían dentro de los límites $r \geqslant 0$, $0 \leqslant \theta_1 < 2\pi$, $0 \leqslant \theta_m \leqslant \pi$ para $m = 2, 3, \ldots, n-1$.

Podemos convencernos de que en este caso el jacobiano tiene por expresión

$$\frac{\mathcal{D}(x_1, x_2, \ldots, x_n)}{\mathcal{D}(r, \theta_1, \ldots, \theta_{n-1})} = r^{n-1}\prod_{h=1}^{n-1}\operatorname{sen}^{h-1}\theta_h.$$

---

[1]) Las fórmulas inversas que expresan coordenadas esféricas n-dimensionales en términos de las cartesianas tienen por expresión

$$r = \sqrt{x_1^2 + \ldots + x_n^2},\ \operatorname{sen}\theta_m = \frac{r_m}{r_{m+1}}, \quad \cos\theta_m = \frac{x_{m+1}}{r_{m+1}},$$

donde $r_m = \sqrt{x_1^2 + \ldots + x_m^2}$, $m = 1, 2, \ldots, n-1$.

Así pues, el elemento de volumen en las coordenadas esféricas n-dimensionales es igual a $r^{n-1}\,dr \prod_{k=1}^{n-1} \operatorname{sen}^{k-1}\theta_k\, d\theta_k$.

EJEMPLOS 1. Calcúlese el volumen de un cuerpo limitado por una superficie

$$(x^2+y^2+z^2)^2=a^3z, \tag{2.61}$$

donde $a>0$.

El cuerpo es simétrico respecto de los planos coordenados Oyz y Oxz y está dispuesto por encima del plano Oxy. Por consiguiente, es suficiente calcular el volumen de la cuarta parte del cuerpo dispuesta en el primer octante.

Al pasar a las coordenadas esféricas, reduzcamos la ecuación (2.61) a una forma

$$r=a\sqrt[3]{\cos\theta}.$$

Por cuanto el primer octante se caracteriza mediante las desigualdades

$$0\leqslant\theta\leqslant\frac{\pi}{2},\quad 0\leqslant\varphi\leqslant\frac{\pi}{2},$$

entonces, tomando en consideración la expresión para un elemento de volumen en las coordenadas esféricas, llegamos a que el volumen buscado V es igual a

$$V=4\int_0^{\pi/2}d\varphi\int_0^{\pi/2}d\theta\int_0^{a\sqrt[3]{\cos\theta}}r^2\operatorname{sen}\theta\,dr.$$

De este modo

$$V=\frac{2\pi}{3}a^3\int_0^{\pi/2}\operatorname{sen}\theta\cos\theta\,d\theta=\frac{\pi a^3}{3}.$$

2. Calcúlese el área de una figura limitada por la curva

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=\frac{x}{h}+\frac{y}{k}, \tag{2.62}$$

donde $h>0$, $k>0$, $a>0$, $b>0$.

Con el fin de calcular esta área resulta cómodo pasar a las así llamadas *coordenadas polares generalizadas*

$$\begin{cases} x=ar\cos\varphi, \\ y=br\operatorname{sen}\varphi \end{cases}\quad(0\leqslant\varphi\leqslant2\pi),$$

La ecuación (2.62) toma la forma

$$r=\frac{a}{h}\cos\varphi+\frac{b}{k}\operatorname{sen}\varphi. \tag{2.63}$$

con la particularidad de que, por cuanto el primer miembro de (2.63) es no negativo, conviene tomar sólo aquellos valores de φ, para los cuales el segundo miembro de (2.63) es no negativo.

Al multiplicar y dividir el segundo miembro de (2.63) por $\sqrt{\frac{a^2}{h^2}+\frac{b^2}{k^2}}$, y al determinar φ_0 de las correlaciones

$$\operatorname{sen}\varphi_0=\frac{a/h}{\sqrt{\frac{a^2}{h^2}+\frac{b^2}{k^2}}}, \quad \cos\varphi_0=\frac{b/k}{\sqrt{\frac{a^2}{h^2}+\frac{b^2}{k^2}}},$$

reducimos (2.63) a la forma

$$r=\sqrt{\frac{a^2}{h^2}+\frac{b^2}{k^2}}\operatorname{sen}(\varphi+\varphi_0). \qquad (2.63')$$

Por ser no negativo el segundo miembro de (2.63′), hallamos que $0\leqslant\varphi+\varphi_0\leqslant\pi$, es decir, $-\varphi_0\leqslant\varphi\leqslant\pi-\varphi_0$. Teniendo en cuenta que el jacobiano $\frac{\mathscr{D}(x,\ y)}{\mathscr{D}(r,\ \varphi)}$ es igual a abr, obtenemos para el área buscada S la siguiente expresión:

$$S=\int_{-\varphi_0}^{\pi-\varphi_0}d\varphi\int_0^{\sqrt{\frac{a^2}{h^2}+\frac{b^2}{k^2}}\operatorname{sen}(\varphi+\varphi_0)}abr\,dr=$$

$$=\frac{ab}{2}\left(\frac{a^2}{h^2}+\frac{b^2}{k^2}\right)\int_{-\varphi_0}^{\pi-\varphi_0}\operatorname{sen}^2(\varphi+\varphi_0)\,d\varphi=\frac{ab\pi}{4}\left(\frac{a^2}{h^2}+\frac{b^2}{k^2}\right).$$

Observemos en conclusión que para el cálculo de toda una serie de áreas resulta ser cómoda la forma un tanto más general de las coordenadas polares generalizadas

$$\begin{cases} x=ar\cos^{\alpha}\varphi, \\ y=br\operatorname{sen}^{\alpha}\varphi. \end{cases}$$

Es fácil convencerse de que para estas coordenadas

$$\frac{\mathscr{D}(x,\ y)}{\mathscr{D}(r,\ \varphi)}=\alpha abr\cos^{\alpha-1}\varphi\operatorname{sen}^{\alpha-1}\varphi.$$

SOBRE EL CÁLCULO APROXIMADO DE LAS INTEGRALES n-MÚLTIPLES

Ocupémonos de la cuestión sobre el cálculo aproximado de una integral n-múltiple

$$\int\int_{G_n} \cdots \int f(x_1, x_2, \ldots, x_n)\, dx_1\, dx_2 \ldots dx_n \tag{2.64}$$

extendida a cierto dominio G_n en el espacio E^n, y convengamos en considerar al principio que dicho dominio representa un cubo n-dimensional.

Suponiendo que la integral (2.64) existe, analicemos la cuestión sobre los medios óptimos de la integración numérica.

La cuestión tiene dos aspectos: 1) construcción de las fórmulas de integración numérica que sean óptimas sobre *las clases dadas de funciones*; 2) construcción de las fórmulas de integración numérica que sean óptimas *para cada función concreta de la clase dada*.

Veamos cada uno de los citados aspectos.

1. Fórmulas de integración numérica óptimas para las clases de funciones. Sea G_n un cubo unidad n-dimensional $0 \leqslant x_k \leqslant 1$, $k = 1, 2, \ldots, n$.

Diremos que una función $f(x_1, \ldots, x_n)$ pertenece en el cubo G_n a *la clase* $D_n^\alpha(M)$ (a la clase $H_n^\alpha(M)$, respectivamente), siempre que bajo la condición de que existen todas las derivadas que vienen abajo quedan válidas las desigualdades

$$\left| \frac{\partial^\beta f}{\partial x_1^{\alpha_1} \ldots \partial x_n^{\alpha_n}} \right| \leqslant M,$$

donde

$$\beta = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \leqslant \alpha n, \quad \alpha_k \leqslant \alpha n$$

($\alpha_k \leqslant \alpha$, respectivamente).

Llamemos *fórmula de cubatura una* expresión de la forma

$$\int\int_{G_n} \cdots \int f(x_1, \ldots, x_n)\, dx_1 \ldots dx_n = l_N(f) + R_N(f, l_N) \tag{2.65}$$

en la cual

$$l_N(f) = \sum_{k=1}^{N} C_k f(x_1^{(k)}, \ldots, x_n^{(k)}).$$

Los puntos $(x_1^{(k)}, \ldots, x_n^{(k)})$ se denominan *nudos*; los números C_k, *pesos* de la fórmula de cubatura dada, y la magnitud $R_N(f, l_N)$, *error* de la fórmula de cubatura.

Nuestro objetivo es construir fórmulas de cubatura cuya estimación del error sea exacta en orden con relación a una magnitud pequeña $1/N$, donde N es el número de nudos de la fórmula de cubatura.

N.S. Bajválov [1] señaló que tanto sobre las clases $D_n^\alpha(M)$, como también sobre las clases $H_n^\alpha(M)$ no puede construirse la fórmula de cubatura (2.65) cuya estimación del error $R_N(f, l_N)$ fuera mejor que $C(\alpha, n)\cdot M\cdot N^{-\alpha}$, donde $C(\alpha, n)$ es una constante dependiente de α y n.

Sobre las clases $H_n^\alpha(M)$ la estimación mencionada se consigue (en orden con relación a $1/N$), si tomamos a título de l_N un producto de las fórmulas de cuadratura unidimensionales, exactas para los polinomios algebraicos de grado α_{n-1}.

Suponiendo que el número de nudos N es igual a $N = m^n$, donde m es entero, podemos poner

$$l_N = \sum_{k_1=1}^{m} \ldots \sum_{k_n=1}^{m} C_{k_1} \ldots C_{k_n} f(x_{k_1}, \ldots, x_{k_n}), \tag{2.66}$$

donde $\{x_{k_\nu}, C_{k_\nu}\}$, $\nu = 1, 2, \ldots, n$ son los nudos y pesos de la fórmula de cuadratura unidimensional que es exacta en los polinomios algebraicos [2].

Para el error de la fórmula de cubatura con l_N, definido por la igualdad (2.66) vale una estimación asintótica (es decir, válida para los valores de N suficientemente grandes)

$$R_N(f, l_N) \approx \frac{C_1(\alpha, n)M}{N^\alpha}, \tag{2.67}$$

en la cual $C_1(\alpha, n)$ es una constante dependiente de α y n.

Sobre las clases $H_n^\alpha(M)$ también existe una fórmula de cubatura, próxima en orden de la magnitud del error a la óptima. A título de tal fórmula interviene fórmula teórico-numérica de N. M. Kórobov [3],

$$l_N = \frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N} f\left[\tau_\alpha\left(\frac{ka_1}{N}\right), \ldots, \tau_\alpha\left(\frac{ka_n}{N}\right)\right]\tau'_\alpha\left(\frac{ka_1}{N}\right)\ldots\tau'_\alpha\left(\frac{ka_n}{N}\right), \tag{2.68}$$

donde $a_1, \ldots, a_n$ son unos números enteros, los así llamados *coeficientes óptimos en módulo de* N, y $\tau_\alpha(x)$ son ciertos polinomios especiales de grado $\alpha + 1$. Para el error de la fórmula de cubatura con l_N, definido por la igualdad (2.68), es válida la estimación

$$|R_N(f, l_N)| \leqslant \frac{C_2(\alpha, n)M}{N^\alpha}\ln^\beta N \tag{2.69}$$

($C_2(\alpha, n)$ y β son unas constantes dependientes sólo de α y n). La estimación (2.69) difiere de la estimación que no se mejora en orden solamente en el factor $\ln^\beta N$.

De este modo, en cada una de las clases $D_n^\alpha(M)$ y $H_n^\alpha(M)$ existen fórmulas de cubatura suficientemente buenas.

Al emplear prácticamente dichas fórmulas, hace falta tomar en consideración, por supuesto, sus méritos y deficiencias que se ponen de manifiesto en las situaciones concretas. Por ejemplo, conviene recordar que en el cálculo de las

[1] *N. S. Bajválov*. Sobre el cálculo aproximado de las integrales múltiples. Véstnik MGU, serie de matemática, física, astronomía, No 4 (1959), pp. 3—18.

[2] Como ejemplo de tales fórmulas pueden servir, la así llamada fórmula de Gauss o la de Newton — Cotes (véase, por ejemplo, "Métodos de cálculo" que se deben a I. S. Berezin y N. P. Zhidkov).

[3] *N. M. Kórobov*. Métodos teórico-numéricos en el análisis aproximado. Fizmatgiz. Moscú, 1963.

integrales con ayuda da la fórmula (2.66) el número de nudos N no es arbitrario, sino igual a m^n. Cuando $n = 10$ y la función $f(x_1, \ldots, x_n)$ se porta más o menos «igual» en todas las direcciones, el número mínimo razonable de nudos será $N = 2^{10} = 1024$. Si hay deseo aumentar la exactitud, el número de nudos puede ser igual a $N_1 = 3^{10} = 59\,049$, pero esto conduce al aumento del trabajo de cálculo casi en 60 veces.

Se debe también tener en cuenta que para un número de nudos N «pequeño» o «medio» el error de la fórmula de cubatura obtenida con ayuda de (2.66) puede fuertemente diferir del segundo miembro en (2.67) [1]).

Por otra parte, el empleo de la fórmula (2.66) es más ventajoso cuando se calculan grandes series de integrales, como también en el cálculo de las integrales de las funciones que contienen expresiones dependientes de un número menor de variables que n.

Las fórmulas de cubatura obtenidas con ayuda de (2.68) están libres de las deficiencias relacionadas con la elección del número de nudos N. Resulta más conveniente recurrir a dichas fórmulas para las funciones f que no son suficientemente suaves y para el gran valor del número de variables n (a partir de $n = 10$). Sin embargo, se debe tener en cuenta que para el error de la fórmula de cubatura obtenida con ayuda de (2.68) no es posible distinguir un término principal que sea semejante al término que figura en el segundo miembro de (2.67). Esta circunstancia dificulta tanto la posibilidad de estimar el error de cálculo, como también la pronosticación del número de nudos N que se requiere para asegurar la exactitud dada

2. Sobre las fórmulas de integración numérica, óptimas para cada función concreta. Indiquemos, ante todo, que la cuestión acerca de tales fórmulas es compleja y poco elaborada.

Empecemos por precisar el planteamiento del problema en consideración. Supongamos que una función dada $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ pertenece a cierta clase A_n y que viene dado un conjunto de métodos de integración numérica $\{p_N\}$ de dicha función f.

Buscaremos en este conjunto tal método de integración numérica p_N^*, cuyo error $R_N(f, p_N^*)$ represente la cota inferior exacta de los errores $R_N(f, p_N)$ sobre el conjunto $\{p_N\}$ de todos los medios de integración numérica de la función dada f.

Dicho de otro modo, buscamos la mejor fórmula de cubatura para la función dada concreta f, y no para toda la clase A_n, a la cual pertenece la función mencionada [2]).

Tomemos, a título de la clase A_n, un conjunto de funciones infinitamente diferenciables en cada punto del cubo básico G_n, salvo, quizás, cierta superficie S de dimensión $k < n$, donde dichas funciones pueden reducirse al infinito, como, por ejemplo $1/r_{xy}^{\gamma}$, donde r_{xy} es la distancia entre el punto $x = (x_1, \ldots, x_n)$ y un punto en la superficie $y = (y_1, \ldots, y_n)$, $\gamma < n - k - 1$.

El conjunto de métodos de integración numérica $\{p_N\}$ lo definamos del modo siguiente.

Para cada fórmula de cubatura σ_m, exacta en los polinomios algebraicos de grado $m-1$, definamos un elemento p_N del conjunto $\{p_N\}$ como una fórmula

---

[1]) Así, por ejemplo, al emplear para (2.66) la fórmula de cuadratura de Newton — Cotes, el segundo miembro en (2.67) es próximo al primer miembro a partir de $N = (\alpha_n)^n$ (por ejemplo, cuando $\alpha = 1$ y $n = 10$, a partir de $N = 10^{10}$), y al emplear para (2.66) la fórmula de Gauss, el segundo miembro en (2.67) es próximo al primero a partir de $N = (\alpha n/2)^n$ (es decir, cuando $\alpha = 1$ y $n = 10$, a partir de $N \approx 10^7$). De este modo, al construir las fórmulas de cubatura con l_N, definidas mediante la igualdad (2.66), la fórmula de Gauss es más preferible que la de Newton — Cotes.

[2]) Una fórmula que es mejor para la clase de funciones es, hablando en términos generales, mejor para la «peor» función de esta clase.

de cubatura que se obtiene partiendo el cubo básico G_n en los paralelepípedos rectangulares y empleando en cada uno de tales paralelepípedos la fórmula σ_m bajo la condición de que el número total de nudos en todo el cubo G_n sea igual a N.

Es natural esperar que los nudos de la fórmula de cubatura obtenida de esta manera sean distribuidos de un modo óptimo, a condición de que el error en cada paralelepípedo sea constante.

En el centro de cómputo de la Universidad estatal de Moscú M. Lomonosov están elaborados programas estándar para calcular integrales dobles y triples que realizan la partición automática de los dominios de integración. En la base de estos programas se ha puesto un par de fórmulas de cubatura σ_m y σ_{m_1} para $m_1 > m$.

Como estimación del error para la fórmula σ_m se ha elegido una magnitud $\rho = |\sigma_m - \sigma_{m_1}|$.

Si ε es la exactitud prefijada de los cálculos, entonces, cuando $\rho \leqslant \varepsilon$ (para todo el cubo básico), a título del valor aproximado de la integral se toma aquel que se determina mediante la fórmula σ_{m_1}, y cuando $\rho > \varepsilon$, el cubo se divide en 2^n partes, y para cada una de estas partes el proceso se repite desde el principio.

El método descrito proporciona buenos resultados para el cálculo de las integrales dobles y triples. No obstante, al aumentar el número de mediciones n, la aplicación de este método se enfrenta con dificultades esenciales relacionadas con lo que al crecer n, para m y m_1 fijos, σ_m y σ_{m_1} se hacen mucho más complejas, mientras que cuando disminuyen m y m_1, con el aumento de n crece fuertemente el número de particiones.

Diremos, para concluir, que al calcular una integral n-múltiple, extendida no al cubo n-dimensional G_n, sino a un dominio arbitrario en el espacio E^n, se debe realizar al principio una transformación que convierta dicho campo en un cubo n-dimensional. Además, existen fórmulas de cubatura para ciertos dominios de la forma especial (bola, esfera, etc.) [1].

3. **Ejemplo de cálculo aproximado de una integral múltiple.** Examinemos un problema de cálculo de una integral cuadrimúltiple

$$F(R, L, H) = \int_0^R r\,dr \int_0^L \rho\,d\rho \int_0^{2\pi} d\psi \int_0^{2\pi} [H + \rho^2 + r^2 - 2\rho r\cos(\varphi - \psi)]^{-3/2}\,d\varphi$$

con cierta exactitud ε para los siguientes valores de parámetros

$$R = 1;\ 1{,}25;\ 1{,}5;\ 1{,}75;\ 2;\ 2{,}25;\ 2{,}5;\ 2{,}75;\ 3;\ L = 0{,}8,\ H = 1.$$

Al realizar el cambio de variables que aplica el campo de integración en un cubo unidad, reduzcamos esta integral a la forma

$$F(R, L, H) = (2\pi)^2 \cdot R^2 \cdot L^2 \int_0^1\int_0^1\int_0^1\int_0^1 [H^2 + L^2\rho^2 + R^2r^2 -$$
$$-2RL\rho r\cos 2\pi(\varphi - \psi)]^{-3/2} r\rho\,d\rho\,dr\,d\psi\,d\varphi.$$

La función subintegral es suave. Por eso, para el cálculo de esta integral se emplea, naturalmente, la fórmula de cubatura que se basa en (2.66). Es natural también elegir la fórmula de Gauss (fórmula unidimensional que es exacta sobre los polinomios algebraicos) respecto de cada una de las variables r y ρ.

---

[1]) Por ejemplo, las fórmulas de cubatura sobre una esfera se estudiaban en las obras del matemático soviético S. L. Sóbolev y de sus discípulos.

mientras que respecto de las variables φ y ψ resulta mejor emplear la fórmula de los trapecios (véase v. II, cap. 3), pues la función subintegral es periódica con relación a cada una de estas variables, y para las funciones periódicas la fórmula de los trapecios ofrece los resultados mejores.

De este modo, obtendremos

$$F(R, L, H) = \left(\frac{2\pi RL}{m}\right)^2 \sum_{k_1=1}^{m_1} \sum_{k_2=1}^{m_2} \sum_{k_3=1}^{m_3} \sum_{k_4=1}^{m_4} C_{k_1} C_{k_2} x_{k_1} x_{k_2}$$

$$\times \left[H^2 + L^2 x_{k_2}^2 + R^2 x_{k_1}^2 - 2LR x_{k_1} x_{k_2} \cos 2\pi \frac{k_3 - k_4}{m}\right]^{-3/2}$$

(aquí, (x_{k_ν}, C_{k_ν}) son nudos y pesos de la correspondiente fórmula de cuadratura unidimensional.

Con el fin de elegir los valores de m, m_1 y m_2 que aseguren la exactitud requerida, se realizan cálculos de arreglo, aumentando sucesivamente el número de nudos y comparando los resultados obtenidos.

Capítulo 3

INTEGRALES IMPROPIAS

Los conceptos de integral definida (simple y múltiple) introducidos más arriba no son aptos para un campo infinito de integración o cuando la función subintegral no es acotada.

En este capítulo señalemos de qué modo podemos generalizar el concepto de integral y extenderlo a los dos casos mencionados.

§ 1. Integrales impropias de primera especie (caso unidimensional)

En este párrafo se generalizará el concepto de integral definida para un dominio de integración conexo *ilimitado* y unidimensional.

1. Concepto de integral impropia de primera especie. Los dominios ilimitados conexos y unidimensionales se representan por unas semirrectas $a \leqslant x < +\infty$, $-\infty < x \leqslant b$, y por la recta infinita $-\infty < x < +\infty$. Para concretar, veamos una semirrecta $a \leqslant x < +\infty$.

Siempre en este capítulo supondremos, si no se especifica lo contrario, que una función $f(x)$ está definida sobre la semirrecta $a \leqslant x < +\infty$. y para cualquier $R \geqslant a$ existe una integral definida $\int_a^R f(x)\,dx$, la cual se denotará con $F(R)$:

$$F(R) = \int_a^R f(x)\,dx. \tag{3.1}$$

Así pues, bajo nuestras suposiciones, sobre la recta $a \leqslant R < +\infty$ está dada la función $F(R)$ definida por la relación (3.1). Analicemos una cuestión sobre el valor límite de la función $F(R)$ cuando $R \to +\infty$, es decir, la cuestión de existencia de un límite

$$\lim_{R \to +\infty} \int_a^R f(x)\,dx. \tag{3.2}$$

Para la expresión (3.2) se usará la siguiente denotación:

$$\int_a^\infty f(x)\,dx. \tag{3.3}$$

El símbolo (3.3) se llamará en lo ulterior *integral impropia* de primera especie de la función $f(x)$ extendida a la semirrecta $a \leqslant x < +\infty$.

Si existe el límite (3.2), la integral impropia (3.3) se denomina *convergente*. En cambio, si dicho límite no existe, la integral impropia (3.3) se denomina *divergente*.

OBSERVACIÓN 1. Veamos una integral impropia (3.3). Si $b > a$ entonces, a la par con esta integral puede estudiarse también una integral $\int\limits_b^\infty f(x)\,dx$. Evidentemente, la convergencia de una de las integrales citadas predetermina la convergencia de la otra. En este caso tiene lugar la siguiente igualdad:

$$\int\limits_a^\infty f(x)\,dx = \int\limits_a^b f(x)\,dx + \int\limits_b^\infty f(x)\,dx.$$

Notemos que la divergencia de una de las integrales impropias mencionadas lleva consigo la divergencia de la otra.

OBSERVACIÓN 2. Si una integral impropia (3.3) es convergente, el valor del límite (3.2) se denota mediante el mismo símbolo (3.3). De este modo, si la integral (3.3) es convergente, se emplea la igualdad

$$\int\limits_a^\infty f(x)\,dx = \lim_{R \to +\infty} \int\limits_a^R f(x)\,dx.$$

OBSERVACIÓN 3. Por analogía con la integral impropia (3.3) se definen integrales impropias $\int\limits_{-\infty}^b f(x)\,dx$ y $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx$. La primera de ellas simboliza la operación del paso límite $\lim\limits_{R \to -\infty} \int\limits_R^b f(x)\,dx$, y la segunda, $\lim\limits_{\substack{R' \to -\infty \\ R'' \to +\infty}} \int\limits_{R'}^{R''} f(x)\,dx$.

EJEMPLO. Examinemos sobre una semirrecta $a \leqslant x < \infty$ $(a > 0)$ la función $f(x) = 1/x^p$, $p = \text{const}$. Esta función es integrable en cualquier segmento $a \leqslant x \leqslant R$, con la particularidad de que

$$\int\limits_a^R \frac{dx}{x^p} = \begin{cases} \left.\dfrac{x^{1-p}}{1-p}\right|_a^R = \dfrac{R^{1-p}-a^{1-p}}{1-p} & \text{para } p \neq 1, \\ \ln x\,\big|_a^R = \ln \dfrac{R}{a} & \text{para } p = 1. \end{cases}$$

Es evidente que cuando $p > 1$, el límite $\lim\limits_{R\to\infty} \int\limits_a^R \frac{dx}{x^p}$ existe y es igual a $\frac{a^{1-p}}{p-1}$, y, cuando $p \leqslant 1$, dicho límite no existe. Por consiguiente, la integral impropia $\int\limits_a^\infty \frac{dx}{x^p}$ es convergente para $p > 1$, y divergente, para $p \leqslant 1$. Notemos que, cuando $p > 1$,

$$\int\limits_a^\infty \frac{dx}{x^p} = \frac{a^{1-p}}{p-1}.$$

2. Criterio de Cauchy para la convergencia de una integral impropia de primera especie. Síntomas suficientes de convergencia. La cuestión de convergencia de una integral impropia de primera especie es equivalente a la de existencia del valor límite de la función $F(R) = \int\limits_a^R f(x)\,dx$ para $R \to +\infty$. Según se sabe [1]), para que exista el valor límite de la función $F(R)$, cuando $R \to \infty$, es necesario y suficiente que ella satisfaga la siguiente *condición de Cauchy*: para cualquier $\varepsilon > 0$ puede indicarse tal $A > 0$, que con cualesquiera R' y R'' superiores a A se verifica la desigualdad

$$|F(R'') - F(R')| = \left| \int\limits_{R'}^{R''} f(x)\,dx \right| < \varepsilon$$

Por consiguiente, será válida la siguiente *afirmación*.

Teorema 3.1 ***(criterio de Cauchy para la convergencia de una integral impropia).*** *Para que converja la integral impropia* (3.3), *es necesario y suficiente que para cualquier* $\varepsilon > 0$ *pueda indicarse un* $A > 0$ *tal que con cualesquiera* R' *y* R'' *superiores a* A *se verifique una desigualdad*

$$\left| \int\limits_{R'}^{R''} f(x)\,dx \right| < \varepsilon$$

OBSERVACION. Notemos que de la convergencia de una integral impropia no se desprende de ninguna manera que la función subintegral sea acotada. Por ejemplo, una integral $\int\limits_0^\infty f(x)\,dx$, donde la función

1) Véase, v. I, cap. 8, § 1.

es nula para x no enteros y es igual a n, cuando $x = n$ (número entero), es, evidentemente, convergente, aunque la función subintegral no es acotada.

Por cuanto el criterio de Cauchy es poco aceptable para las aplicaciones prácticas, conviene indicar diferentes síntomas suficientes de convergencia para las integrales impropias.

En adelante consideraremos que la función $f(x)$ está definida en una semirrecta $a \leqslant x < \infty$, y para todo $R \geqslant a$ existe la integral ordinaria $\int\limits_a^R f(x)\,dx$.

Demostremos el siguiente teorema.

Teorema 3.2 ***(síntoma general de comparación).*** *Sea en una semirrecta* $a \leqslant x < \infty$

$$|f(x)| \leqslant g(x). \tag{3.4}$$

Entonces, de la convergencia de la integral $\int\limits_a^\infty g(x)\,dx$ *se desprende la convergencia de la integral* $\int\limits_a^\infty f(x)\,dx$.

DEMOSTRACIÓN. Admitamos que la integral $\int\limits_a^\infty g(x)\,dx$ converge. Entonces, de acuerdo con el criterio de Cauchy (véase teorema 3.1), existe para todo $\varepsilon > 0$ tal $A > 0$ que con cualesquiera $R' > A$ y $R'' > A$ se cumple la desigualdad

$$\left|\int\limits_{R'}^{R''} g(x)\,dx\right| < \varepsilon. \tag{3.5}$$

De conformidad con las desigualdades conocidas para las integrales y con la desigualdad (3.4), tenemos

$$\left|\int\limits_{R'}^{R''} f(x)\,dx\right| \leqslant \int\limits_{R'}^{R''} |f(x)|\,dx \leqslant \int\limits_{R'}^{R''} g(x)\,dx.$$

De aquí y de la desigualdad (3.5) se deduce que para cualesquiera R' y R'' superiores a A, se verifica la desigualdad

$$\left|\int\limits_{R'}^{R''} f(x)\,dx\right| < \varepsilon.$$

Por consiguiente, la integral $\int\limits_0^\infty f(x)\,dx$ es convergente.

Teorema 3.3 (síntoma particular de comparación). *Supongamos que en una semirrecta $0 < a \leqslant x < \infty$ la función $f(x)$ satisface la relación*

$$|f(x)| \leqslant \frac{c}{x^p},$$

donde c y p son constantes, $p > 1$. Entonces, la integral $\int\limits_a^\infty f(x)\,dx$ converge. Si, en cambio, existe tal constante $c > 0$ que en la semirrecta $0 < a \leqslant x < \infty$ se verifica la correlación $f(x) \geqslant \frac{c}{x^p}$, donde $p \leqslant 1$, la integral $\int\limits_a^\infty f(x)\,dx$ será divergente.

La afirmación de este teorema se deduce del teorema 3.2 y del ejemplo examinado en el punto antecedente (basta hacer $g(x) = c/x^p$).

Corolario (síntoma particular de comparación en la forma límite). *Si para $p > 1$ existe un valor límite finito $\lim\limits_{x\to+\infty} |f(x)|\,x^p = c$, la integral $\int\limits_a^\infty f(x)\,dx$ será convergente. Si, en cambio, existe, para $p \leqslant 1$, un valor límite positivo $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)\,x^p = c > 0$, la integral $\int\limits_a^\infty f(x)\,dx$ será divergente.*

Cerciorémonos de que la primera parte del corolario es legítima. Con este fin constatamos que de la existencia del límite para $x \to +\infty$ se deduce el carácter acotado de la función $x^p\,|f(x)|$, es decir, con cierta constante $c_0 > 0$ se verifica la desigualdad

$$|f(x)| \leqslant c_0/x^p.$$

Después se aplica la primera parte del teorema 3.3. La validez de la segunda parte del corolario se deduce de los siguientes razonamientos. Por cuanto $c > 0$, se puede indicar un $\varepsilon > 0$ tan pequeño que $c - \varepsilon > 0$. A dicho ε le corresponde tal $A > 0$ que, cuando $x \geqslant A$, se cumple la desigualdad $c - \varepsilon < f(x)\,x^p$ (esta desigualdad proviene de la definición de límite). Por eso, $f(x) > \frac{c-\varepsilon}{x^p}$, y en este caso actúa la segunda parte del teorema 3.3.

3. Convergencia absoluta y convergencia condicional de las integrales impropias. Introduzcamos el concepto de convergencia

absoluta y convergencia *condicional* de las integrales impropias. Supongamos que $f(x)$ es integrable sobre cualquier segmento $[a, R]$ [1]).

Definición 2. *Una integral impropia* $\int_a^\infty f(x)\,dx$ *se llama condicionalmente convergente, si converge, en tanto que la integral* $\int_a^\infty |f(x)|\,dx$ *diverge.*

OBSERVACIÓN. Al poner en el teorema 3.2 $g(x) = |f(x)|$, llegamos a que la convergencia absoluta de la integral impropia predetermina su convergencia.

Notemos que los teoremas 3.2 y 3.3 permiten establecer sólo la convergencia absoluta de las integrales impropias que se analizan.

Demos a conocer un síntoma más de convergencia de las integrales impropias que es también apto para el caso de convergencia condicional.

Teorema 3.4 (síntoma de Dirichlet — Abel). *Supongamos que las funciones $f(x)$ y $g(x)$ están definidas sobre una semirrecta $a \leqslant x < \infty$. Admitamos, además, que la función $f(x)$ es continua en la semirrecta $a \leqslant x < \infty$ y tiene en ésta una primitiva acotada $F(x)$* [2]).

Supongamos también que la función $g(x)$ tiende a cero para $x \to +\infty$, sin crecer de un modo monótono en la semirrecta $a \leqslant x < \infty$, y tiene la derivada $g'(x)$ continua en la semirrecta $a \leqslant x < \infty$. En estas condiciones resulta ser convergente la integral impropia

$$\int_a^\infty f(x)\,g(x)\,dx. \tag{3.6}$$

DEMOSTRACIÓN. Hagamos uso del criterio de Cauchy para la convergencia de las integrales impropias. Preliminarmente integremos por partes la integral $\int_{R'}^{R''} f(x)\,g(x)\,dx$ sobre un segmento arbitrario $[R', R'']$, $R'' > R'$, de la semirrecta $a \leqslant x < \infty$. Obtendremos

$$\int_{R'}^{R''} f(x)\,g(x)\,dx = F(x)\,g(x)\Big|_{R'}^{R''} - \int_{R'}^{R''} F(x)\,g'(x)\,dx. \tag{3.7}$$

[1]) En este caso la función $|f(x)|$ es también integrable en cualquier segmento $[a, R]$.

[2]) Esto es indicio de que la primitiva $F(x)$, que puede definirse como $\int_a^x f(t)\,dt$, satisface para todo $x \geqslant a$ la desigualdad $|F(x)| \leqslant K$, donde K es una constante.

Por hipótesis del teorema, $F(x)$ es acotada: $|F(x)| \leqslant K$. Por cuanto $g(x)$ no es creciente y tiende a cero cuando $x \to +\infty$, entonces $g(x) \geqslant 0$, y $g'(x) \leqslant 0$. De este modo, estimando la relación (3.7), obtendremos la siguiente desigualdad

$$\left| \int_{R'}^{R''} f(x)\, g(x)\, dx \right| \leqslant K \{g(R') + g(R'')\} + K \int_{R'}^{R''} (-g'(x))\, dx$$

La integral en el segundo miembro de esta desigualdad es igual a $g(R') - g(R'')$, y, por eso, evidentemente,

$$\left| \int_{R'}^{R''} f(x)\, g(x)\, dx \right| \leqslant 2Kg(R'). \tag{3.8}$$

Con ayuda de esta desigualdad no es difícil dar por terminado la demostración del teorema. Sea ε un número positivo arbitrario. Ya que $g(x) \to 0$ para $x \to +\infty$, podemos elegir, según ε dado, tal A que para $R' \geqslant A$ se cumpla la desigualdad $g(R') < \varepsilon/2K$. De aquí y de la desigualdad (3.8) se deduce que para cualesquiera R' y R'' mayores que A se cumple la desigualdad

$$\left| \int_{R'}^{R''} f(x)\, g(x)\, dx \right| < \varepsilon,$$

la cual, de acuerdo con el criterio de Cauchy, asegura la convergencia de la integral (3.6). El teorema está demostrado

OBSERVACIÓN. La exigencia en el teorema 3.4 que la función $g(x)$ sea diferenciable es superflua. El teorema 3.4 puede ser demostrado bajo un solo supuesto de que $g(x)$ es monótona y tiende hacia cero cuando $x \to +\infty$, para lo cual se debe utilizar la segunda fórmula del valor medio (fórmula de Bonnet).

EJEMPLO 1. Veamos una integral

$$\int_{1}^{\infty} \frac{\operatorname{sen} x}{x^{\alpha}}\, dx, \quad \alpha > 0. \tag{3.9}$$

Suponiendo $f(x) = \operatorname{sen} x$, $g(x) = 1/x^{\alpha}$, resulta fácil convencerse de que para dicha integral se cumplen todas las condiciones del teorema 3.4. Por esta razón la integral (3.9) es convergente.

EJEMPLO 2. Veamos la integral de Fresnel [1] $\int_{0}^{\infty} \operatorname{sen} x^2\, dx$. Conforme a la Observación 1, p. 1 de este párrafo, la convergencia de una

[1] O. Fresnel (1788—1827), destacado físico francés.

de las integrales, $\int_0^\infty \operatorname{sen} x^2\,dx$ y $\int_1^\infty \operatorname{sen} x^2\,dx$, predetermina la convergencia de la otra. Por eso, recurrimos a la segunda de estas integrales. Tenemos

$$\int_1^\infty \operatorname{sen} x^2\,dx = \int_1^\infty x \operatorname{sen} x^2 \frac{1}{x}\,dx.$$

Suponiendo $f(x) = x \operatorname{sen} x^2$ y $g(x) = 1/x$, nos convencemos de que todas las condiciones del teorema 3.4 están cumplidas y, por esta razón, la integral de Fresnel es convergente.

4. Cambio de variables bajo el signo de una integral impropia y fórmula de integración por partes. En este punto enunciemos las condiciones, bajo las cuales actúan las fórmulas de cambio de variables y de integración por partes para las integrales impropias de primera especie. Examinemos, al principio, la cuestión de cambio de variables bajo el signo de integral impropia.

Supongamos cumplidas las siguientes condiciones:

1) *la función $f(x)$ es continua sobre el semieje $a \leqslant x < \infty$;*

2) *el semieje $a \leqslant x < \infty$ es un conjunto de valores de cierta función estrictamente monótona $x = g(t)$ que está definida en el semieje $\alpha \leqslant t < \infty$ (o bien en $-\infty < t \leqslant \alpha$) y que tiene en este semieje derivada continua;*

3) $g(\alpha) = a$.

En las condiciones citadas de la convergencia de una de las siguientes integrales impropias

$$\int_a^\infty f(x)\,dx \text{ y } \int_\alpha^\infty f(g(t))\,g'(t)\,dt \left(\text{o bien } -\int_{-\infty}^{\alpha} f(g(t))\,g'(t)\,dt\right) \quad (3.10)$$

proviene la convergencia de la otra y la igualdad entre las dos.

La afirmación formulada se establece con ayuda de los siguientes razonamientos.

Examinemos un segmento arbitrario $[a, R]$. A este segmento le corresponde, en virtud de la monotonía estricta de la función $g(t)$, el segmento $[\alpha, \rho]$ (o $[\rho, \alpha]$) del eje t tal que, al variar t sobre el segmento $[\alpha, \rho]$, los valores de la función $x = g(t)$ llenan el segmento $[a, R]$, con la particularidad de que $g(\rho) = R$. De este modo, para los segmentos mencionados quedan cumplidas todas las condiciones del p. 3, § 7, cap. 1, v. II de este curso, para las cuales es vigente la fórmula de cambio de variables bajo el signo de la integral definida. Por eso, tiene lugar la igualdad

$$\int_a^R f(x)\,dx = \int_\alpha^\rho f(g(t))\,g'(t)\,dt \left(\text{o bien} = -\int_\rho^\alpha f(g(t))\,g'(t)\,dt\right). \quad (3.11)$$

Por ser la función $x = g(t)$ estrictamente monótona, $R \to \infty$ cuando $\rho \to \infty$, y, viceversa, $\rho \to \infty$ cuando $R \to \infty$ (o bien $R \to \infty$ cuando $\rho \to -\infty$, y $\rho \to -\infty$ cuando $R \to \infty$). Por eso, de la fórmula (3.11) se deduce la validez de la afirmación enunciada más arriba.

Pasemos, ahora, a la cuestión de integración por partes de las integrales impropias de primera especie.

Demostremos la siguiente afirmación

Supongamos que las funciones $u(x)$ y $v(x)$ tienen derivadas continuas en una semirrecta $a \leqslant x < \infty$, y, además, existe un valor límite

$$\lim_{x \to \infty} u(x) v(x) = A.$$

En las condiciones citadas, de la convergencia de una de las integrales

$$\int_a^\infty u(x) v'(x)\, dx \quad y \quad \int_a^\infty v(x) u'(x)\, dx \tag{3.12}$$

proviene la convergencia de la otra. Es válida también la fórmula

$$\int_a^\infty u(x) v'(x)\, dx = A - u(a) v(a) - \int_a^\infty v(x) u'(x)\, dx. \tag{3.13}$$

Con miras a demostrar la afirmación enunciada, analicemos un segmento arbitrario $[a, R]$. En dicho segmento es válida la fórmula corriente de integración por partes. Por eso,

$$\int_a^R u(x) v'(x)\, dx = [u(x) v(x)]_a^R - \int_a^R v(x) u'(x)\, dx.$$

La expresión $[u(x) v(x)]_a^R$ tiende hacia $A - u(a) v(a)$, cuando $R \to \infty$, razón por la cual de la última igualdad proviene la convergencia simultánea o divergencia simultánea de las integrales (3.12), como también la validez de la fórmula (3.13) en el caso en que una de las integrales (3.12) converja.

§ 2. Integrales impropias de segunda especie (caso unidimensional)

En este párrafo se generaliza el concepto de integral definida para el caso de las funciones ilimitadas.

1. Concepto de integral impropia de segunda especie. Criterio de Cauchy. Supongamos que en un semisegmento $[a, b)$ viene dada una función $f(x)$. Un punto b se llama *singular*, si la función no es acotada sobre el semisegmento $[a, b]$, pero sí acotada en cualquier

segmento $[a, b-\alpha]$ encerrado dentro del semisegmento $[a, b)$. Supongamos también que en cualquier segmento de este tipo la función $f(x)$ es integrable.

Siendo vigentes nuestras suposiciones, sobre el semisegmento $(0, b-a)$ está dada una función del argumento α, definida por la correlación

$$F(\alpha)=\int_a^{b-\alpha} f(x)\,dx.$$

Estudiemos la cuestión sobre el valor límite derecho de la función $F(\alpha)$ en un punto $\alpha=0$, es decir, la cuestión de existencia de límite

$$\lim_{\alpha\to+0}\int_a^{b-\alpha} f(x)\,dx. \tag{3.14}$$

Emplearemos para la expresión (3.14) la designación

$$\int_a^b f(x)\,dx. \tag{3.15}$$

En adelante el símbolo (3.15) se denominará *integral impropia de segunda especie* de la función $f(x)$ extendida al semisegmento $[a, b)$. Si existe el límite (3.14), la integral impropia (3.15) se llama *convergente*. Si, en cambio, dicho límite no existe, la integral impropia se llama *divergente*. Si la integral impropia (3.15) converge, la magnitud del límite (3.14) se denota con el mismo símbolo (3.15). De este modo, si converge la integral (3.15), se emplea la igualdad

$$\int_a^b f(x)\,dx=\lim_{\alpha\to+0}\int_a^{b-\alpha} f(x)\,dx.$$

OBSERVACIÓN. El concepto de integral impropia de segunda especie se extiende con facilidad al caso en que la función $f(x)$ tiene un número finito de puntos singulares.

EJEMPLO. Veamos sobre el segmento $[a, b)$ una función $1/(b-x)^p$, $p>0$. Está claro que el punto b es singular para dicha función. Además, obviamente, esta función es integrable en cualquier segmento $[a, b-\alpha]$, con la particularidad de que

$$\int_a^{b-\alpha}\frac{dx}{(b-x)^p}=\begin{cases} -\dfrac{(b-x)^{1-p}}{1-p}\Bigg|_a^{b-\alpha}=\dfrac{(b-a)^{1-p}-\alpha^{1-p}}{1-p} & \text{para } p\neq 1,\\ -\ln(b-x)\Big|_a^{b-\alpha}=\ln\dfrac{b-a}{\alpha} & \text{para } p=1.\end{cases}$$

Es evidente que el límite $\lim\limits_{\alpha\to+0}\int\limits_a^{b-\alpha}\frac{dx}{(b-x)^p}$ existe y es igual a $\frac{(b-a)^{1-p}}{1-p}$ cuando $p<1$, y no existe, cuando $p\geqslant1$. Por consiguiente, la integral impropia en consideración converge cuando $p<1$, y diverge, cuando $p\geqslant1$.

Formulemos el criterio de Cauchy para la convergencia de una integral impropia de segunda especie. Supondremos en este caso que la función $f(x)$ está definida sobre un semisegmento $[a, b)$, y que b es un punto singular.

Teorema 3.5 (criterio de Cauchy). *Para que converja la integral impropia de segunda especie* (3.15), *es necesario y suficiente que, para todo* $\varepsilon>0$, *pueda indicarse un* $\delta>0$ *tal que para cualesquiera* α' y α'' *que satisfagan la condición* $0<\alpha''<\alpha'<\delta$ *se cumpla una desigualdad*

$$\left|\int\limits_{b-\alpha'}^{b-\alpha''}f(x)\,dx\right|<\varepsilon.$$

La validez de este teorema se deduce de lo que el concepto de convergencia de una integral es equivalente por su definición al concepto de existencia del valor límite de la función $F(\alpha)$ introducido al comienzo de este punto.

2. Observaciones finales. No somos propensos a desarrollar detalladamente la teoría de integrales impropias de segunda especie. Ello se debe a que los teoremas y deducciones principales del párrafo antecedente se extienden sin dificultades algunas al caso de las integrales de segunda especie. Por eso, limitémonos a ciertas observaciones.

1°. Impuestas ciertas restricciones en las funciones subintegrales, las integrales de segunda especie se reducen a las de primera especie. A saber, supongamos que una función $f(x)$ es continua sobre el semisegmento $[a, b)$ y que b es un punto singular de esta función. Bajo estas condiciones en la integral $\int\limits_a^{b-\alpha}f(x)\,dx$ podemos realizar el siguiente cambio de variables:

$$x=b-\frac{1}{t},\quad dx=\frac{dt}{t^2},\quad \frac{1}{b-a}\leqslant t\leqslant\frac{1}{\alpha}.$$

Como resultado de este cambio de variables, obtendremos la igualdad

$$\int\limits_a^{b-\alpha}f(x)\,dx=\int\limits_{1/(b-a)}^{1/\alpha}f\left(b-\frac{1}{t}\right)\frac{1}{t^2}\,dt.\tag{3.16}$$

Sea convergente la integral $\int_a^b f(x)\,dx$. Esto quiere decir que existe el límite $\lim\limits_{\alpha\to+0}\int_a^{b-\alpha} f(x)\,dx$. Volviendo a la igualdad (3.16), vemos que existe también un límite, para $1/\alpha\to+\infty$, de la expresión que figura en el segundo miembro de (3.16). Quedan pues demostrados la convergencia de la integral impropia de segunda especie

$$\int_{1/(b-a)}^{\infty} f\left(b-\frac{1}{t}\right)\frac{1}{t^2}\,dt,$$

como también el hecho de que esta integral es igual a la integral $\int_a^b f(x)\,dx$. Evidentemente, la convergencia de la integral impropia de segunda especie que acabamos de citar predetermina la convergencia de la integral $\int_a^b f(x)\,dx$, y, además, la igualdad entre ellas. Así pues, *de la convergencia de una de las integrales*

$$\int_a^b f(x)\,dx \quad y \quad \int_{1/(b-a)}^{\infty} f\left(b-\frac{1}{t}\right)\frac{1}{t^2}\,dt$$

se deduce la convergencia de la otra, y, además, la igualdad entre ellas.

2°. Para las integrales impropias de segunda especie se demuestran con facilidad las afirmaciones análogas a las del p. 2 en el párrafo antecedente que pueden reunirse bajo el nombre general de «síntomas de comparación». Notemos que en todas las formulaciones la función $f(x)$ se estudia sobre un semisegmento $[a, b)$, donde b es un punto singular de la función.

El síntoma particular de comparación tendrá la siguiente forma.

Si $|f(x)|\leqslant c\,(b-x)^{-p}$, donde $p<1$, la integral impropia (3.15) será convergente. En cambio, si $f(x)\geqslant c\,(b-x)^{-p}$, donde $c>0$, $p\geqslant 1$, entonces la integral impropia (3.15) es divergente. La demostración proviene del síntoma general de comparación y del ejemplo analizado en el punto anterior.

Por analogía completa con el p. 3 del párrafo antecedente, para las integrales impropias de segunda especie se enuncian reglas de integración mediante el cambio de variables y de integración por partes.

§ 3. Valor principal de la integral impropia

Definición. *Supongamos que una función $f(x)$ está definida sobre una recta $-\infty < x < \infty$, y es integrable en cada segmento perteneciente a la recta citada. Diremos que la función $f(x)$ es integrable según Cauchy, si existe el límite*

$$\lim_{R\to+\infty} \int_{-R}^{R} f(x)\,dx.$$

Este límite se denomina valor principal de la integral impropia de la función $f(x)$ en el sentido de Cauchy y se denota con el símbolo [1]

$$\text{V. p.} \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = \lim_{R\to+\infty} \int_{-R}^{R} f(x)\,dx.$$

EJEMPLO 1. Hallemos el valor principal de la integral de sen x. Por cuanto, en virtud de que sen x es impar,

$$\int_{-R}^{R} \operatorname{sen} x\,dx = 0, \text{ entonces } \text{V. p.} \int_{-\infty}^{\infty} \operatorname{sen} x\,dx = 0.$$

Resulta válida la siguiente *afirmación.*

Si una función $f(x)$ es impar, será integrable según Cauchy y el valor principal de la integral de esta función será nulo.

Si una función $f(x)$ es par, será integrable según Cauchy cuando, y sólo cuando, es convergente la integral impropia

$$\int_{0}^{\infty} f(x)\,dx. \tag{3.17}$$

La primera parte de esta afirmación es evidente. Para demostrar la segunda parte, basta aprovechar la igualdad

$$\int_{-R}^{R} f(x)\,dx = 2\int_{0}^{R} f(x)\,dx,$$

que se verifica para cualquier función par, y la definición de convergencia de la integral impropia (3.17).

El concepto de integración según Cauchy puede introducirse para las integrales impropias de segunda especie también en el caso en que el punto singular sea punto interior del segmento por el cual se realiza la integración.

---

[1] V. p. son letras iniciales de las palabras francesas «Valeur principal».

Definición. *Supongamos que una función $f(x)$ está definida sobre el segmento $[a, b]$, salvo, quizás, en el punto c, $a < c < b$, y es integrable en cualquier segmento que no contenga c. Diremos que la función $f(x)$ es integrable según Cauchy, si existe el límite*

$$\lim_{\alpha \to +0} \left(\int_a^{c-\alpha} f(x)\,dx + \int_{c+\alpha}^{b} f(x)\,dx \right) = \text{V.p.} \int_a^b f(x)\,dx,$$

llamado valor principal de la integral en el sentido de Cauchy.

EJEMPLO 2. La función $\frac{1}{x-c}$ no es integrable sobre el segmento $[a, b]$, $a < c < b$ en el sentido impropio, sin embargo es integrable según Cauchy. En este caso

$$\text{V.p.} \int_a^b \frac{dx}{x-c} = \lim_{\alpha \to +0} \left(\int_a^{c-\alpha} \frac{dx}{x-c} + \int_{c+\alpha}^{b} \frac{dx}{x-c} \right) = \ln \frac{b-c}{c-a}.$$

§ 4. Integrales impropias múltiples

Este párrafo está dedicado a la generalización del concepto de integral múltiple al caso en que el dominio de integración no es acotado y no es acotada la función subintegral. Recordemos que precisamente estos casos se han excluido por nosotros del análisis al construir la teoría de integrales múltiples.

Notemos que el concepto de integral impropia múltiple se formulará de una manera tal que sean abarcados tanto el caso de un campo no acotado de integración, como también el caso de una función no acotada.

1. Concepto de integrales impropias múltiples. Sea D un conjunto abierto [1]) del espacio euclídeo m-dimensional E^m. Con el símbolo $\overline{D}$ designemos la clausura D que se obtiene reuniendo D con su frontera. Nos hará falta el concepto de sucesión $\{D_n\}$ de conjuntos abiertos que agotan monótonamente el conjunto D.

Diremos que la sucesión $\{D_n\}$ de conjuntos abiertos agota monótonamente el conjunto D, si: 1) para n cualquiera, el conjunto $\overline{D}_n$ está contenido en D_{n+1}; 2) la unión de todos los conjuntos D_n coincide con el conjunto D [2]).

Notemos que cada conjunto D_n de la sucesión $\{D_n\}$ está contenido en D.

---

[1]) Un conjunto se llama abierto, si está compuesto sólo por los puntos interiores. Un conjunto abierto se llama también dominio.

[2]) Se denomina unión de todos los conjuntos D_n al conjunto $\widetilde{D}$ que contiene todos los puntos de cada uno de los conjuntos D_n y que es de tal índole que cada punto de $\widetilde{D}$ pertenece por lo menos a uno de los conjuntos D_n.

Supongamos que sobre un conjunto abierto D viene dada una función $f(x)$, $x = (x_1, x_2, \ldots, x_m)$, integrable según Riemann en cualquier subconjunto cerrado cubicable del conjunto D. Analizaremos toda clase de sucesiones $\{D_n\}$ de conjuntos abiertos que agotan monótonamente D y que poseen la propiedad de que la clausura $\overline{D}_n$ de cada conjunto D_n es cubicable (de aquí se deduce, en particular, que cada uno de los conjuntos D_n está acotado).

Si para toda sucesión de este tipo $\{D_n\}$ existe un límite de la sucesión numérica $\left\{\int\limits_{\overline{D}_n} f(x)\,dx\right\}$, y si este límite no depende de cómo se elige la sucesión $\{D_n\}$, dicho límite se denomina integral impropia de la función $f(x)$ extendida al conjunto D y se denota con uno de los siguientes símbolos:

$$\int\limits_D f(x)\,dx, \quad \int\int\ldots\int\limits_D f(x_1, x_2, \ldots, x_m)\,dx_1\,dx_2\ldots dx_m. \qquad (3.18)$$

En este caso la integral impropia (3.18) *se llama convergente.*

Notemos que el símbolo (3.18) se emplea también en el caso cuando los límites de las sucesiones mencionadas más arriba no existen. En tal caso la integral (3.18) se llama *divergente.*

2. Integrales impropias de las funciones no negativas. Demostremos el siguiente teorema.

Teorema 3.6. *Para que converja la integral impropia* (3.18) *de una función $f(x)$, no negativa en el dominio D es necesario y suficiente que al menos para una sola sucesión de dominios cubicables $\{D_n\}$ que agotan monótonamente el dominio D sea acotada la sucesión numérica*

$$a_n = \int\limits_{\overline{D}_n} f(x)\,dx \qquad (3.19)$$

DEMOSTRACIÓN. La necesidad de hipótesis del teorema es obvia: la sucesión (3.19) es no decreciente ($\overline{D}_n$ está contenida en $\overline{D}_{n+1}$, y $f(x) \geqslant 0$), por lo cual como condición necesaria de convergencia de la sucesión interviene su carácter acotado. Pasemos a la demostración de la suficiencia de las condiciones del teorema. Por cuanto la sucesión (3.19) está acotada y no decrece, es convergente hacia cierto número I. Resta por demostrar que hacia este mismo número I converge la sucesión

$$a'_n = \int\limits_{\overline{D}'_n} f(x)\,dx,$$

donde $\{D'_n\}$ es otra sucesión arbitraria de dominios que agotan monótonamente el dominio D. Fijamos un número cualquiera n y exa-

minemos el dominio D'_n. Existe un número n_1 tal que $\overline{D}'_n$ esté contenida en D_{n_1}[1]. Por eso,

$$a'_n \leqslant a_{n_1} \leqslant I.$$

De aquí se desprende que la sucesión $\{a'_n\}$ converge hacia cierto número $I' \leqslant I$. Cambiando en nuestros razonamientos las sucesiones a'_n y a_n, llegaremos a la desigualdad $I \leqslant I'$. Por consiguiente, $I' = I$. El teorema está demostrado.

EJEMPLO Examinemos una integral

$$I = \iint_D e^{-x^2-y^2}\,dx\,dy, \tag{3.20}$$

tomada por todo el plano. A título de sistema de dominios $\{D_n\}$ que agotan monótonamente el dominio D elijamos el siguiente sistema de círculos concéntricos D_n:

$$x^2 + y^2 < n^2, \quad n = 1, 2, \ldots$$

En cada círculo D_n pasemos al sistema polar de coordenadas r, φ. Obtendremos

$$a_n = \iint_{D_n} e^{-x^2-y^2}\,dx\,dy = \int_0^{2\pi}\int_0^{n} e^{-r^2} r\,dr\,d\varphi = \pi\,(1 - e^{-n^2}).$$

De aquí se deduce que $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \pi$. De acuerdo con el teorema que acabamos de demostrar, la integral (3.20) converge y es igual a π. Notemos que la integral (3.20) puede ser representada en la siguiente forma[2]

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\,dx \int_{-\infty}^{\infty} e^{-y^2}\,dy = \left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\,dx\right)^2.$$

[1] Admitamos que esto no es así. Entonces, para todo k entero puede indicarse tal punto M_k del dominio $\overline{D}'_n$ que no pertenezca al dominio D_k. En la sucesión $\{M_k\}$ podemos elegir (por ser $\overline{D}'_n$ cerrada y acotada) una subsucesión que converja hacia cierto punto $M \in \overline{D}'_n$. El punto M pertenece, junto con cierto entorno, a uno de los conjuntos D_{k_1}. Mas, al mismo conjunto D_{k_1} y a todos los conjuntos D_k con números mayores pertenecen los puntos M_k con los números tan grandes como se quiera. Esto contradice la elección de los puntos M_k.

[2] Podemos convencernos fácilmente de la posibilidad de esta representación, si a título de sistema agotable de campos tomamos un sistema de cuadrados cada vez crecientes con centros en el origen de coordenadas y lados paralelos a los ejes, y aplicamos, después, la fórmula de integración reiterada por cada uno de estos cuadrados.

A partir de esta representación obtenemos el valor de la integral llamada integral de Poisson[1]):

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\,dx = \sqrt{\pi}.$$

Demostremos el siguiente teorema.

***Teorema 3.7* (síntoma general de comparación).** *Supongamos que las funciones no negativas $f(x)$ y $g(x)$ en cada punto del conjunto abierto D satisfacen la condición*

$$f(x) \leqslant g(x).$$

Entonces, la convergencia de la integral impropia $\int_D g(x)\,dx$ predetermina la convergencia de la integral impropia $\int_D f(x)\,dx$.

DEMOSTRACIÓN Sea $\{D_n\}$ una sucesión de campos que agotan monótonamente el campo D. A partir de las desigualdades obvias

$$a_n = \int_{\overline{D}_n} f(x)\,dx \leqslant \int_{\overline{D}_n} g(x)\,dx = b_n$$

se deduce que la convergencia de la sucesión b_n predetermina la convergencia de la sucesión a_n. De aquí y del teorema 3.6 proviene la validez del teorema enunciado.

Al analizar la convergencia de las integrales impropias se emplean, de ordinario, funciones estándar (tipo) de comparación, la más usada de las cuales es $g(x) = |x|^{-p}$, $p > 0$[2]).

EJEMPLO 1 Sean $a > 0$; D, una bola de radio a con centro en el origen de coordenadas; $g(x) = |x|^{-p}$. A título de la sucesión $\{D_n\}$ de dominios que agotan monótonamente D tomemos un sistema de capas concéntricas D_n que se forman por eliminación en la bola D de las bolas de radio $1/n$ con centro en el origen de coordenadas. Al introducir el sistema esférico de coordenadas (véase p. 3° § 5 del capítulo 2), obtendremos

$$a_n = \int_{\overline{D}_n} g(x)\,dx = \int_{1/n}^{a} r^{-p+m-1}\,dr \int_0^{2\pi} d\theta_1 \int_0^{\pi} d\theta_2 \ldots$$

$$\ldots \int_0^{\pi} \left(\prod_{k=1}^{m-1} \operatorname{sen}^{k-1}\theta_k\right) d\theta_{m-1}.$$

---

[1]) S. Poisson (1781—1840), matemático y físico francés.

[2]) Se considera en este caso $|x| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_m^2}$.

Denotando con el símbolo ω_m una magnitud positiva

$$\omega_m = \int_0^{2\pi} d\theta_1 \int_0^{\pi} d\theta_2 \ldots \int_0^{\pi} \left(\prod_{k=1}^{m-1} \operatorname{sen}^{k-1} \theta_k \right) d\theta_{m-1},$$

podemos escribir

$$a_n = \omega_m \int_{1/n}^{a} r^{-p+m-1}\, dr.$$

De aquí se deduce que la sucesión a_n está acotada y, por lo tanto, es convergente cuando, y sólo cuando, $p < m$. En virtud del teorema 3.6, una integral impropia de la función $|x|^{-p}$ en el dominio D converge cuando $p < m$, y diverge, cuando $p \geqslant m$.

EJEMPLO 2. Sean: $a > 0$; D, la exterioridad de una bola de radio a con centro en el origen de coordenadas; $g(x) = |x|^{-p}$. A título de la sucesión $\{D_n\}$ de dominios que agotan monótonamente D tomemos un sistema de capas concéntricas D_n que se componen de todos los puntos $x \in E^m$ que satisfacen la condición

$$a < |x| < n.$$

Al introducir el sistema esférico de coordenadas, obtendremos

$$a_n = \int_{D_n} g(x)\, dx = \omega_m \int_a^n r^{-p+m-1}\, dr.$$

De esta igualdad y del teorema 3.6 se deduce que una integral impropia de la función $|x|^{-p}$ en el citado dominio D converge para $p > m$, y diverge, para $p \leqslant m$.

3. Integrales impropias de las funciones de signo variable. En este punto aclaremos la relación existente entre convergencia ordinaria y convergencia absoluta de las integrales impropias múltiples. Al igual que en el caso unidimensional, una integral impropia $\int_D f(x)\, dx$ se llamará absolutamente convergente, siempre que converge la integral $\int_D |f(x)|\, dx$. Demostraremos que la convergencia absoluta predetermina la convergencia ordinaria. Lo más sorprendente es otra propiedad de las integrales impropias múltiples que no tiene análogo en el caso unidimensional y que consiste en que la convergencia de una integral impropia múltiple predetermina su convergencia absoluta. Dicho de otro modo, demostraremos que *para las integrales impropias múltiples los conceptos de convergencia y de convergencia absoluta son equivalentes.*

Antes de pasar a la demostración de estas propiedades, demos a conocer unas observaciones previas.

De la definición de integral impropia proviene que si converge una integral impropia, extendida al dominio D, de cada una de las funciones $f_+(x)$ y $f_-(x)$, también serán convergentes las integrales de la suma o de la diferencia de estas funciones.

Examinemos las siguientes dos funciones no negativas:

$$f_+(x)=\frac{|f(x)|+f(x)}{2}, \quad f_-(x)=\frac{|f(x)|-f(x)}{2}. \qquad (3.21)$$

Es evidente que las funciones citadas pueden ser definidas mediante las correlaciones

$$\left.\begin{array}{l} f_+(x)=\begin{cases} f(x), & \text{si } f(x)\geqslant 0,\\ 0 & \text{si } f(x)<0,\end{cases}\\ f_-(x)=\begin{cases} -f(x), & \text{si } f(x)\leqslant 0,\\ 0 & \text{si } f(x)>0.\end{cases}\end{array}\right\} \qquad (3.22)$$

Señalemos también las siguientes correlaciones evidentes que provienen de la definición de las funciones $f_+(x)$ y $f_-(x)$:

$$0\leqslant f_+(x)\leqslant |f(x)|, \quad 0\leqslant f_-(x)\leqslant |f(x)|, \qquad (3.23)$$

$$f(x)=f_+(x)-f_-(x). \qquad (3.24)$$

Demostraremos, ahora, las afirmaciones mencionadas al comienzo de este punto.

Teorema 3.8. *De la convergencia absoluta de una integral impropia múltiple* $\int\limits_D f(x)\,dx$ *se deduce su convergencia ordinaria.*

DEMOSTRACIÓN. Recurramos a las funciones $f_+(x)$ y $f_-(x)$ que acabamos de introducir. De la integrabilidad en el sentido propio de la función $f(x)$ en cualquier subdominio cubicable del dominio D se desprende la integrabilidad en D de la función $|f(x)|$, y de aquí, como también de las fórmulas (3.21), proviene que las funciones $f_+(x)$ y $f_-(x)$ son asimismo integrables en cualquier subdominio de esta índole. Teniendo presentes la convergencia de la integral $\int\limits_D |f(x)|\,dx$, la propiedad recién citada de las funciones $f_+(x)$ y $f_-(x)$, las desigualdades (3.23) y el teorema 3.7, es fácil convencerse de que las integrales impropias $\int\limits_D f_+(x)\,dx$ y $\int\limits_D f_-(x)\,dx$ son convergentes. De aquí y de la relación (3.24) se deduce la convergencia de la integral $\int\limits_D f(x)\,dx$. El teorema está demostrado.

Demostremos, ahora, el teorema recíproco.

Teorema 3.9. *Si una integral impropia múltiple* $\int\limits_D f(x)\,dx$ *es convergente, convergerá también absolutamente.*

DEMOSTRACIÓN. Admitamos que la afirmación del teorema es errónea. En tal caso, del teorema 3.6 se deduce que la sucesión de integrales de $|f(x)|$ en cualquier sucesión de dominios $\{D_n\}$ que agotan monótonamente D será una sucesión infinita monótonamente creciente. De aquí proviene que la sucesión $\{D_n\}$ puede elegirse de una manera tal que para cualquier $n = 1, 2, \ldots$ se cumpla una desigualdad

$$\int\limits_{\overline{D}_{n+1}} |f(x)|\, dx > 3 \int\limits_{\overline{D}_n} |f(x)|\, dx + 2n. \qquad (3.25)$$

Denotemos con P_n el conjunto $D_{n+1} - D_n$. Entonces, de (3.25) obtenemos para cualquier n

$$\int\limits_{\overline{P}_n} |f(x)|\, dx > 2 \int\limits_{\overline{D}_n} |f(x)|\, dx + 2n. \qquad (3.26)$$

Por cuanto $|f(x)| = f_+(x) + f_-(x)$, resulta

$$\int\limits_{\overline{P}_n} |f(x)|\, dx = \int\limits_{\overline{P}_n} f_+(x)\, dx + \int\limits_{\overline{P}_n} f_-(x)\, dx. \qquad (3.27)$$

Supongamos que de las dos integrales que figuran en el segundo miembro de (3.27) la mayor será la primera. Entonces, de las correlaciones (3.26) y (3.27) obtendremos para cualquier n

$$\int\limits_{\overline{P}_n} f_+(x)\, dx > \int\limits_{\overline{D}_n} |f(x)|\, dx + n. \qquad (3.28)$$

Dividamos el dominio P_n en un número finito de dominios P_{n_i} de un modo tal que la suma inferior $\sum\limits_i m_i \Delta\sigma_i$ de funciones $f_+(x)$ para dicha partición sea tan poco diferente de la integral de esta función extendida a $\overline{P}_n$ que, al sustituir la integral en el primer miembro de (3.28) por la suma inferior mencionada, se obtenga la siguiente desigualdad

$$\sum_i m_i \Delta\sigma_i > \int\limits_{\overline{D}_n} |f(x)|\, dx + n. \qquad (3.29)$$

Dado que $m_i \geqslant 0$, en la suma $\sum\limits_i m_i \Delta\sigma_i$ podemos dejar sólo aquellos sumandos, para los cuales $m_i > 0$. La unión de los dominios correspondientes P_{n_i} la designemos por $\widetilde{P}_n$.

En el dominio $\widetilde{P}_n$ la función $f(x)$ es positiva, por lo cual en dicho dominio $f(x) = f_+(x)$. Por consiguiente, de acuerdo con (3.29), obtenemos la igualdad

$$\int_{\widetilde{P}_n} f(x)\,dx > \int_{\overline{D}_n} |f(x)|\,dx + n. \qquad (3.30)$$

Denotemos con D_n^* la unión de D_n y $\widetilde{P}_n$. Entonces, sumando las desigualdades (3.30) con una desigualdad evidente

$$\int_{\overline{D}_n} f(x)\,dx > -\int_{\overline{D}_n} |f(x)|\,dx,$$

obtendremos

$$\int_{\overline{D}_n^*} f(x)\,dx > n. \qquad (3.31)$$

Obviamente, la sucesión de dominios $\{D_n^*\}$ agota monótonamente el dominio D. Mas, en tal caso, de acuerdo con la desigualdad (3.31), la integral $\int\limits_D f(x)\,dx$ es divergente. Como, por hipótesis, esta integral converge, la suposición de que no es cierta la afirmación del teorema no tiene lugar. El teorema queda demostrado.

4. Valor principal de las integrales impropias múltiples.

Definición. *Supongamos que una función $f(x)$ está definida para todo $x \in E^m$ y es integrable en cada bola K_R de radio R con centro en el origen de coordenadas. Suele decirse que la función $f(x)$ es integrable según Cauchy en E^m, si existe el límite*

$$\lim_{R\to\infty} \int_{K_R} f(x)\,dx.$$

Este límite se llama valor principal de la integral impropia de la función $f(x)$ en el sentido de Cauchy y se denota

$$\text{V.p.} \int_{E^m} f(x)\,dx = \lim_{R\to\infty} \int_{K_R} f(x)\,dx.$$

EJEMPLO. Supongamos que $f(x)$ tiene en las coordenadas esféricas una forma $f(x) = h(r)\,g(\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_{m-1})$, donde las funciones h y g son continuas, con la particularidad de que

$$\int_0^{2\pi} d\theta_1 \int_0^{\pi} d\theta_2 \ldots \int_0^{\pi} g(\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_{m-1}) \left(\prod_{k=1}^{m-1} \operatorname{sen}^{k-1}\theta_k\right) d\theta_{m-1} = 0.$$

Entonces, evidentemente, $f(x)$ es integrable según Cauchy y

$$\text{V.p.} \int\limits_{E_m} f(x)\, dx = 0.$$

En particular, cuando $m = 2$, la función de dos variables $f(x, y) = h(r) \cos \varphi$ es integrable según Cauchy, y la integral de ella en el sentido del valor principal es nula.

En el caso de que la función $f(x)$ tenga singularidad en cierto punto x_0 del dominio D, la integral en el sentido de Cauchy se introduce como límite

$$\text{V.p.} \int\limits_{D} f(x)\, dx = \lim_{R \to \infty} \int\limits_{D_R} f(x)\, dx,$$

donde D_R es un conjunto que se obtiene por eliminación en el dominio D de la bola de radio R con centro en el punto x_0.

Capítulo 4

INTEGRALES CURVILÍNEAS

En este capítulo vamos a extender el concepto de integral definida simple, tomada por un segmento rectilíneo, al caso en que como campo de integración interviene un segmento de cierta curva plana o espacial.

Las integrales de este género se denominan *curvilíneas*. En las aplicaciones prácticas se acostumbra examinar integrales curvilíneas de dos especies (de las expresiones que tienen el sentido escalar y el vectorial). En el presente capítulo las integrales curvilíneas se analizan paralelamente.

§ 1. Definiciones de las integrales curvilíneas y el sentido físico de las mismas

Examinemos en el plano Oxy una curva rectificable L privada de puntos múltiples y de trozos en los cuales la curva se coloca sobre sí misma. Supongamos que la curva se define mediante las ecuaciones paramétricas

$$\begin{cases} x = \varphi(t), \\ y = \psi(t) \end{cases} \quad (a \leqslant t \leqslant b) \tag{4.1}$$

y en los primeros pasos convengamos en considerarla no cerrada y limitada por los puntos A y B.

Supongamos, además, que una función $f(x, y)$, dos funciones $P(x, y)$ y $Q(x, y)$ están definidas y son continuas a lo largo de la curva $L = AB$[1]).

Dividamos el segmento $a \leqslant t \leqslant b$, mediante los puntos $a = t_0 < t_1 < t_2 < \ldots < t_n = b$, en n segmentos parciales $[t_{k-1}, t_k]$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$.

---

[1]) Una función $f(x, y)$ se llama *continua a lo largo de la curva L*, si para cualquier $\varepsilon > 0$ existe un $\delta > 0$ tal que $|f(x_1, y_1) - f(x_2, y_2)| < \varepsilon$ para cualesquiera dos puntos (x_1, y_1) y (x_2, y_2) de la curva L que satisfacen la condición $\sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2} < \delta$. Hemos definido, de hecho, no continuidad, sino continuidad uniforme de la función $f(x, y)$ a lo largo de la curva L, pero, ya que el conjunto de todos los puntos de la curva L es acotado y cerrado, estas nociones coinciden.

Por cuanto a todo valor t_k le corresponde en la curva L un punto determinado $M_k(x_k, y_k)$ de coordenadas $x_k = \varphi(t_k)$, $y_k = \psi(t_k)$, para la partición mencionada del segmento $a \leqslant t \leqslant b$ toda la curva $L = AB$ se descompone en n arcos parciales $M_0M_1, M_1M_2, \ldots, M_{n-1}M_n$ (fig. 4.1).

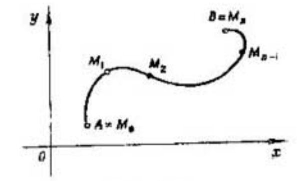


Fig. 4.1.

En cada arco parcial $M_{k-1}M_k$ elijamos un punto arbitrario $N_k(\xi_k, \eta_k)$, cuyas coordenadas ξ_k, η_k corresponden a cierto valor τ_k del parámetro t, de suerte que $\xi_k = \varphi(\tau_k)$, $\eta_k = \psi(\tau_k)$, con la particularidad de que $t_{k-1} \leqslant \tau_k \leqslant t_k$. Convengamos en designar con el símbolo Δl_k la longitud del k-ésimo arco parcial $M_{k-1}M_k$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$.

Formemos una suma integral

$$\sigma_1 = \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k, \eta_k) \cdot \Delta l_k. \qquad (4.2)$$

Formemos dos sumas integrales

$$\sigma_2 = \sum_{k=1}^{n} P(\xi_k, \eta_k)(x_k - x_{k-1}), \qquad (4.2')$$

$$\sigma_3 = \sum_{k=1}^{n} Q(\xi_k, \eta_k)(y_k - y_{k-1}). \qquad (4.2'')$$

Un número I se llamará *límite* de la suma integral σ_s $(s = 1, 2, 3)$, al tender a cero la máxima de las longitudes Δl_k, siempre que para todo $\varepsilon > 0$ existe un $\delta > 0$ tal que $|\sigma_s - I| < \varepsilon$, una vez que la máxima de las longitudes Δl_k se hace inferior a δ.

DEFINICIONES

Si existe el límite de la suma integral σ_1, cuando la máxima de las longitudes Δl_k tiende a cero, dicho límite recibe el nombre de integral curvilínea de primera especie de la función $f(x, y)$ a lo largo de la curva L y se denota con el símbolo

$$\int_L f(x, y)\, dl,$$

Si existe el límite de la suma integral σ_2 $[\sigma_3]$, cuando la máxima de las longitudes Δl_k tiende a cero, dicho límite recibe el nombre de integral curvilínea de segunda especie y se denota con el símbolo

$$\int_{AB} P(x, y)\, dx \left[\int_{AB} Q(x, y)\, dy \right].$$

La suma

$$\int_{AB} P(x, y)\, dx + \int_{AB} Q(x, y)\, dy$$

o bien

$$\int_{AB} f(x, y)\, dl \qquad (4.3)$$

se acostumbra llamarla *integral curvilínea general de segunda especie* que se denota con el símbolo

$$\int_{AB} P(x, y)\, dx + Q(x, y)\, dy. \quad (4.3')$$

Aclaremos *el sentido físico* de las integrales curvilíneas introducidas.

Supongamos que a lo largo de la curva L viene distribuida una masa con la densidad lineal $f(x, y)$. Para calcular la masa de toda la curva, resulta natural partir esta curva en trozos pequeños y, considerando que en cada trozo la densidad varía poco, admitir que la masa de cada trozo es aproximadamente igual al producto de cierto valor intermedio de la densidad por la longitud de este trozo.

En este caso la masa de toda la curva será aproximadamente igual a la suma integral (4.2). El valor exacto de la masa será definido, naturalmente, como límite de la suma (4.2), al tender a cero la longitud del trozo mayor.

De este modo, *la integral curvilínea de primera especie* (4.3) *proporciona la masa de una curva, a lo largo de la cual la densidad lineal es igual a* $f(x, y)$.

Supongamos que un punto material se mueve de A a B a lo largo de la curva L por efecto de una fuerza $\vec{F}(x, y)$ cuyos componentes son $P(x, y)$ y $Q(x, y)$. Para calcular el trabajo realizado en tal movimiento, resulta natural dividir la curva en trozos pequeños y, considerando que en cada trozo la fuerza varía poco, admitir que el trabajo en cada trozo es aproximadamente igual a la suma de productos de los componentes de la fuerza, tomados en ciertos puntos intermedios por los componentes del vector de desplazamiento. En este caso el trabajo total, al realizarse el movimiento desde A hasta B, será aproximadamente igual a la suma (4.2′) y (4.2″). El valor exacto de este trabajo se definirá, naturalmente, como límite de la suma citada, al tender hacia cero la longitud del trozo mayor.

De este modo, *la integral curvilínea general de segunda especie* (4.3′) *respresenta el trabajo que se gasta para trasladar un punto material desde A hasta B a lo largo de la curva L bajo la acción de una fuerza que tiene componentes* $P(x, y)$ *y* $Q(x, y)$.

OBSERVACIÓN 1. Las formas de las sumas (4.2), (4.2′), (4.2″) muestran con toda evidencia que la integral curvilínea de primera

especie no depende de la dirección en que se recorre la curva L (de A a B, o de B a A), mientras que para la integral curvilínea de segunda especie el cambio de la dirección en la curva causa el cambio correspondiente del signo, es decir,

$$\int_{AB} P(x, y)\, dx = -\int_{BA} P(x, y)\, dx, \quad \int_{AB} Q(x, y)\, dx = -\int_{BA} Q(x, y)\, dy.$$

OBSERVACIÓN 2 Para una curva espacial se introduce de una manera sumamente análoga el concepto de integral curvilínea de primera especie $\int_{AB} f(x, y, z)\, dl$, y tres integrales curvilíneas de segunda especie

$$\int_{AB} P(x, y, z)\, dx, \quad \int_{AB} Q(x, y, z)\, dy, \quad \int_{AB} R(x, y, z)\, dz.$$

La suma de las tres últimas integrales se acostumbra llamarla *integral curvilínea general de segunda especie* y designarla con el símbolo

$$\int_{AB} P(x, y, z)\, dx + Q(x, y, z)\, dy + R(x, y, z)\, dz.$$

§ 2. Existencia de las integrales curvilíneas y reducción de las mismas a las integrales definidas

Convengamos en llamar la recta L *suave*, si las funciones $\varphi(t)$ y $\psi(t)$ de las ecuaciones paramétricas (4.1) que la definen, poseen en el segmento $[a, b]$ derivadas continuas $\varphi'(t)$ y $\psi'(t)$[1]).

Llamemos la curva L *continua a trozos*, si es continua y se descompone en un número finito de trozos (que no tienen puntos interiores comunes), cada uno de los cuales representa una curva suave.

De acuerdo con el convenio admitido aún en el cap. 6 y 7, v. II, se llamarán puntos singulares de la curva L aquellos que corresponden al valor del parámetro t, para el cual las derivadas $\varphi'(t)$ y $\psi'(t)$ se anulan.

Demostremos que *si la curva $L = AB$ es suave y no contiene puntos singulares, y si las funciones $f(x, y)$, $P(x, y)$ y $Q(x, y)$ son continuas a lo largo de esta curva, resultan válidas las siguientes fórmulas que*

---

[1]) Se sobreentiende que las derivadas $\varphi'(t)$ y $\psi'(t)$ son continuas en cualquier punto interior del segmento $[a, b]$ y poseen valores límites finitos en el punto a por la derecha y en el punto b por la izquierda.

reducen las integrales curvilíneas a las integrales definidas ordinarias

$$\int\limits_{AB} f(x, y)\,dl = \int\limits_a^b f[\varphi(t), \psi(t)] \times \sqrt{[\varphi'(t)]^2 + [\psi'(t)]^2}\,dt. \qquad (4.4)$$

$$\int\limits_{AB} P(x, y)\,dx = \int\limits_a^b P[\varphi(t), \psi(t)]\,\varphi'(t)\,dt, \qquad (4.4')$$

$$\int\limits_{AB} Q(x, y)\,dy = \int\limits_a^b Q[\varphi(t), \psi(t)]\,\psi'(t)\,dt. \qquad (4.4'')$$

Se demostrará a la vez la existencia de las integrales curvilíneas que figuran en dichas fórmulas.

Notemos, ante todo, que las integrales definidas que figuran en los segundos miembros de las fórmulas (4.4), (4.4') y (4.4'') existen a ciencia cierta (pues, bajo los supuestos admitidos, las funciones subintegrales en cada una de las citadas integrales son continuas en el segmento $a \leqslant t \leqslant b$).

En cuanto a la integral curvilínea de segunda especie, se deducirá sólo la fórmula (4.4') (pues, la deducción de la fórmula (4.4'') es sumamente análoga).

Al igual que en el § 1, dividamos el segmento $a \leqslant t \leqslant b$, mediante los puntos $a = t_0 < t_1 < t_2 < \ldots < t_n = b$ en n segmentos parciales y formemos las sumas integrales (4.2) y (4.2').

Tomemos en consideración que

$$\Delta l_k = \int\limits_{t_{k-1}}^{t_k} \sqrt{[\varphi'(t)]^2 + [\psi'(t)]^2}\,dt.$$

$$x_k - x_{k-1} = \varphi(t_k) - \varphi(t_{k-1}) = \int\limits_{t_{k-1}}^{t_k} \varphi'(t)\,dt.$$

Esto nos permite reescribir del modo siguiente las expresiones para las sumas integrales (4.2) y (4.2'):

$$\sigma_1 = \sum_{k=1}^{n} \left\{ f[\varphi(\tau_k), \psi(\tau_k)] \times \int\limits_{t_{k-1}}^{t_k} \sqrt{[\varphi'(t)]^2 + [\psi'(t)]^2}\,dt \right\}. \qquad (4.5)$$

$$\sigma_2 = \sum_{k=1}^{n} \left\{ P[\varphi(\tau_k), \psi(\tau_k)] \times \int\limits_{t_{k-1}}^{t_k} \varphi'(t)\,dt \right\}. \qquad (4.5')$$

(Aquí se ha tomado en consideración que $\xi_k = \varphi(\tau_k)$, $\eta_k = \psi(\tau_k)$, donde τ_k es cierto valor del parámetro t que satisface la condición $t_{k-1} \leqslant \tau_k \leqslant t_k$).

Ahora, designemos las integrales definidas en los segundos miembros de las fórmulas (4.4) y (4.4′) con K_1 y K_2, respectivamente. Al dividir el segmento $a \leqslant t \leqslant b$ en una suma de n segmentos parciales $[t_{k-1}, t_k]$, podemos escribir las integrales definidas K_1 y K_2 en la siguiente forma

$$K_1 = \sum_{k=1}^{n} \int_{t_{k-1}}^{t_k} f[\varphi(t), \psi(t)] \times \sqrt{[\varphi'(t)]^2 + [\psi'(t)]^2}\, dt.$$

$$K_2 = \sum_{k=1}^{n} \int_{t_{k-1}}^{t_k} P[\varphi(t), \psi(t)]\, \varphi'(t)\, dt.$$

Examinemos y estimemos las diferencias

$$\sigma_1 - K_1 = \sum_{k=1}^{n} \int_{t_{k-1}}^{t_k} \{f[\varphi(\tau_k), \psi(\tau_k)] - f[\varphi(t), \psi(t)]\} \times \sqrt{[\varphi'(t)]^2 + [\psi'(t)]^2}\, dt. \quad (4.6)$$

$$\sigma_2 - K_2 = \sum_{k=1}^{n} \int_{t_{k-1}}^{t_k} \{P[\varphi(\tau_k), \psi(\tau_k)] - P[\varphi(t), \psi(t)]\}\, \varphi'(t)\, dt. \quad (4.6')$$

Por cuanto las funciones $x = \varphi(t)$ e $y = \psi(t)$ son continuas en el segmento $a \leqslant t \leqslant b$, y las funciones $f(x, y)$ y $P(x, y)$, continuas a lo largo de la curva L, de conformidad con el teorema de continuidad de una función compuesta (véase § 3, cap. 5, v. II) *las funciones* $f[\varphi(t), \psi(t)]$ *y* $P[\varphi(t), \psi(t)]$ *son continuas en el segmento* $a \leqslant t \leqslant b$.

Observemos ahora que cuando tiende a cero la mayor de las longitudes parciales de los arcos Δl_k, tenderá a cero también la mayor de las diferencias $(t_k - t_{k-1})$[1]. Mas, de aquí se deduce que, cualquiera que sea $\varepsilon > 0$, puede indicarse tal $\delta > 0$ que a condición de que la mayor de las longitudes Δl_k es menor que δ, cada expresión en los corchetes en las fórmulas (4.6) y (4.6′) es inferior a ε. Por con-

---

[1]) Efectivamente, $\Delta l_k = \int_{t_{k-1}}^{t_k} \sqrt{[\varphi'(t)]^2 + [\psi'(t)]^2}\, dt$. Por cuanto las funciones $\varphi'(t)$ y $\psi'(t)$ son continuas sobre el segmento $a \leqslant t \leqslant b$, y no se anulan simultáneamente, la función $\sqrt{[\varphi'(t)]^2 + [\psi'(t)]^2}$ es continua y estrictamente positiva en el segmento $a \leqslant t \leqslant b$. Por eso, también será positivo el valor de la última función sobre el segmento $a \leqslant t \leqslant b$. Mas, en tal caso, $\Delta l_k \geqslant$ $\geqslant m \int_{t_{k-1}}^{t_k} dt = m(t_k - t_{k-1})$, es decir, $t_k - t_{k-1} \leqslant \frac{1}{m} \Delta l_k$

siguiente, a condición de que la mayor de las longitudes Δl_k sea menor que δ, obtendremos para las diferencias (4.6) y (4.6′) las siguientes estimaciones:

$$|\sigma_1 - K_1| \leqslant \varepsilon \sum_{k=1}^{n} \int_{t_{k-1}}^{t_k} \times$$

$$\times \sqrt{[\varphi'(t)]^2 + [\psi'(t)]^2}\, dt =$$

$$= \varepsilon \int_a^b \sqrt{[\varphi'(t)]^2 + [\psi'(t)]^2}\, dt =$$

$$= \varepsilon l,$$

donde l es la longitud de la curva AB.

$$|\sigma_2 - K_2| \leqslant \varepsilon \sum_{k=1}^{n} \int_{t_{k-1}}^{t_k} |\varphi'(t)|\, dt \leqslant$$

$$\leqslant \varepsilon M \sum_{k=1}^{n} \int_{t_{k-1}}^{t_k} dt = \varepsilon M (b-a),$$

donde M es el valor máximo de $|\varphi'(t)|$ sobre el segmento $a \leqslant t \leqslant b$. Subrayemos que, al deducir la fórmula (4.4′), sólo exigimos que $\varphi'(t)$ sea continua, y la curva $L = AB$, rectificable (la continuidad de $\psi'(t)$ no es necesaria en este caso).

Por ser ε arbitrario, podemos afirmar que las sumas integrales σ_1 y σ_2 tienen (cuando tiende a cero la máxima de las longitudes Δl_k) límites iguales a K_1 y K_2, respectivamente. Con esto queda demostrada simultáneamente la existencia de las integrales curvilíneas que figuran en los primeros miembros de las fórmulas (4.4) y (4.4′), como también la validez de las mismas.

OBSERVACIÓN 1. En el caso de una curva suave a trozos L, las integrales curvilíneas a lo largo de esta curva se definirán, naturalmente, como sumas de las correspondientes integrales curvilíneas a lo largo de todos los trozos suaves que integran la curva dada L. De este modo, las igualdades (4.4), (4.4′) y (4.4″) resultan válidas también para la curva continua a trozos L. Dichas igualdades son, además, lícitas en un caso en que las funciones $f(x, y)$, $P(x, y)$ y $Q(x, y)$ sean no estrictamente continuas, sino sólo continuas a trozos a lo largo de la curva L (es decir, cuando la curva L se descompone en un número finito de trozos, privados de puntos interiores comunes, a lo largo de cada uno de los cuales las funciones mencionadas son continuas).

OBSERVACIÓN 2. Los resultados y las fórmulas sumamente análogos tienen lugar también para las integrales curvilíneas tomadas a lo largo de una curva espacial $L = AB$, definida mediante las ecuaciones paramétricas

$$\begin{cases} x = \varphi(t), \\ y = \psi(t), \quad (a \leqslant t \leqslant b). \\ z = \chi(t) \end{cases}$$

Limitémonos a la inscripción de las fórmulas

$$\int_{AB} f(x, y, z)\,dt = \int_a^b f[\varphi(t), \psi(t), \chi(t)] \times \sqrt{[\varphi'(t)]^2+[\psi'(t)]^2+[\chi'(t)]^2}\,dt.$$

$$\int_{AB} P(x, y, z)\,dx = \int_a^b P[\varphi(t), \psi(t), \chi(t)]\,\varphi'(t)\,dt,$$

$$\int_{AB} Q(x, y, z)\,dy = \int_a^b Q[\varphi(t), \psi(t), \chi(t)]\,\psi'(t)\,dt,$$

$$\int_{AB} R(x, y, z)\,dz = \int_a^b R[\varphi(t), \psi(t), \chi(t)]\,\chi'(t)\,dt.$$

OBSERVACIÓN 3. Se ha establecido anteriormente que una integral curvilínea de segunda especie depende de la dirección en que se recorre la curva $L = AB$. Por eso se debe llegar a un convenio especial referente a lo que se entiende por el símbolo

$$\int_L P(x, y)\,dx + Q(x, y)\,dy \quad (4.7)$$

en el caso cuando L sea una curva *cerrada* (es decir, cuando el punto B coincide con el A).

De las dos direcciones posibles del recorrido de un contorno cerrado L se llamará *positiva* aquella, para la cual el campo dispuesto en el interior del contorno citado queda por el lado izquierdo con relación al punto que realiza el recorrido[1]). En la fig. 4.2 la dirección positiva del recorrido está marcada por flechas.

Fig. 4.2.

Convengamos en considerar que en la integral (4.7) *a lo largo del contorno cerrado L, el mismo se recorre en la posición positiva.*

[1]) Tal dirección del movimiento puede denominarse convencionalmente «movimiento en el sentido contrario de las agujas de un reloj».

OBSERVACIÓN 4. Es fácil mostrar que *las integrales curvilíneas poseen las mismas propiedades que las integrales definidas ordinarias* (las demostraciones son análogas a las expuestas en los §§ 5 y 6 del cap. 1, v. II). Además, adoptadas unas suposiciones más rígidas, las propiedades mencionadas se deducen de las fórmulas (4.4), (4.4') (4.4").

Enunciemos estas propiedades con arreglo a las integrales curvilíneas de primera especie.

1°. PROPIEDAD LINEAL. Si para cada una de las funciones $f(x, y)$ y $g(x, y)$ existe una integral curvilínea a lo largo de la curva AB, y si α y β son constantes cualesquiera, para la función $[\alpha f(x, y) + \beta g(x, y)]$ también existe integral curvilínea a lo largo de la curva AB, con la particularidad de que

$$\int_{AB} [\alpha f(x, y) + \beta g(x, y)]\, dl = \alpha \int_{AB} f(x, y)\, dl + \beta \int_{AB} g(x, y)\, dl.$$

2°. ADITIVIDAD. Si el arco AB está compuesto por dos arcos AC y CB, y si para la función $f(x, y)$ existe integral curvilínea a lo largo del arco AB, para dicha función existe integral curvilínea a lo largo de cada uno de los arcos AC y CB, con la particularidad de que

$$\int_{AB} f(x, y)\, dl = \int_{AC} f(x, y)\, dl + \int_{CB} f(x, y)\, dl.$$

3°. ESTIMACIÓN DEL MÓDULO DE UNA INTEGRAL. Si existe una integral curvilínea de la función $f(x, y)$ a lo largo de la curva AB, existe también integral curvilínea a lo largo de la curva AB de la función $|f(x, y)|$, con la particularidad de que

$$\left| \int_{AB} f(x, y)\, dl \right| \leqslant \int_{AB} |f(x, y)|\, dl.$$

4°. FÓRMULA DEL VALOR MEDIO. Si una función $f(x, y)$ es continua a lo largo de la curva AB, en dicha curva existe un punto M^* tal que

$$\int_{AB} f(x, y)\, dl = l \cdot f(M^*),$$

donde l es longitud de la curva AB.

EJEMPLO. 1°. Calcúlese la masa de una elipse L definida mediante las ecuaciones paramétricas

$$\begin{cases} x = a \cos t, \\ y = b \operatorname{sen} t \end{cases} \quad (0 \leqslant t \leqslant 2\pi)$$

a condición de que $a > b > 0$, y que la densidad lineal de distribución de la masa es igual a $\rho = |y|$.

El problema se reduce al cálculo de la integral curvilínea de primera especie $\int\limits_L |y|\, dl$.

Con ayuda de la fórmula (4.4) obtendremos

$$\int\limits_L |y|\, dl = b \int\limits_0^{2\pi} |\text{sen}\, t| \sqrt{a^2 \,\text{sen}^2 t + b^2 \cos^2 t}\, dt =$$

$$= b \int\limits_0^{\pi} \text{sen}\, t \sqrt{a^2 \,\text{sen}^2 t + b^2 \cos^2 t}\, dt -$$

$$- b \int\limits_{\pi}^{2\pi} \text{sen}\, t \sqrt{a^2 \,\text{sen}^2 t + b^2 \cos^2 t}\, dt =$$

$$= -b \int\limits_0^{\pi} \sqrt{a^2 - (a^2 - b^2) \cos^2 t}\, d(\cos t) +$$

$$+ b \int\limits_{\pi}^{2\pi} \sqrt{a^2 - (a^2 - b^2) \cos^2 t}\, d(\cos t) = 2b \left(b + a\, \frac{\text{arcsen}\, e}{e}\right),$$

donde [1] $e = \dfrac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a}$.

2°. Calcúlese la integral curvilínea de segunda especie

$$I = \int\limits_L (x^2 - 2xy)\, dx + (y^2 - 2xy)\, dy,$$

en la que L es una parábola $y = x^2$, para $-1 \leqslant x \leqslant 1$. La citada parábola puede considerarse como una curva que se define mediante las ecuaciones paramétricas

$$\begin{cases} x = t, \\ y = t^2 \end{cases} \quad (-1 \leqslant t \leqslant 1).$$

Por eso, con ayuda de las fórmulas (4.4′) y (4.4″), obtendremos

$$I = \int\limits_{-1}^{1} (t^2 - 2t^3)\, dt + \int\limits_{-1}^{1} (t^4 - 2t^3)\, 2t\, dt = -\frac{14}{15}.$$

---

[1] Recordemos que la magnitud e en la geometría analítica lleva el nombre de *excentricidad*.

Capítulo 5

INTEGRALES DE SUPERFICIE

En el presente capítulo se analizará el problema de integración de las funciones definidas sobre las superficies. Con este motivo estudiemos previamente el concepto de superficie y el de área de una superficie.

§ 1. Concepto de superficie

1. Concepto de superficie. La aplicación f de un dominio[1]) G sobre el conjunto G^* de un espacio euclídeo tridimensional se llama *homeomorfa*, si dicha aplicación representa una correspondencia biunívoca entre los puntos G y G^*, en la que a cualquier sucesión convergente $\{M_n\}$ de puntos de G le corresponde la sucesión convergente $\{M_n^*\}$ de puntos en G^*, y a cada sucesión convergente de puntos $\{M_n^*\}$ de G^* le corresponde la sucesión convergente de puntos $\{M_n\}$ de G. Dicho de otro modo, la aplicación homeomorfa de un dominio G sobre el conjunto G^* es aplicación biunívoca y recíprocamente continua de los conjuntos mencionados. Diremos que G^* es *la imagen* de G en la aplicación homeomorfa de f.

Estudiemos el siguiente ejemplo. Supongamos que G es un dominio en el plano Oxy; (u, v) son coordenadas de los puntos M del dominio citado; $z = z(M)$ es una función continua en G; G^*, la gráfica de esta función. Es evidente que la aplicación f del campo G sobre G^*, definida mediante las relaciones

$$x = u, \quad y = v, \quad z = z(u, v),$$

es aplicación homeomorfa de este campo sobre el conjunto G^*.

Introduzcamos el concepto de *superficie elemental*.

Un conjunto Φ de puntos del espacio tridimensional se llama superficie elemental, si dicho conjunto es una imagen del círculo abierto G, al realizarse la aplicación homeomorfa de G en el espacio[2]).

Con ayuda del concepto de superficie elemental se introduce concepto de la así llamada *superficie simple*.

Introduzcamos, previamente, el concepto de entorno de un punto del conjunto Φ del espacio euclídeo E^3.

---

[1]) Recordemos que recibe el nombre de *dominio* un conjunto, cada punto del cual es interior.

[2]) Se examina aquí el espacio euclídeo tridimensional, aunque podemos estudiar un espacio euclídeo de cualquier número de mediciones y hablar de la superficie bidimensional en este espacio.

Se denomina *entorno* del punto M del conjunto Φ la parte común del conjunto Φ y del entorno espacial del punto M.

El conjunto Φ de puntos del espacio recibe el nombre de superficie simple, si dicho conjunto es conexo[1]) *y cualquier punto de éste tiene un entorno que representa una superficie elemental.*

Observemos que la superficie elemental es superficie simple, pero, la superficie simple no es, en el caso general, elemental. Por ejemplo, una esfera es la superficie simple, pero no elemental.

Formulemos el concepto de *superficie general.*

Una aplicación f de la superficie simple G se llama *localmente homeomorfa*, si todo punto de G cuenta con un entorno el que se aplica del modo homeomorfo sobre su imagen.

El conjunto Φ de puntos de un espacio lleva el nombre de superficie general, si es la imagen de una superficie simple, al realizarse su aplicación localmente homeomorfa en el espacio.

OBSERVACION 1. Notemos que los entornos de los puntos en una superficie general se introducen como imágenes de los entornos de aquella superficie simple, de cuya imagen sirve la superficie general dada.

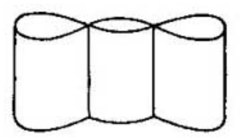


Fig. 5.1.

OBSERVACIÓN 2 Es obvio que toda superficie simple es superficie que no se interseca y no se coloca sobre sí misma. La superficie general puede admitir líneas de intersección y de autocolocación. Por ejemplo, la superficie que se muestra en la fig. 5.1, tiene líneas de intersección, pero es imagen localmente homeomorfa de una zona cilíndrica y constituye, por eso, una superficie general.

2. Superficie regular. Introduzcamos el concepto de superficie regular (k veces diferenciable).

Una superficie Φ, cuyos puntos tienen coordenadas x, y, z, se denomina regular (k veces diferenciable), si para cierto $k \geqslant 1$ cada punto de Φ cuenta con un entorno que admite realizar k veces parametrización diferenciable. Esto significa que cada uno de los entornos mencionados representa una aplicación homeomorfa de cierto dominio elemental G[2]) en los planos (u, v) con ayuda de las relaciones

$$x = x(u, v),\ y = y(u, v),\ z = z(u, v), \tag{5.1}$$

[1]) Recordemos que un conjunto se llama conexo, si cualesquiera dos puntos suyos pueden unirse con una curva continua compuesta enteramente de los puntos de este conjunto.

[2]) Un campo G sobre un plano se denomina *elemental*, si representa imagen de un círculo abierto, al realizarse la aplicación homeomorfa de este círculo sobre el plano.

en las cuales las funciones $x(u, v)$, $y(u, v)$, $z(u, v)$ son k veces diferenciables en el dominio G.

Si $k = 1$, la superficie se llama, habitualmente, *suave*.

Diremos, además, que con ayuda de las relaciones (5.1) introducimos en un entorno de un punto sobre la superficie *la parametrización regular* mediante los parámetros u y v.

OBSERVACIÓN 1. Si toda la superficie Φ representa aplicación del campo G mediante las relaciones (5.1), diremos que en Φ está introducida *la parametrización única*.

Un punto de la superficie regular se llama *ordinario*, si existe tal parametrización regular de cierto entorno suyo que en este punto el rango de la matriz

$$A = \begin{pmatrix} x_u & y_u & z_u \\ x_v & y_v & z_v \end{pmatrix} \tag{5.2}$$

sea igual a dos. De lo contrario, el punto de la superficie se llama *singular*.

Un dominio G de un plano se denominará *simple*, si dicho campo es una superficie plana simple. Por ejemplo, un anillo sin frontera es un campo simple.

Diremos que una función $f(u, v)$ pertenece en G a la clase C^k, siempre que es k veces diferenciable y si todas las derivadas parciales suyas de orden k son continuas en G.

Es válido el siguiente teorema.

Teorema 5.1. *Supongamos que en un dominio G del plano (u, v) vienen definidas las funciones $x(u, v)$, $y(u, v)$, $z(u, v)$ de la clase C^k, $k \geqslant 1$, con la particularidad de que el rango de la matriz* (5.2) *es igual a dos en todos los puntos de G. Entonces, las relaciones* (5.1) *definen en el espacio un conjunto Φ que representa una superficie general regular sin puntos singulares k veces diferenciable.*

DEMOSTRACIÓN. Evidentemente, basta convencerse de que con ayuda de las relaciones (4.1) se realiza aplicación localmente homeomorfa del dominio G sobre el conjunto Φ.

Sea $M_0(x_0, y_0, z_0)$ un punto fijo cualquiera del conjunto Φ que corresponde a los valores (u_0, v_0) de los parámetros (u, v) (fig. 5.2). Por hipótesis, el rango de la matriz A es igual a dos en el punto (u_0, v_0). Supongamos, para concretar, que en este punto el determinante $\begin{vmatrix} x_u y_u \\ x_v y_v \end{vmatrix}$ de la matriz A es distinto de cero. Por cuanto el determinante citado es jacobiano $\frac{D(x, y)}{D(u, v)}$ y se diferencia de cero en el punto (u_0, v_0), mientras que las funciones $x(u, v)$, $y(u, v)$ tienen derivadas parciales continuas en el dominio G, de conformidad con el teorema sobre la resolubilidad del sistema de ecuaciones funcionales (véase teorema 6.2, v. II) se encontrará tal entorno H del punto

(x_0, y_0) en el plano Oxy que dentro de los límites de dicho entorno existe la única solución y, además, k veces diferenciable

$$u = u(x, y), \quad v = v(x, y) \tag{5.3}$$

del sistema

$$\left.\begin{aligned} x(u, v) - x = 0, \\ y(u, v) - y = 0. \end{aligned}\right\}$$

De lo dicho se deduce que un entorno H del punto (x_0, y_0) representa una aplicación homeomorfa de cierto entorno $\bar{G}$ del punto (u_0, v_0) mediante las relaciones $x = x(u, v)$, $y = y(u, v)$ (la aplicación inversa de H sobre $\overline{G}$ se realiza mediante las relaciones (5.3)).

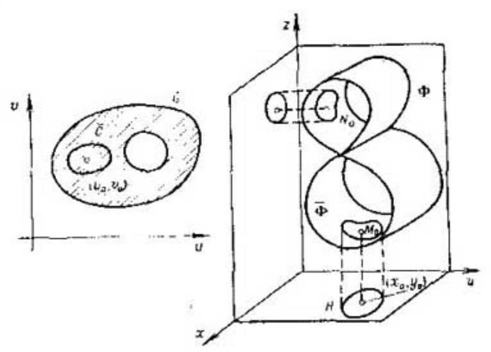


Fig. 5.2.

Sustituyendo las expresiones (5.3) para u y v en la relación $z = z(u, v)$, nos cercioramos de que cierto entorno $\overline{\Phi}$ del punto M_0 en el conjunto Φ es la gráfica de la función k veces diferenciable $z = z(u(x, y), v(x, y)) = z(x, y)$. Esto deja constancia de que con ayuda de la función $z(x, y)$ se realiza la aplicación homeomorfa del entorno H del punto (x_0, y_0) del plano Oxy sobre el entorno mencionado $\overline{\Phi}$ del punto M_0 del conjunto Φ. Evidentemente, el entorno $\overline{G}$ del punto (u_0, v_0) se aplica del modo homeomorfo sobre el entorno $\overline{\Phi}$ del punto M_0 en el conjunto Φ[1]). De otras palabras, Φ representa la imagen de G, al realizarse la aplicación localmente homeomorfa en el espacio, y es, por eso, una superficie general. El teorema está demostrado.

[1]) Hemos aprovechado aquí la afirmación evidente de lo que la realización sucesiva de las aplicaciones homeomorfas tiene por resultado también una aplicación homeomorfa.

OBSERVACIÓN 2. Demostrando el teorema, hemos establecido que *cada punto M_0 de una superficie Φ sin puntos singulares tiene un entorno $\overline{\Phi}$ que se proyecta unívocamente sobre uno de los planos coordenados y que, por esta razón, representa la gráfica de una función k veces diferenciable* (en la demostración del teorema el papel de esta función desempeñaba la función $z(x, y)$).

En la fig. 5.2 se muestran los puntos M_0 y N_0 cuyos entornos se proyectan unívocamente sobre los planos Oxy y Oxz, respectivamente.

3. Definición de una superficie con ayuda de las funciones vectoriales. Veamos una superficie regular Φ. Esta superficie representa

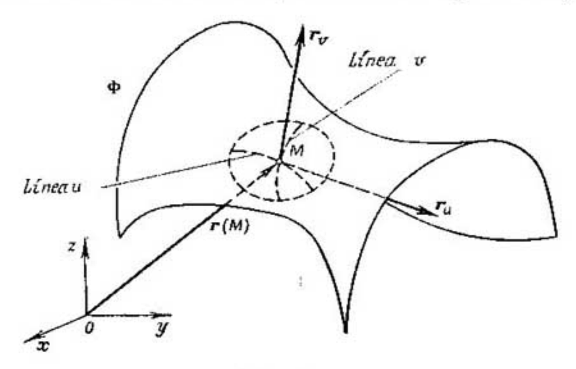


Fig. 5.3.

cierto conjunto de puntos M de un espacio con coordenadas (x, y, z) (fig. 5.3). Denotemos con $\boldsymbol{r}(M)$ un vector que sale del origen de coordenadas y va al punto M de la superficie. Es evidente que $\boldsymbol{r}(M)$ representa aquí una *función vectorial* del punto móvil (variable) M de la superficie[1]). Esta función se llama, de ordinario, *radio vector* de la superficie Φ.

Recurramos a un entorno del punto M que representa una aplicación homeomorfa de cierto dominio elemental G[2]) con ayuda de las relaciones (5.1) (en la fig. 5.3 este entorno está contorneado con una línea punteada). Es obvio, entonces, que las coordenadas $x(u, v)$,

[1]) La función vectorial puede considerarse como una totalidad de tres funciones escalares. La información detallada de las funciones vectoriales se da en el § 1, cap. 12. Haremos uso de esta información a medida que surja la necesidad.

[2]) Un campo G de un plano se llama elemental, si representa la imagen homeomorfa de un círculo abierto.

$y(u, v)$, $z(u, v)$ del punto M son coordenadas del vector $\boldsymbol{r}(M)$. Está claro que en este entorno $\boldsymbol{r}(M)$ será función de las variables u y v: $\boldsymbol{r}(M) = \boldsymbol{r}(u, v)$. Siendo fijo el valor de la variable v, el extremo del radio vector $\boldsymbol{r}(u, v)$ describe en el entorno que se considera una curva llamada *línea u* (o *línea* v = const). Siendo fijo el valor de la variable u, el extremo del radio vector $\boldsymbol{r}(u, v)$ describe *la línea v* (*línea* u = const). Estas líneas u y v se llaman *líneas coordenadas* sobre la superficie Φ en el entorno examinado.

Así pues, en cierto entorno de cada punto de la superficie Φ puede introducirse un sistema de líneas coordenadas u y v. Este sistema

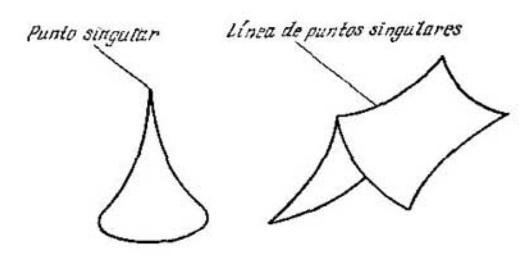


Fig. 5.4.

de líneas coordenadas lleva, además, el nombre de *sistema de coordenadas curvilíneas sobre la superficie* (con mayor precisión, en un entorno que se considera).

En el § 1, cap. 12 se da el sentido geométrico de las derivadas $\boldsymbol{r}_u$ y $\boldsymbol{r}_v$ de la función vectorial $\boldsymbol{r}(u, v)$. Estos vectores son vectores de las tangentes a las líneas coordenadas (véase fig. 5.3).

Con ayuda de los vectores $\boldsymbol{r}_u$ y $\boldsymbol{r}_v$ puede aclararse el sentido geométrico de los puntos ordinario y singular de una superficie regular.

Recordemos que el punto M de una superficie se denomina ordinario, si en el entorno del punto citado puede introducirse tal parametrización mediante las ecuaciones (5.1) que el rango de la matriz A (véase la correlación (5.2)) en este punto sea igual a 2. Por cuanto las filas de la matriz A se componen de las coordenadas de los vectores $\boldsymbol{r}_u$ y $\boldsymbol{r}_v$, y el rango de A es igual a dos, los citados vectores son linealmente independientes. Así pues, un punto ordinario se caracteriza por lo que en el entorno de este punto puede introducirse una parametrización tal que los vectores $\boldsymbol{r}_u$ y $\boldsymbol{r}_v$ sean en el punto M linealmente independientes.

En la fig. 5.3 el punto M es punto ordinario de la superficie Φ. En la fig. 5.4 se exponen superficies con puntos singulares.

4. Plano tangente y normal a la superficie. Superficies unilaterales y bilaterales. Ya hemos introducido el concepto de plano tangente

a una superficie que representa la gráfica de una función diferenciable $z = z(x, y)$ (véase p. 2, § 4, cap. 5, v. II). Recordemos que el plano tangente en el punto M_0 se definía como un plano que posee la propiedad de que el ángulo formado por dicho plano y la secante $M_0 M$ (M es un punto arbitrario de la superficie) tiende a cero, cuando M tiende a M_0. Hemos demostrado que si $z(x, y)$ es una función diferenciable en el punto (x_0, y_0), en el punto M_0 $(x_0, y_0, z(x_0, y_0))$ de la superficie existe un plano tangente.

Cerciorémonos de que en cualquier punto ordinario de una superficie suave existe un plano tangente. Con este fin es suficiente, obviamente, establecer que cierto entorno de un punto ordinario de la superficie representa la gráfica de una función diferenciable. Ahora, en el p. 2 del párrafo presente (véase Observación en el p. 2) fue demostrada esta propiedad para cualquier punto ordinario de la superficie suave. Por consiguiente, *en cualquier punto ordinario de una superficie suave existe un plano tangente.*

OBSERVACION 1. De la definición de plano tangente a la superficie Φ proviene que una tangente en el punto M_0 a cualquier línea suave[1]) que está dispuesta sobre la superficie y que pasa por el punto M_0 se encuentra en el plano tangente a Φ, en el punto M_0 de la misma. Por cuanto los vectores $\boldsymbol{r}_u$ y $\boldsymbol{r}_v$ son tangentes a las líneas u y v, que pasan por M_0, estos vectores se disponen en el plano tangente, a saber, en el punto M_0.

Introduzcamos el concepto de *normal* a la superficie Φ en el punto M_0.

Se denomina *normal* a la superficie Φ en el punto M_0 a una recta que pasa por M_0 y es perpendicular con relación al plano tangente en M_0. Se llamará *vector de la normal* a una superficie en el punto M_0 cualquier vector no nulo que sea colineal respecto de la normal en M_0.

Supongamos que M_0 es un punto ordinario de la superficie suave Φ y que cierto entorno $\overline{\Phi}$ de este punto está definido con ayuda de una función vectorial $\boldsymbol{r}(u, v)$ tal que los vectores $\boldsymbol{r}_u$ y $\boldsymbol{r}_v$ en el punto M_0 no sean colineales. En este caso, evidentemente,

$$\boldsymbol{N} = [\boldsymbol{r}_u \boldsymbol{r}_v] \tag{5.4}$$

será vector de la normal a la superficie, y el vector

$$\boldsymbol{n} = \frac{[\boldsymbol{r}_u \boldsymbol{r}_v]}{|[\boldsymbol{r}_u \boldsymbol{r}_v]|} \tag{5.5}$$

es vector unidad a la superficie.

OBSERVACIÓN 2. Por cuanto la superficie es, por hipótesis, suave, la función vectorial $\boldsymbol{N}(u, v)$ y la función vectorial $\boldsymbol{n}(u, v)$, definidas

[1]) Una línea L se llama *suave*, si puede definirse con ayuda de una función vectorial $\boldsymbol{r}(t)$ de la clase C^1, para la cual $\boldsymbol{r}'(t) \neq 0$ (véase la información más detallada en el § 2, cap. 12).

con ayuda de las relaciones (5.4) y (5.5), respectivamente, serán continuas. De este modo, *en cierto entorno de todo punto de una superficie suave existe un campo vectorial continuo de normales.*

Surge, naturalmente, una cuestión de si toda superficie suave cuenta con un campo vectorial continuo global de normales. Resulta que hay superficies, sobre las cuales no existen campos vectoriales continuos globales de normales. Como ejemplo de tal superficie puede servir la así llamada cinta de Moebius[1]) ilustrada por la fig. 5.5. (Esta superficie se obtiene a partir de un rectángulo $ABB'A'$ pegando los lados AB y $A'B'$ de un modo tal que queden coincididos los puntos A y B' y los A' y B (véase fig. 5.5).

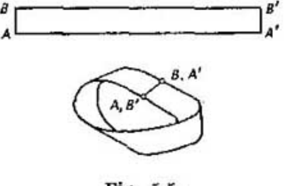


Fig. 5.5.

Las superficies, sobre las cuales existe un campo vectorial continuo global de normales, se llamarán *bilaterales*. Las superficies privadas de tal campo global, se llamarán *unilaterales*.

Un plano, una esfera, un elipsoide, un hiperboloide de un casco son las superficies bilaterales; la cinta de Moebius es la superficie unilateral.

En lo que sigue se examinarán sólo superficies bilaterales.

5. **Lemas auxiliares.** En este punto demostraremos algunas afirmaciones que nos harán falta en adelante.

Lema 1. *Sea M_0 un punto ordinario de la superficie suave Φ. Entonces, un entorno del punto M_0 se proyecta unívocamente sobre un plano tangente trazado en cualquier punto de este entorno.*

DEMOSTRACIÓN. Cerciorémonos de que la propiedad mencionada en el lema la posee, por ejemplo, un entorno $\overline{\Phi}$ del punto M_0, en cuyos márgenes una normal en todo punto forma con la normal en M_0 un ángulo menor que $\pi/4$, y que se proyecta sobre cierto círculo en uno de los planos coordenados (por ejemplo, en Oxy)[2]). Notemos, primero, que las normales en cualesquiera puntos de $\overline{\Phi}$ forman un ángulo inferior a $\pi/2$. Luego, admitamos que $\overline{\Phi}$ no posee la propiedad citada. En tal caso, para cierto punto M de $\overline{\Phi}$ se pueden encontrar tales

[1]) A. Moebius (1790—1868), matemático alemán.

[2]) La posibilidad de elegir tal entorno $\overline{\Phi}$ se deduce de los razonamientos siguientes. En el punto antecedente se ha notado (véase Observación 2) que en cierto entorno del punto ordinario de una superficie existe un campo vectorial continuo de normales. Por eso, en un entorno suficientemente pequeño de M_0 las normales forman con la normal en M_0 un ángulo inferior a $\pi/4$. Se ha establecido también que cierto entorno de M_0 se proyecta unívocamente sobre un plano de coordenadas. Es evidente que en este entorno se tiene una parte que se proyecta sobre cierto círculo en el plano coordenado.

puntos P y Q de $\overline{\Phi}$, que la cuerda PQ sea paralela a la normal $\boldsymbol{n}_M$ en M (fig. 5.6). Veamos la línea de intersección de $\overline{\Phi}$ con un plano que es paralelo a Oz y que pasa por PQ. La parte PNQ de esta línea se dispone en $\overline{\Phi}$ (por la elección del entorno $\overline{\Phi}$) y representa la gráfica de una función diferenciable definida en un segmento que es proyección de PQ sobre el plano Oxy. Según el teorema de Lagrange, una tangente en cierto punto N de la citada parte es paralela a la cuerda PQ y, por tanto, paralela a la normal $\boldsymbol{n}_M$ en M. Mas, en este caso la normal en N (que es perpendicular con relación a la tangente mencionada) forma con la normal en M un ángulo $\pi/2$, lo que no es posible, puesto que las normales en cualesquiera dos puntos de $\overline{\Phi}$ (incluidos los puntos M y N) forman un ángulo inferior a $\pi/2$. La contradicción obtenida nos convence de la validez del lema el cual queda, pues, demostrado.

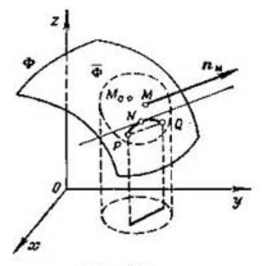


Fig. 5.6.

Introduzcamos el concepto de superficie *completa*. *Una superficie* Φ *se llama completa, si cualquier sucesión fundamental de puntos de esta superficie converge hacia cierto punto de la superficie* Φ.

Un plano, una esfera, un elipsoide, un hiperboloide de un casco son ejemplos de las superficies completas. Un círculo sin frontera, cualquier conjunto abierto conexo en una esfera son superficies incompletas. Las superficies completas limitadas y las partes cerradas limitadas de las superficies completas se llamarán en lo sucesivo *superficies completas limitadas*.

Diremos que una parte de Φ tiene dimensiones inferiores a δ, si dicha parte se ubica en el interior de cierta esfera cuyo diámetro es menor que δ.

Resulta válido el siguiente lema.

Lema 2. *Sea* Φ *una superficie completa limitada suave sin puntos singulares. Existe un* $\delta > 0$ *tal que cualquier parte de* Φ, *cuyas dimensiones son menores que* δ, *se proyecta unívocamente sobre un plano tangente que pasa por cualquier punto de esta parte.*

DEMOSTRACIÓN. Admitamos que la afirmación del lema no es cierta. En tal caso, para cualquier $\delta_n = 1/n$, $n = 1, 2, \ldots$ puede indicarse una parte Φ_n de la superficie Φ, cuyas dimensiones sean inferiores a δ_n, y que no se proyecta unívocamente sobre un plano tangente en uno de sus puntos. Elijamos en cada parte Φ_n un punto M_n y separemos en la sucesión $\{M_n\}$ una subsucesión que sea con-

vergente hacia cierto punto M_0 de la superficie Φ[1]). Examinemos un entorno del punto M_0 que satisface las condiciones del lema 1. Siendo n suficientemente grande, este entorno contendrá cada parte Φ_n. Mas, en tal caso dicha parte ha de proyectarse sobre un plano tangente (en cualquier punto suyo), lo que contradice el modo de elegir las partes Φ_n. El lema está demostrado.

Resulta válido el siguiente lema.

Lema 3. *Sea Φ una superficie completa limitada y suave sin puntos singulares. Existe un $\delta > 0$ tal que cualquier parte de Φ, cuyas dimensiones son inferiores a δ, se proyectan unívocamente sobre uno de los planos coordenados.*

La demostración de este lema es sumamente análoga a la del lema 2.

Lema 4. *Sea Φ una superficie completa bilateral limitada y suave sin puntos singulares. Cualquiera que sea $\varepsilon > 0$, pueden indicarse tal $\delta > 0$ que para el coseno del ángulo γ entre los vectores unidad de las normales en cualesquiera dos puntos de una parte arbitraria $\overline{\Phi}$ de la superficie cuyas dimensiones son menores que δ, sea justa una representación*

$$\cos \gamma = 1 - \alpha_{\Phi}, \tag{5.6}$$

donde $|\alpha_{\Phi}| < \varepsilon$.

DEMOSTRACIÓN. Examinemos un campo de normales unidad $\boldsymbol{n}(M)$ que es continuo en Φ (tal campo existe, pues Φ es una superficie bilateral). La función vectorial $\boldsymbol{n}$ es uniformemente continua, puesto que Φ es superficie completa limitada, por lo cual representa un conjunto cerrado acotado. Por eso, cualquiera que sea $\varepsilon > 0$, se puede indicar tal $\delta > 0$, que para dos puntos arbitrarios M_1 y M_2 de la superficie Φ, la distancia entre los cuales es menor que δ, se verifique la desigualdad

$$|\boldsymbol{n}(M_2) - \boldsymbol{n}(M_1)| < \sqrt{2\varepsilon}. \tag{5.7}$$

Por cuanto

$$\cos \gamma = 1 - \frac{1}{2}(\boldsymbol{n}(M_2) - \boldsymbol{n}(M_1))^2 \text{ [2]},$$

suponiendo que

$$\alpha_{\Phi} = \frac{1}{2}(\boldsymbol{n}(M_2) - \boldsymbol{n}(M_1))^2$$

y haciendo uso de la desigualdad (5.7), nos convencemos de la validez de la relación (5.6). El lema está demostrado.

---

[1]) Por cuanto Φ es una superficie completa limitada, puede elegirse tal subsucesión.

[2]) Se han aprovechado las siguientes correlaciones:

$$\boldsymbol{n}^2(M_1) = 1, \quad \boldsymbol{n}^2(M_2) = 1, \quad \boldsymbol{n}(M_2)\,\boldsymbol{n}(M_1) = \cos \gamma,$$

$$\frac{1}{2}(\boldsymbol{n}(M_2) - \boldsymbol{n}(M_1))^2 = \frac{1}{2}(\boldsymbol{n}^2(M_2) - 2\boldsymbol{n}(M_2)\,\boldsymbol{n}(M_1) + \boldsymbol{n}^2(M_1)).$$

§ 2. Área de una superficie

1. Concepto de área de una superficie. Sea Φ una superficie completa limitada bilateral. Dividamos Φ, mediante unas curvas suaves a trozos, en un número finito de partes Φ_i, cada una de las cuales se proyecta unívocamente sobre un plano tangente que pasa por cualquier punto de la citada parte[1]). Designemos con Δ la máxima de las dimensiones de las partes Φ_i, y con σ_i, el área de la proyección de Φ_i sobre un plano tangente en cierto punto M_i de la parte Φ_i. Formemos a continuación una suma $\sum_i \sigma_i$ de todas las áreas mencionadas.

Formulemos las siguientes *definiciones*.

Definición 1. *Un número σ se llama límite de las sumas $\sum_i \sigma_i$ para $\Delta \to 0$, si con cualquier $\varepsilon > 0$ puede indicarse un $\delta > 0$ tal que para todas las particiones de Φ, mediante unas curvas continuas a trozos, en un número finito de partes Φ_i, para las cuales $\Delta < \delta$, independientemente de cómo se eligen puntos M_i en las partes Φ_i, se cumpla una desigualdad*

$$\left|\sum_i \sigma_i - \sigma\right| < \varepsilon. \tag{5.8}$$

Definición 2. *Si para una superficie Φ existe un límite σ de las sumas $\sum_i \sigma_i$ para $\Delta \to 0$, la superficie se llama cuadrable, y el número σ se denomina área de la superficie.*

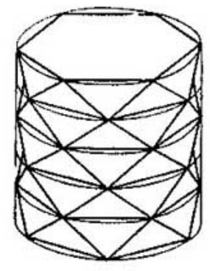


Fig. 5.7.

Nuestra tarea inminente consiste en aclarar las condiciones suficientes de cuadrabilidad de la superficie. Demostremos que las superficies completas suaves bilaterales limitadas son cuadrables. Demos a conocer, de paso, el aparato de cálculo con ayuda del cual pueden calcularse las áreas de las superficies.

Parece natural, a primera vista, abordar la cuestión de área de una superficie aproximando la superficie dada mediante los poliedros. Sin embargo, este camino no nos lleva al objetivo. He aquí un ejemplo que se debe a Schwarz [2]) y que muestra que las áreas de los poliedros inscritos en una superficie suave pueden crecer indefinidamente a medida que aumente el número de aristas y disminuyan sus dimensiones.

Sea Φ una zona cilíndrica (fig. 5.7). Dividamos Φ, mediante unas circunferencias paralelas a las bases de Φ, en n partes iguales. Cada una de estas

[1]) La posibilidad de tal partición se garantiza por el lema 2 del punto antecedente.

[2]) H.A. Schwarz (1843—1921), matemático alemán.

circunferencias la dividamos en m partes iguales tal como se muestra en la fig. 5.7. En la misma figura está expuesto el poliedro Φ_{nm} inscrito en Φ. Cualquiera que sea m fijo, el área del poliedro citado Φ_{nm} es, evidentemente en n veces mayor que el área de la proyección de dicho poliedro sobre el plano de la base del cilindro. Por cuanto esta proyección no depende de n, el área del poliedro Φ_{nm} puede *hacerse tan grande como se quiera*, a cuenta del aumento de n con cualquier m fijo.

2. Cuadrabilidad de las superficies suaves. Demostremos el siguiente teorema.

Teorema 2. *Una superficie completa suave bilateral limitada sin puntos singulares es cuadrable.*

DEMOSTRACIÓN. Supongamos que sobre la superficie Φ puede ser introducida una parametrización regular única. (En este caso el radio vector $\boldsymbol{r}(M)$ de un punto móvil (variable) de la superficie Φ representa una función $\boldsymbol{r}(u, v)$ de la clase C^1 [1]), definida en cierto dominio cerrado y limitado Ω del plano de variables u y v. Las derivadas parciales $\boldsymbol{r}_u$ y $\boldsymbol{r}_v$ de la función $\boldsymbol{r}(u, v)$ son funciones vectoriales continuas que no dependen de cómo se elige el sistema rectangular cartesiano de coordenadas en el espacio. Por eso, el valor de la integral $\iint\limits_{\Omega} |[\boldsymbol{r}_u \boldsymbol{r}_v]|\, du\, dv$ tampoco depende de la elección del sistema cartesiano de coordenadas en el espacio. Demostremos que la superficie Φ es cuadrable y su área es igual a σ.

Sea ε un número positivo arbitrario que en nuestros razonamientos ulteriores se considera fijo. Determinemos, según dicho $\varepsilon > 0$, el número $\delta > 0$, partiendo de las siguientes exigencias: 1) cualquier parte Φ_i de la superficie Φ, cuyas dimensiones son menores que δ, se proyecta unívocamente sobre un plano tangente en cualquier punto de la parte Φ_i; 2) el coseno de ángulo γ entre los vectores unidad de las normales en cualesquiera dos puntos de la parte Φ_i puede expresarse en la forma

$$\cos\gamma = 1 - \alpha_{\Phi_i}, \tag{5.9}$$

donde $|\alpha_{\Phi_i}| < \varepsilon/\sigma$, y $|\alpha_{\Phi_i}| < 1$. La posibilidad de elegir tal $\delta > 0$ se garantiza por los lemas 2 y 4, p. 3 del párrafo antecedente.

Veamos una partición arbitraria de Φ mediante curvas suaves a trozos en un número finito de partes Φ_i, cuya dimensión máxima Δ no sobrepasa δ. Por cuanto existe en Φ una parametrización única, a la partición dada Φ en las partes Φ_i le corresponde la partición del campo Ω en las partes Ω_i. En cada parte Φ_i elegimos un punto arbitrario M_i y designamos con σ_i el área de la proyección de la parte Φ_i sobre el plano tangente en el punto M_i. Con el fin de calcular σ_i procedamos del modo siguiente. Elijamos un sistema cartesiano de coordenadas de una manera tal que su origen coincida con M_i,

[1]) Aquí sobreentendemos que cada componente de la función $r(u, v)$ pertenece a la clase C^1.

el eje Oz esté dirigido a lo largo del vector de la normal a la superficie en M_i, y los ejes Ox y Oy, estén dispuestos en el plano tangente mencionado. En este sistema de coordenadas la superficie se definirá mediante las ecuaciones paramétricas $x = x(u, v)$, $y = y(u, v)$, $z = z(u, v)$, mientras que el vector $[\boldsymbol{r}_u \boldsymbol{r}_v]$ cuenta con las coordenadas $\{A, B, C\}$, donde

$$A = \begin{vmatrix} y_u & z_u \\ y_v & z_v \end{vmatrix}, \quad B = \begin{vmatrix} z_u & x_u \\ z_v & x_v \end{vmatrix}, \quad C = \begin{vmatrix} x_u & y_u \\ x_v & y_v \end{vmatrix}. \qquad (5.10)$$

Notemos que para los puntos de la parte Φ_i la magnitud C es positiva, $C > 0$, lo que se debe a la elección adecuada de δ y la orientación citada del eje Oz. Señalemos, además, que el coseno del ángulo γ_M formado por la normal en el punto M de la parte Φ_i y el eje Oz es

$$\cos \gamma_M = \frac{C}{|[\boldsymbol{r}_u \boldsymbol{r}_v]|}. \qquad (5.11)$$

Está claro que el ángulo γ_M es él que se forma por las normales en los puntos M y M_i de la parte Φ_i, por lo cual para dicho ángulo es legítima la representación (5.9).

Volvamos a la integral $\iint\limits_{\Omega_i} |[\boldsymbol{r}_u \boldsymbol{r}_v]|\, du\, dv$, la cual no depende, evidentemente, de cómo se eligen las coordenadas cartesianas en el espacio. Haciendo uso de que C es positiva, obtenemos a partir de las fórmulas (5.10):

$$\iint\limits_{\Omega_i} |[\boldsymbol{r}_u \boldsymbol{r}_v]|\, du\, dv = \iint\limits_{\Omega_i} \frac{|[\boldsymbol{r}_u \boldsymbol{r}_v]|}{\begin{vmatrix} x_u & y_u \\ x_v & y_v \end{vmatrix}} \left| \begin{vmatrix} x_u & y_u \\ x_v & y_v \end{vmatrix} \right| du\, dv. \qquad (5.12)$$

Aplicando a la integral en el segundo miembro de (5.12) la primera fórmula del valor medio en la forma generalizada, obtenemos

$$\iint\limits_{\Omega_i} |[\boldsymbol{r}_u \boldsymbol{r}_v]|\, du\, dv = \left(\frac{|[\boldsymbol{r}_u \boldsymbol{r}_v]|}{\begin{vmatrix} x_u & y_u \\ x_v & y_v \end{vmatrix}} \right)_M \cdot \iint\limits_{\Omega_i} \left| \frac{\mathcal{D}(x, y)}{\mathcal{D}(u, v)} \right| du\, dv, \quad (5.13)$$

donde M es un punto de la parte Φ_i.

Puesto que

$$\left(\frac{|[\boldsymbol{r}_u \boldsymbol{r}_v]|}{\begin{vmatrix} x_u & y_u \\ x_v & y_v \end{vmatrix}} \right)_M = \frac{1}{\cos \gamma_M}$$

(véanse (5.10) y (5.11)), y $\iint\limits_{\Omega_i} \left| \frac{\mathscr{D}(x, y)}{\mathscr{D}(u, v)} \right| du\,dv = \sigma_i$ [1]), de la fórmula (5.13) y representación (5.9) para $\cos \gamma_M$ encontramos

$$\sigma_i = \iint\limits_{\Omega_i} |[\boldsymbol{r}_u \boldsymbol{r}_v]|\,du\,dv - \iint\limits_{\Omega_i} \alpha_{\Phi_i} |[\boldsymbol{r}_u \boldsymbol{r}_v]|\,du\,dv. \qquad (5.14)$$

Sumando las igualdades (5.14) para todas las partes Φ_i y tomando en consideración que $\sum\limits_i \iint\limits_{\Omega_i} |[\boldsymbol{r}_u \boldsymbol{r}_v]|\,du\,dv = \iint\limits_{\Omega} |[\boldsymbol{r}_u \boldsymbol{r}_v]|\,du\,dv = \sigma$, tenemos

$$\sum_i \sigma_i = \sigma - \sum_i \iint\limits_{\Omega_i} \alpha_{\Phi_i} |[\boldsymbol{r}_u \boldsymbol{r}_v]|\,du\,dv. \qquad (5.15)$$

Estimemos el último sumando en el segundo miembro de (5.15). Tenemos

$$\left| \sum_i \iint\limits_{\Omega_i} \alpha_{\Phi_i} |[\boldsymbol{r}_u \boldsymbol{r}_v]|\,du\,dv \right| \leqslant$$

$$\leqslant \sum \iint\limits_{\Omega_i} |\alpha_{\Phi_i}|\, |[\boldsymbol{r}_u \boldsymbol{r}_v]|\,du\,dv < \frac{\varepsilon}{\sigma} \sum_i \iint\limits_{\Omega_i} |[\boldsymbol{r}_u \boldsymbol{r}_v]|\,du\,dv = \frac{\varepsilon}{\sigma} \cdot \sigma = \varepsilon.$$

De aquí y de la igualdad (5.15) obtenemos

$$\left| \sum_i \sigma_i - \sigma \right| < \varepsilon.$$

Así pues, la superficie Φ es cuadrable y su área es igual a σ.

Se ha examinado, pues, el caso en que sobre la superficie Φ puede ser introducida una parametrización única. En el caso general, la superficie Φ puede dividirse en un número finito de partes, en cada una de las cuales puede introducirse la parametrización única[2]), después de lo cual el área de la superficie puede hallarse como suma de áreas de las partes mencionadas. El teorema está demostrado.

OBSERVACIÓN 1. Supongamos que Φ es una superficie suave a trozos, es decir, está compuesta de un número finito de superficies bilaterales completas limitadas suaves. Es obvio que la superficie Φ es cuadrable: su área puede ser determinada como suma de áreas de las superficies que la integran.

---

[1]) Se ha aprovechado la fórmula para el área de un dominio plano, al pasar de las coordenadas (x, y) a las (u, v) con ayuda de las relaciones $x = x(u, v)$, $y = y(u, v)$.

[2]) Se puede recurrir, por ejemplo, al lema 3, p. 3 del párrafo anterior. De acuerdo con este lema, Φ puede dividirse en un número finito de partes, cada una de las cuales se proyecta unívocamente sobre cierto plano coordenado y, de esta manera, sirve de gráfica de una función diferenciable.

OBSERVACION 2 Al demostrar el teorema 5.2, hemos establecido que si en la superficie Φ puede introducirse una parametrización única y si de campo de definición del radio vector $\boldsymbol{r}(u, v)$ de la superficie Φ sirve un campo limitado cerrado Ω del plano (u, v), el área σ de la superficie puede hallarse según la fórmula

$$\sigma = \iint_{\Omega} |[\boldsymbol{r}_u \boldsymbol{r}_v]| \, du \, dv. \tag{5.16}$$

Si es que $x = x(u, v)$, $y = y(u, v)$, $z = z(u, v)$ son ecuaciones paramétricas de la superficie, el vector $[\boldsymbol{r}_u \boldsymbol{r}_v]$ tendrá las coordenadas $\{A, B, C\}$ que se definen por las relaciones (5.10). Por cuanto $|[\boldsymbol{r}_u \boldsymbol{r}_v]| = \sqrt{A^2 + B^2 + C^2}$, la fórmula (5.16) puede ser escrita en la forma siguiente

$$\sigma = \iint_{\Omega} \sqrt{A^2 + B^2 + C^2} \, du \, dv. \tag{5.17}$$

Al emplear las designaciones

$$\boldsymbol{r}_u^2 = E, \quad \boldsymbol{r}_u \boldsymbol{r}_v = F, \quad \boldsymbol{r}_v^2 = G,$$

y la fórmula

$$|[\boldsymbol{r}_u \boldsymbol{r}_v]| = \sqrt{\boldsymbol{r}_u^2 \boldsymbol{r}_v^2 - (\boldsymbol{r}_u \boldsymbol{r}_v)^2},$$

podemos escribir en la siguiente forma la expresión (5.16) para el área de una superficie

$$\sigma = \iint_{\Omega} \sqrt{EG - F^2} \, du \, dv. \tag{5.18}$$

OBSERVACIÓN 3. El área de una superficie posee la propiedad *de aditividad*: *si una superficie Φ está dividida, mediante una línea suave a trozos, en las partes Φ_1 y Φ_2 que no tienen puntos interiores comunes, el área σ de la superficie Φ es igual a la suma $\sigma_1 + \sigma_2$ de áreas de las partes Φ_1 y Φ_2*. Esta propiedad se predetermina por la representación de un área con ayuda de la integral y por la propiedad de aditividad de la misma.

§ 3. Integrales de superficie

1. Conceptos de las integrales de superficie de primera y segunda especies. Sea Φ una superficie bilateral completa limitada y suave. Supongamos que sobre Φ está definida una función $f(M)$ del punto M de la superficie Φ. Denotemos con $\boldsymbol{n}(M)$ un campo vectorial continuo de normales unidad con relación a Φ.

Sirviéndonos de unas curvas suaves a trozos, dividamos la superficie Φ en las partes Φ_i y elijamos arbitrariamente un punto M_i

en cada una de las partes mencionadas. Introduzcamos las siguientes designaciones: Δ, dimensión máxima de las partes Φ_i; σ_i, área de Φ_i; X_i, Y_i, Z_i, ángulos que forma con los ejes coordenados el vector $\boldsymbol{n}(M_i)$.

Formemos cuatro sumas:

$$I\{\Phi_i,\ M_i\} = \sum_i f(M_i)\,\sigma_i, \tag{5.19}$$

$$I\{\Phi_i,\ M_i,\ Z_i\} = \sum_i f(M_i)\cos Z_i\sigma_i, \tag{5.20}$$

$$I\{\Phi_i,\ M_i,\ Y_i\} = \sum_i f(M_i)\cos Y_i\sigma_i, \tag{5.21}$$

$$I\{\Phi_i,\ M_i,\ X_i\} = \sum_i f(M_i)\cos X_i\sigma_i. \tag{5.22}$$

Para cada una de estas sumas se introduce el concepto de límite con $\Delta \to 0$. Enunciemos este concepto para las sumas (5.19). Para las sumas (5.20), (5.21) y (5.22) el concepto de límite se enuncia análogamente.

Definición. *Un número I se denomina límite de sumas $I\{\Phi_i, M_i\}$ con $\Delta \to 0$, si para todo $\varepsilon > 0$ puede indicarse tal $\delta > 0$, que para cualesquiera particiones de la superficie Φ, mediante unas curvas suaves a trozos, en un número finito de las partes Φ_i, cuya dimensión máxima Δ es inferior a δ, independientemente de cómo se eligen los puntos M_i en las partes Φ_i, se cumpla la desigualdad*

$$|\,I\{\Phi_i,\ M_i\} - I\,| < \varepsilon.$$

El límite I de las sumas $I\{\Phi_i, M_i\}$ con $\Delta \to 0$ recibe el nombre de *integral de superficie de primera especie, de la función $f(M)$ extendida* a la superficie Φ, y se denota del modo siguiente.

$$I = \iint_{\Phi} f(M)\,d\sigma. \tag{5.23}$$

Si (x, y, z) representan las coordenadas del punto M sobre la superficie Φ, para $f(M)$ puede emplearse la designación $f(x, y, z)$. En este caso la fórmula (5.23) puede escribirse en la forma

$$I = \iint_{\Phi} f(x,\ y,\ z)\,d\sigma. \tag{5.24}$$

Los límites de las sumas $I\{\Phi_i, M_i, Z_i\}$, $I\{\Phi_i, M_i, Y_i\}$ e $I\{\Phi_i, M_i, X_i\}$, cuando $\Delta \to 0$, se denominan *integrales de superficie de segunda especie de la función $f(M)$* por la superficie Φ. Para dichas integrales extendidas a la superficie Φ, se emplean las desig-

naciones

$$\iint_{\Phi} f(M)\cos Z\,d\sigma,\quad \iint_{\Phi} f(M)\cos Y\,d\sigma,\quad \iint_{\Phi} f(M)\cos X\,d\sigma$$

o las análogas a la designación (5.24).

OBSERVACIÓN 1. De la definición de integral de superficie de primera especie proviene su *independencia del modo de elegir la orientación del campo vectorial de normales unidad a la superficie*, o, como suele decirse, *de la elección del lado de la superficie.*

OBSERVACIÓN 2. *La integral de superficie de segunda especie depende del modo de elegir el lado de la superficie*: al cambiar la orientación de campo vectorial de normales por la opuesta, todas las tres integrales de superficie de segunda especie cambian su signo por el opuesto. Esto se debe a que en cada una de las sumas (5.20), (5.21) y (5.22) los valores de $f(M_i)$ y de σ_i no varían al cambiar la orientación, mientras que los valores de los cosenos de los ángulos que forma la normal $\boldsymbol{n}(M_i)$ con los ejes coordenados cambian su signo por el opuesto.

OBSERVACIÓN 3. Elegido el determinado lado de la superficie, las integrales de superficie de segunda especie pueden, obviamente, considerarse como integrales de superficie de primera especie extendidas a la superficie Φ de las funciones respectivas $f(M)\cos Z(M)$, $f(M)\cos Y(M)$, $f(M)\cos X(M)$. En efecto, elegido el determinado lado de la superficie, $\cos Z$, $\cos Y$, $\cos X$ representan funciones del punto M de la superficie Φ.

2. Existencia de las integrales de superficie de primera y segunda especies. Supongamos que una superficie Φ satisface las condiciones enunciadas al principio del p. 1 de este párrafo. Elijamos en Φ un lado bien determinado. Con arreglo a la Observación 3 del punto anterior, siendo elegido un determinado lado de la superficie Φ, las integrales de superficie de segunda especie pueden considerarse como integrales de primera especie. Por eso, las condiciones suficientes de existencia se formularán por nosotros sólo para las integrales de primera especie.

Resulta ser lícito el siguiente teorema.

Teorema 5.3. *Supongamos que en la superficie Φ puede introducirse una parametrización única mediante las funciones*

$$x = x(u, v),\ y = y(u, v),\ z = z(u, v), \tag{5.25}$$

definidas dentro de un campo cerrado limitado Ω del plano (u, v) y pertenecientes a la clase C^1 en dicho dominio. Si una función $f(M) = f(x, y, z)$ es continua sobre la superficie Φ[1]*, la integral de super-*

[1]) El concepto de continuidad de una función del punto M definida sobre cierto conjunto $\{M\}$ en el espacio fue enunciado en el p. 1, § 3, cap. 5, v. II. En el caso que se considera el papel del conjunto $\{M\}$ lo desempeñ la superficie Φ.

ficie de primera especie, extendida a la superficie Φ, de la función citada existe y puede calcularse según la fórmula

$$I = \iint_{\Phi} f(M)\, d\sigma = \iint_{\Omega} f(x(u, v),\ y(u, v),\ z(u, v)) \sqrt{EG - F^2}\, du\, dv\ ^{1)}. \tag{5.26}$$

DEMOSTRACIÓN. Hace falta probar que, cualquiera que sea $\varepsilon > 0$, puede indicarse tal $\delta > 0$ que para toda partición Φ, mediante curvas suaves a trozos, en un número finito de partes Φ_i, para la cual $\Delta < \delta$ independientemente del modo de elegir los puntos M_i en las partes Φ_i, se verifique la desigualdad

$$\left| I\{\Phi_i,\ M_i\} - \iint_{\Omega} f(x(u, v),\ y(u, v)\, z(u, v)) \sqrt{EG - F^2}\, du\, dv \right| < \varepsilon. \tag{5.27}$$

Sea ε un número positivo fijo cualquiera. Elijamos, basándonos en dicho $\varepsilon > 0$, un número $\delta^* > 0$ tal que se cumplan las siguientes dos condiciones:

1) Para cualesquiera dos puntos $(\tilde{u}_i, \tilde{v}_i)$ y (u_i, v_i) del campo Ω dispuestos a una distancia inferior a δ^* uno del otro, se verifique la desigualdad

$$\Big| \sqrt{E(\tilde{u}_i, \tilde{v}_i)\, G(\tilde{u}_i, \tilde{v}_i) - F^2(\tilde{u}_i, \tilde{v}_i)} - \sqrt{E(u_i, v_i)\, G(u_i, v_i) - F^2(u_i, v_i)} \Big| < \frac{\varepsilon}{2AP}, \tag{5.28}$$

donde A es un número positivo superior al máximo de la función $|f(M)|$, y P, el área del campo Ω.

2) Para cualquier partición de Ω, mediante curvas suaves a trozos, en un número finito de partes Ω_i, cuyas dimensiones son inferiores a δ^*, y para cualquier elección de los puntos (u_i, v_i) dentro de los márgenes de cada parte Ω_i, se verifique la desigualdad

$$\Big| \sum_i f(x(u_i v_i),\ y(u_i v_i),\ z(u_i, v_i)) \sqrt{E(u_i, v_i)\, G(u_i, v_i) - F^2(u_i, v_i)}\, \sigma_i^* - \iint_{\Omega} f(x, u, v),\ y(u, v),\ z(u, v)) \sqrt{EG - F^2}\, du\, dv \Big| < \frac{\varepsilon}{2}, \tag{5.29}$$

en la cual σ_i^* son las áreas de las partes Ω_i.

---

[1] $f(x(u, v),\ y(u, v),\ z(u, v))$ es una función obtenida mediante la superposición de las funciones $f(x, y, z)$ y $x = x(u, v)$, $y = y(u, v)$, $z = z(u, v)$. En virtud del teorema de continuidad de una función compuesta, esta función es continua en el campo Ω.

La posibilidad de elegir δ^* adecuado se garantiza por la propiedad de continuidad uniforme de la función $\sqrt{EG-F^2}$, continua y acotada dentro del campo cerrado Ω, y por la propiedad de integrabilidad de la función $f(x(u, v), y(u, v), z(u, v))\sqrt{EG-F^2}$ que es continua en el campo Ω.

Determinemos, a base de $\delta^* > 0$, un número $\delta > 0$ tal que a cualquier partición de la superficie Φ, mediante curvas suaves a trozos, en un número finito de partes Φ_i, cuyas dimensiones son inferiores a δ, le corresponda una partición del dominio Ω en un número finito de partes Ω_i, cuyas dimensiones son menores que δ^*. La posibilidad de elegir tal δ la asegura el hecho de que la superficie Φ representa una aplicación homeomorfa del dominio Ω, y, por eso, a toda partición de Φ, mediante curvas suaves a trozos, en un número finito de partes Φ_i le corresponde una partición de Ω, mediante curvas suaves a trozos, en un número finito de partes Ω_i. En este caso, si la dimensión máxima de las partes Φ_i tiende a cero, lo hace también la dimensión máxima de las partes Ω_i.

Veamos, ahora, una partición de Φ, mediante curvas suaves a trozos, en un número finito de partes Φ_i, cuya dimensión máxima Δ satisface la desigualdad $\Delta < \sigma$, donde $\delta > 0$ está elegido a base de δ^* de una manera descrita más arriba. Formemos para dicha partición una suma $I\{\Phi_i, M_i\}$, haciendo uso de su expresión (5.19). Por cuanto el área σ_i de la parte Φ_i es igual a $\iint\limits_{\Omega_i}\sqrt{EG-F^2}\,du\,dv$, entonces, al denotar las coordenadas del punto M_i en la parte Φ_i con $(x(u_i, v_i), y(u_i, v_i), z(u_i, v_i))$, obtendremos

$$I(\Phi_i, M_i) = \sum_i f(x(u_i, v_i), y(u_i, v_i), z(u_i, v_i)) \iint\limits_{\Omega_i} \sqrt{EG-F^2}\,du\,dv.$$

Al emplear el teorema del valor medio para las integrales que figuran en el segundo miembro de la última relación, podemos, obviamente, transformar dicha relación del modo siguiente:

$$I\{\Phi_i, M_i\} - \iint\limits_{\Omega} f(x(u, v), y(u, v), z(u, v))\sqrt{EG-F^2}\,du\,dv =$$
$$= \Big[\sum_i f(x(u_i, v_i), y(u_i, v_i), z(u_i, v_i)) \times \sqrt{E(u_i, \bar{v}_i)G(u_i, v_i) - F^2(u_i, \bar{v}_i)}\,\sigma_i^* -$$
$$- \iint\limits_{\Omega} f(x(u, v), y(u, v), z(u, v))\sqrt{EG-F^2}\,du\,dv\Big] +$$

$$+ \sum_i f(x(u_i, v_i), y(u_i, v_i), z(u_i, v_i)) \cdot$$

$$\times [\sqrt{E(\tilde{u}_i, \tilde{v}_i) G(\tilde{u}_i, \tilde{v}_i) - F^2(\tilde{u}_i, \tilde{v}_i)} -$$

$$- \sqrt{E(u_i, v_i) G(u_i, v_i) - F^2(u_i, v_i)}] \sigma_i^*.$$

De la última igualdad obtenemos fácilmente, con ayuda de las desigualdades (5.28) y (5.29), la desigualdad (5.27). El teorema está demostrado.

OBSERVACIÓN 1. Es evidente que para el cálculo de la integral de superficie de segunda especie $\iint\limits_{\Phi} f(x, y, z) \cos Z \, d\sigma$, podemos, después de elegir un lado determinado de la superficie Φ, emplear la siguiente fórmula:

$$\iint\limits_{\Phi} f(x, y, z) \cos Z \, d\sigma =$$

$$= \iint\limits_{\Omega} f(x(u, v), y(u, v), z(u, v)) \sqrt{EG - F^2} \cos Z \, du \, dv. \quad (5.30)$$

Las fórmulas análogas quedan en vigor para dos otras integrales de superficie de segunda especie.

OBSERVACIÓN 2. Supongamos que la superficie Φ es la gráfica de una función $z = z(x, y)$ perteneciente en el campo D de su definición a la clase C^1. Elijamos sobre la superficie Φ aquel lado, para el cual el vector unidad de la normal $n(M)$ de la superficie forma con el eje Oz un ángulo agudo. En este caso $\cos Z = \frac{1}{\sqrt{1 + p^2 + q^2}}$, donde $p = \frac{\partial z}{\partial x}$, $q = \frac{\partial z}{\partial y}$. Sea $R(x, y, z)$ una función continua definida en la superficie Φ. Entonces, teniendo presente que a título de los parámetros u y v en la superficie se toman x e y (la superficie Φ se define mediante las ecuaciones paramétricas $x = x$, $y = y$, $z = z(x, y)$) y $\sqrt{EG - F^2} = \sqrt{1 + p^2 + q^2}$, podemos escribir la fórmula (5.30) en la siguiente forma:

$$\iint\limits_{\Phi} R(x, y, z) \cos Z \, d\sigma = \iint\limits_{D} R(x, y, z(x, y)) \sqrt{1 + p^2 + q^2} \times$$

$$\times \frac{1}{\sqrt{1 + p^2 + q^2}} \, dx \, dy = \iint\limits_{D} R(x, y, z(x, y)) \, dx \, dy.$$

La observación citada explica la siguiente notación para una integral de superficie de segunda especie:

$$\iint\limits_{\Phi} R(x, y, z) \cos Z \, d\sigma = \iint\limits_{\Phi} R(x, y, z) \, dx \, dy. \quad (5.31)$$

Notemos que la designación (5.31) se emplea también en el caso en que Φ no constituye la gráfica de la función $z = z(x, y)$.

Examinaremos en lo sucesivo integrales de superficie de segunda especie del siguiente tipo:

$$\iint_{\Phi} (P \cos X + Q \cos Y + R \cos Z)\, d\sigma.$$

Las integrales de este tipo se designarán también del modo siguiente:

$$\iint_{\Phi} P\, dy\, dz + Q\, dz\, dx + R\, dx\, dy.$$

OBSERVACIÓN 3. Los conceptos de integrales de superficie de primera y segunda especies se extienden, por supuesto, al caso en que la superficie Φ es suave a trozos. Para las superficies de tal índole queda válido, evidentemente, el teorema de existencia demostrado en este punto.

3. Integrales de superficie de segunda especie que no dependen del modo de elegir el sistema cartesiano de coordenadas. Basándonos en la definición de integrales de superficie de la primera y segunda especies, podemos concluir que la integral de primera especie no depende de cómo se elige el sistema cartesiano de coordenadas en un espacio, mientras que las integrales de segunda especie sí dependen de la elección del último, pues, al cambiar el sistema de coordenadas, varían los valores de los cosenos de los ángulos que forma la normal $\boldsymbol{n}(M)$ con los ejes coordenados.

En el caso en que sobre una superficie sea dada una función vectorial, se puede señalar un acceso más general al concepto de integral de superficie de segunda especie que nos permite hablar, en un sentido determinado, de que el valor de la integral mencionada no depende de cómo se elige en un espacio el sistema cartesiano de coordenadas.

Así pues, admitamos que sobre una superficie bilateral completa limitada Φ viene dada una función vectorial continua $\boldsymbol{r}(M)$. Elijamos en Φ un lado determinado y denotemos con $\boldsymbol{n}(M)$ el campo vectorial de normales unidad a Φ.

Es obvio que el producto escalar $\boldsymbol{r}(M)\,\boldsymbol{n}(M)$ representa una función escalar continua que está definida en la superficie Φ y que, por esta razón, no depende de cómo se elige en el espacio el sistema cartesiano de coordenadas. Por consiguiente, la integral de superficie de primera especie de esta función

$$\iint_{\Phi} \boldsymbol{r}(M)\, \boldsymbol{n}(M)\, d\sigma$$

es independiente de la elección del sistema cartesiano de coordenadas en el espacio. Recurramos a la notación coordenada del producto escalar $\boldsymbol{r}(M)\,\boldsymbol{n}(M)$, considerando que el vector $\boldsymbol{r}(M)$ tiene por sus coordenadas P, Q, R. Por cuanto las coordenadas del vector $\boldsymbol{n}(M)$ son iguales a $\cos X$, $\cos Y$, $\cos Z$, resulta

$$\boldsymbol{r}(M)\,\boldsymbol{n}(M) = P\cos X + Q\cos Y + R\cos Z,$$

y, por eso,

$$\iint_{\Phi} \boldsymbol{r}(M)\,\boldsymbol{n}(M)\,d\sigma = \iint_{\Phi} (P\cos X + Q\cos Y + R\cos Z)\,d\sigma.$$

La integral en el segundo miembro de la última igualdad representa una suma de tres integrales de superficie de segunda especie y se llama, corrientemente, *integral general de superficie de segunda especie*. Por consiguiente, la integral $\iint_{\Phi} \boldsymbol{r}(M)\,\boldsymbol{n}(M)\,d\sigma$ también puede llamarse integral general de superficie de segunda especie.

OBSERVACIÓN 1. Si sobre la superficie Φ vienen dadas tres funciones escalares P, Q y R, entonces a la integral $\iint_{\Phi} (P\cos X + Q\cos Y + R\cos Z)\,d\sigma$ se le puede atribuir una forma invariante (no dependiente) del sistema de coordenadas, considerando que P, Q y R son coordenadas de cierta función vectorial $\boldsymbol{r}(M)$ definida en la superficie y escribiendo dicha integral en la forma $\iint_{\Phi} \boldsymbol{r}(M) \times \boldsymbol{n}(M)\,d\sigma$. Notemos que procediendo de esta manera, nosotros imponemos una ley determinada de transformación de la expresión subintegral, al pasar al nuevo sistema cartesiano de coordenadas. En este caso obtendremos nuevas coordenadas del vector $\boldsymbol{r}(M)$ que se calculan de acuerdo con las reglas conocidas por el curso de la geometría analítica. No obstante, tal forma invariante de notación de la integral de superficie suele ser muy cómoda en diferentes aplicaciones.

OBSERVACIÓN 2. Notemos que la integral general de superficie de segunda especie $\iint_{\Phi} \boldsymbol{r}(M)\,\boldsymbol{n}(M)\,d\sigma$ es numéricamente igual a una magnitud que en la física se llama *flujo* del vector $\boldsymbol{r}(M)$ a través de la superficie Φ.

Capítulo 6

OPERACIONES PRINCIPALES DE LA TEORÍA DEL CAMPO

En este capítulo se estudiarán los campos escalares y vectoriales. Se analizan operaciones principales de la teoría del campo.

§ 1. Transformaciones de las bases y de las coordenadas. Invariantes

1. Bases de vectores recíprocas. Coordenadas covariantes y contravariantes de los vectores. Sea $\boldsymbol{r}_i$, $i = 1, 2, 3$, una base de los vectores de un espacio tridimensional[1]) (para un plano el subíndice i toma los valores 1 y 2). Una base $\boldsymbol{r}^k$, $k = 1, 2, 3$, se llama *recíproca* de la base $\boldsymbol{r}_i$, si se verifican las relaciones[2])

$$\boldsymbol{r}_i\boldsymbol{r}^k = \delta_i^k = \begin{cases} 1, & i = k, \\ 0, & i \neq k \end{cases} \quad i, k = 1, 2, 3. \tag{6.1}$$

El símbolo δ_i^k lleva el nombre de Kronecker[3]).

Surge una cuestión de existencia y unicidad de la base recíproca. La respuesta es positiva: *para la base dada* $\boldsymbol{r}_i$ *existe la única base recíproca* $\boldsymbol{r}^k$.

Cerciorémonos, por ejemplo, de que el vector $\boldsymbol{r}^1$ se define de un modo único. De acuerdo con (6.1), este vector es ortogonal con relación a los vectores $\boldsymbol{r}_2$ y $\boldsymbol{r}_3$. Esto determina unívocamente la línea de actuación del vector $\boldsymbol{r}^1$. Luego, a partir de la condición $\boldsymbol{r}_1\boldsymbol{r}^1 = 1$ se determina de un modo único el propio vector $\boldsymbol{r}^1$. Por analogía se construyen unívocamente los vectores $\boldsymbol{r}^2$ y $\boldsymbol{r}^3$. Para convencerse de que los vectores $\boldsymbol{r}^1, \boldsymbol{r}^2, \boldsymbol{r}^3$ forman una base, basta demostrar que $\boldsymbol{r}^1\boldsymbol{r}^2\boldsymbol{r}^3 \neq 0$. De acuerdo con el teorema sobre el producto de determinantes,

$$(\boldsymbol{r}_1\boldsymbol{r}_2\boldsymbol{r}_3)(\boldsymbol{r}^1\boldsymbol{r}^2\boldsymbol{r}^3) = \begin{vmatrix} \boldsymbol{r}_1\boldsymbol{r}^1 & \boldsymbol{r}_1\boldsymbol{r}^2 & \boldsymbol{r}_1\boldsymbol{r}^3 \\ \boldsymbol{r}_2\boldsymbol{r}^1 & \boldsymbol{r}_2\boldsymbol{r}^2 & \boldsymbol{r}_2\boldsymbol{r}^3 \\ \boldsymbol{r}_3\boldsymbol{r}^1 & \boldsymbol{r}_3\boldsymbol{r}^2 & \boldsymbol{r}_3\boldsymbol{r}^3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1. \tag{6.2}$$

Por cuanto $\boldsymbol{r}_1\boldsymbol{r}_2\boldsymbol{r}_3 \neq 0$ (los vectores $\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{r}_2, \boldsymbol{r}_3$ forman una base), de las correlaciones (6.2) se deduce que también $\boldsymbol{r}^1\boldsymbol{r}^2\boldsymbol{r}^3 \neq 0$.

---

[1]) Recordemos que los vectores $\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{r}_2, \boldsymbol{r}_3$ forman una base, si no son coplanares, es decir, si su producto mixto $\boldsymbol{r}_1\boldsymbol{r}_2\boldsymbol{r}_3$ no es nulo.

[2]) Siempre en este capítulo: con el símbolo $\boldsymbol{ab}$ se denota producto escalar de los vectores $\boldsymbol{a}$ y $\boldsymbol{b}$; con el símbolo $\boldsymbol{abc}$, producto mixto de los vectores $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ y $\boldsymbol{c}$; con el símbolo $[\boldsymbol{ab}]$ se denota producto vectorial de los vectores $\boldsymbol{a}$ y $\boldsymbol{b}$.

[3]) L. Kronecker (1823—1891), matemático alemán.

OBSERVACIÓN 1. Si una base r_i es ortonormal, la base recíproca r^k coincide con la base dada r_i.

Es fácil convencerse de que los vectores r^k de la base recíproca en un espacio tridimensional pueden hallarse con ayuda de las relaciones

$$r^1 = \frac{[r_2r_3]}{r_1r_2r_3}, \quad r^2 = \frac{[r_3r_1]}{r_1r_2r_3}, \quad r^3 = \frac{[r_1r_2]}{r_1r_2r_3}.$$

Sean r_i, r^k las bases recíprocas, y sea x un vector arbitrario. Al descomponer el vector x según los vectores básicos, obtendremos

$$x = x_1r^1 + x_2r^2 + x_3r^3, \; x = x^1r_1 + x^2r_2 + x^3r_3. \qquad (6.3)$$

Los números x_1, x_2, x_3 se llaman coordenadas *covariantes* del vector x, y x^1, x^2, x^3, coordenadas *contravariantes* de x. Estas nociones se explicarán en el punto siguiente.

Con el fin de abreviar notaciones de las fórmulas, donde figuran sumandos de un mismo tipo (de ejemplo para tales fórmulas pueden servir las relaciones (6.3)) se empleará en lo que sigue adelante un convenio de sumación que consiste en lo siguiente. Sea una expresión compuesta por unos cuantos factores. Si en dicha expresión se tienen dos índices literales iguales, de los cuales uno es superior, y el otro, inferior, se considera que de acuerdo con estos índices se realiza la sumación: a los índices se les asignan sucesivamente los valores 1, 2, 3, y los sumandos obtenidos se adicionan. Por ejemplo,

$$x_ir^i = x_1r^1 + x_2r^2 + x_3r^3,$$

$$\delta_i^i = \delta_1^1 + \delta_2^2 + \delta_3^3,$$

$$g_{ik}x^ix^k = (g_{1k}x^1x^k) + (g_{2k}x^2x^k) + (g_{3k}x^3x^k) =$$
$$= (g_{11}x^1x^1 + g_{12}x^1x^2 + g_{13}x^1x^3) + (g_{21}x^2x^1 + g_{22}x^2x^2 + g_{23}x^2x^3) +$$
$$+ (g_{31}x^3x^1 + g_{32}x^3x^2 + g_{33}x^3x^3).$$

Con ayuda del convenio de sumación, las fórmulas (6.3) se escriben del siguiente modo compacto:

$$x = x_ir^i, \quad x = x^ir_i. \qquad (6.4)$$

OBSERVACIÓN 2. Los índices iguales superior e inferior, de los cuales se trataba en el convenio de sumación, se denominan, de ordinario, índices de sumación. Está claro que los índices de sumación pueden designarse con letras cualesquiera, y en este caso no varía la expresión, donde ellos figuran. Por ejemplo, x_ir^i y x_kr^k representan una misma expresión.

OBSERVACIÓN 3. Todo lo que acabamos de decir en este punto se refiere al caso de un espacio tridimensional. En el caso bidimensional los índices literales toman los valores de 1 y 2.

Obtengamos una expresión para las coordenadas covariantes y contravariantes de un vector. Con este objeto multipliquemos escalarmente la primera de las igualdades (6.4) por $\boldsymbol{r}_k$, y la segunda, por $\boldsymbol{r}^k$. Habida cuenta de la relación (6.1), encontramos

$$\boldsymbol{x}\boldsymbol{r}_k = x_i(\boldsymbol{r}^i\boldsymbol{r}_k) = x_i\delta^i_k = x_k,$$
$$\boldsymbol{x}\boldsymbol{r}^k = x^i(\boldsymbol{r}_i\boldsymbol{r}^k) = x^i\delta^k_i = x^k.$$

Así pues,

$$x_i = \boldsymbol{x}\boldsymbol{r}_i, \quad x^i = \boldsymbol{x}\boldsymbol{r}^i. \tag{6.5}$$

Con ayuda de las relaciones (6.5) escribamos las fórmulas (6.4) en la forma siguiente

$$\boldsymbol{x} = (\boldsymbol{x}\boldsymbol{r}_i)\,\boldsymbol{r}^i, \quad \boldsymbol{x} = (\boldsymbol{x}\boldsymbol{r}^i)\,\boldsymbol{r}_i. \tag{6.6}$$

Las relaciones (6.6) llevan el nombre de fórmulas de Gibbs[1]). Volvamos una vez más a la cuestión de construcción de las bases recíprocas.

Con ayuda de las fórmulas (6.6) obtendremos

$$\boldsymbol{r}^k = (\boldsymbol{r}^k\boldsymbol{r}^i)\,\boldsymbol{r}_i, \quad \boldsymbol{r}_k = (\boldsymbol{r}_k\boldsymbol{r}_i)\,\boldsymbol{r}^i. \tag{6.7}$$

Introduzcamos las designaciones

$$g_{ki} = \boldsymbol{r}_k\boldsymbol{r}_i, \quad g^{ki} = \boldsymbol{r}^k\boldsymbol{r}^i. \tag{6.8}$$

Con ayuda de estas designaciones reescribamos las relaciones (6.7) del modo siguiente:

$$\boldsymbol{r}^k = g^{ki}\boldsymbol{r}_i, \quad \boldsymbol{r}_k = g_{ki}\boldsymbol{r}^i. \tag{6.9}$$

Así pues, para construir la base $\boldsymbol{r}^k$ según la base $\boldsymbol{r}_i$, es suficiente conocer la matriz (g^{ki}), y para construir la base $\boldsymbol{r}_k$ según la base $\boldsymbol{r}^i$, basta conocer la matriz (g_{ki}). Demostremos que estas matrices son recíprocamente inversas. Para demostrar esto, multipliquemos la primera de las igualdades (6.9) escalarmente por $\boldsymbol{r}_j$. Teniendo presentes las relaciones (6.1), obtenemos

$$g^{ki}g_{ij} = \delta^k_j = \begin{cases} 1, & j = k, \\ 0, & j \neq k. \end{cases}$$

Estas relaciones muestran que las matrices (g^{ki}) y (g_{ki}) son recíprocamente inversas. Por cuanto los elementos de una matriz inversa pueden calcularse en términos de los elementos de la matriz dada, se pone claro que con ayuda de las relaciones (6.9) se resuelve la cuestión de construcción de las bases recíprocas.

2. Transformaciones de la base y de las coordenadas. Sean $\boldsymbol{r}_i$ y $\boldsymbol{r}^i$, $i = 1, 2, 3$, las bases recíprocas, y sean $\boldsymbol{r}_{i'}$ y $\boldsymbol{r}^{i'}$ las nuevas bases recíprocas.

Haciendo uso del convenio de sumación, escribamos las fórmulas de transformación de los vectores básicos. Tenemos:

---

[1]) J. Gibbs (1839—1903), físico teorético americano.

1) fórmulas de transición de una base antigua r_i a la nueva $r_{i'}$ y fórmulas de transición inversa:

$$r_{i'} = b^i_{i'} r_i, \quad r_i = b^{i'}_i r_{i'}, \ i, \ i' = 1, \ 2, \ 3; \tag{6.10}$$

2) fórmulas de transición de la base antigua r^i a la nueva $r^{i'}$ y fórmulas de transición inversa

$$r^{i'} = \widetilde{b}^{i'}_i r^i, \quad r^i = \widetilde{b}^i_{i'} r^{i'}, \quad i, \ i' = 1, \ 2, \ 3. \tag{6.11}$$

Por cuanto las transformaciones (6.10) son recíprocamente inversas, serán recíprocamente inversas las matrices $(b^i_{i'})$ y $(b^{i'}_i)$. Por razones análogas son recíprocamente inversas también las matrices $(\widetilde{b}^{i'}_i)$ y $(\widetilde{b}^i_{i'})$.

Demostremos que las matrices $(b^i_{i'})$ y $(\widetilde{b}^i_{i'})$ coinciden. Con ello será demostrada la coincidencia de las matrices $(b^{i'}_i)$ y $(\widetilde{b}^{i'}_i)$. Para demostrar, multipliquemos escalarmente la primera de las igualdades (6.10) por r^k, y la segunda de las igualdades (6.11), por $r_{k'}$. Tomando en consideración las relaciones (6.1), encontramos

$$r_{i'} r^k = b^i_{i'} (r_i r^k) = b^i_{i'} \delta^k_i = b^k_{i'},$$

$$r^i r_{k'} = \widetilde{b}^i_{i'} (r^{i'} r_{k'}) = \widetilde{b}^i_{i'} \delta^{i'}_{k'} = \widetilde{b}^i_{k'}.$$

De estas relaciones obtenemos

$$b^i_{i'} = r_{i'} r^i, \tag{6.12}$$

$$\widetilde{b}^i_{i'} = r_{i'} r^i. \tag{6.13}$$

Por cuanto son iguales los segundos miembros de las relaciones (6.12) y (6.13), serán también iguales los miembros primeros. Dicho de otro modo, $b^i_{i'} = \widetilde{b}^i_{i'}$, y esto es indicio de que las matrices $(b^i_{i'})$ y $(\widetilde{b}^i_{i'})$ coinciden. Notemos que los elementos $b^i_{i'}$ de la matriz $(b^i_{i'})$ pueden ser determinados según las fórmulas (6.12).

Podemos ahora afirmar que para el paso de la base r_i, r^i a la base $r_{i'}$, $r^{i'}$ es suficiente conocer sólo la matriz $(b^i_{i'})$ del cambio de la base r_i por la base $r_{i'}$ (la matriz $(b^{i'}_i)$ se calcula según la matriz $(b^i_{i'})$). Demos a conocer las fórmulas de transformación de los vectores básicos:

$$\left. \begin{aligned} r_{i'} = b^i_{i'} r_i, \quad r_i = b^{i'}_i r_{i'}, \\ r^{i'} = b^{i'}_i r^i, \quad r^i = b^i_{i'} r^{i'}. \end{aligned} \right\} \tag{6.14}$$

Obtendremos las fórmulas de transformación de las coordenadas al pasar a una base nueva.

Sean $x_{i'}$ las coordenadas covariantes de x en la base $r_{i'}$, $r^{i'}$. Entonces, de acuerdo con (6.5), tenemos

$$x_{i'} = xr_{i'}.$$

Al sustituir en el segundo miembro de esta relación la expresión para $r_{i'}$ en las fórmulas (6.14), encontramos

$$x_{i'} = x\,(b^i_{i'} r_i) = b^i_{i'}\,(xr_i) = b^i_{i'} x_i.$$

Así pues, las fórmulas de transformación de las coordenadas covariantes de un vector, al pasar a una base nueva, tienen por expresión

$$x_{i'} = b^i_{i'} x_i. \tag{6.14'}$$

Vemos que al pasar a una base nueva, las coordenadas covariantes del vector x se transforman con ayuda de la matriz $(b^i_{i'})$ del cambio directo de la base antigua a la nueva. Esta concordancia de las transformaciones explica precisamente la denominación «coordenadas covariantes[1]) de un vector». Al sustituir en el segundo miembro de la relación $x^{i'} = xr^{i'}$ la expresión para $r^{i'}$ de la fórmula (6.14), obtendremos, tras algunas transformaciones, las fórmulas siguientes:

$$x^{i'} = b^{i'}_i x^i. \tag{6.15}$$

Vemos que al pasar a una base nueva, las coordenadas covariantes del vector x se transforman con ayuda de la matriz $(b^{i'}_i)$ del cambio inverso de la base antigua por la nueva. A dicho desacuerdo de las transformaciones se debe el término «coordenadas contravariantes de un vector»[2]).

3. Invariantes de un operador lineal. Divergencia y rotor de un operador lineal. Llamemos *invariantes* a unas expresiones que no dependen de la elección de la base. Por ejemplo, el valor de una función escalar en un punto dado representa un invariante. Lo será también un vector-objeto independiente de la elección de la base. Un producto escalar de los vectores es también un invariante.

En el punto presente familiaricémonos con ciertos invariantes de un operador lineal. Sea A un operador lineal arbitrario definido sobre los vectores de un espacio euclídeo tridimensional (es decir, $A\,(\alpha x + \beta y) = \alpha Ax + \beta Ay$ para cualesquiera vectores x e y, y cualesquiera números reales α y β). Demostremos que una expre-

---

[1]) Covariante significa cambiable de un modo concordado.
[2]) Contravariante significa cambiable de un modo inverso.

sión

$$r^i A r_i = r_i A r^i\ ^{1)} \tag{6.16}$$

es un invariante.

Hace falta probar que al pasar a la nueva base $r_{i'}, r^{i'}$, queda válida la igualdad

$$r^i A r_i = r^{i'} A r_{i'}. \tag{6.17}$$

Sea $r_{i'}, r^{i'}$ la base nueva, y sea $(b_i^{i'})$ la matriz del cambio de la base r_i, r^i por la base $r_{i'}, r^{i'}$. Tenemos

$$r_i = b_i^{i'} r_{i'}, \quad r^i = b_{k'}^i r^{k'}.$$

Al sustituir estos valores para r_i y r^i en la expresión $r^i A r_i$, obtenemos

$$r^i A r_i = (b_i^{i'} b_{k'}^i)\, r^{k'} A r_{i'}. \tag{6.18}$$

Por cuanto $(b_i^{i'} b_{k'}^i) = \delta_{k'}^{i'}$, resulta, a partir de (6.18):

$$r^i A r_i = \delta_{k'}^{i'} r^{k'} A r_{i'} = r^{i'} A r_{i'}.$$

La igualdad (6.17) queda, pues, demostrada y, por lo tanto, está demostrada la invariación de la expresión $r^i A r_i$.

El invariante $r^i A r_i$ del operador lineal A se denominará *divergencia* del citado operador y se denotará con el símbolo div A. De este modo,

$$\operatorname{div} A = r^i A r_i = r_i A r^i. \tag{6.19}$$

OBSERVACIÓN. En la base dada r_i, r^i un operador lineal puede ser definido con ayuda de una matriz llamada matriz del operador lineal. Dicha matriz es una matriz de coeficientes a_i^k de la descomposición de los vectores Ar_i respecto de la base r_k (por supuesto, podemos analizar también una matriz de coeficientes de la descomposición de los vectores Ar^i respecto de la base r^i).

$$Ar_i = a_i^k r_k; \quad a_i^j = r^j A r_i. \tag{6.20}$$

La divergencia de una matriz A puede ser expresada en términos de los elementos de la matriz (a_i^k). A saber,

$$\operatorname{div} A = a_i^i = a_1^1 + a_2^2 + a_3^3. \tag{6.21}$$

Con el fin de cerciorarse de la validez de la fórmula (6.21), basta sustituir la expresión (6.20) para Ar_i en la expresión (6.19) para la divergencia y hacer uso de la relación $r^i r_k = \delta_k^i$.

---

[1] La validez de la igualdad $r^i A r_i = r_i A r^i$ puede confirmarse razonando del modo siguiente. Tenemos, de acuerdo con (6.9), $r^i = g^{ik} r_k$, $r_i = g_{il} r^l$. Por eso habida cuenta de que (g^{ik}) y (g_{il}) son recíprocamente inversas y simétricas, obtendremos

$$r^i A r_i = g^{ik} g_{il} r_k A r^l = \delta_l^k r_k A r^l = r_k A r^k = r_i A r^i$$

Demostremos que una expresión

$$[r_i A r^i] = [r^i A r_i]^{1)} \qquad (6.22)$$

es también un invariante. Hace falta probar que al pasar a una base nueva $r_{i'}$, $r^{i'}$, queda válida la igualdad

$$[r_i A r^i] = [r_{i'} A r^{i'}]. \qquad (6.23)$$

Sea $r_{i'}$, $r^{i'}$ la base nueva y sea $(b_i^{i'})$ la matriz del cambio de la base r_i, r^i por la base $r_{i'}$, $r^{i'}$. Tenemos

$$r_i = b_i^{i'} r_{i'}, \quad r^i = b_{k'}^i r^{k'}.$$

Al sustituir estos valores para r_i y r^i en la expresión $[r_i A r^i]$, obtendremos

$$[r_i A r^i] = (b_i^{i'} b_{k'}^i)\,[r_{i'} A r^{k'}]. \qquad (6.24)$$

Por cuanto $(b_i^{i'} b_{k'}^i) = \delta_{k'}^{i'}$, resulta, a partir de (6.24):

$$[r_i A r^i] = \delta_{k'}^{i'}\,[r_{i'} A r^{k'}] = [r_{i'} A r^{i'}].$$

Así pues, la igualdad (6.23) queda demostrada y, por lo tanto, está demostrada también la invariación de la expresión $[r_i A r^i]$.

El invariante $[r_i A r^i]$ de un operador lineal A se llamará *rotor* de dicho operador y se denotará con el símbolo rot A. De este modo,

$$\operatorname{rot} A = [r_i A r^i] = [r_1 A r^1] + [r_2 A r^2] + [r_3 A r^3]. \qquad (6.25)$$

Demos a conocer la expresión para la divergencia y el rotor de un operador lineal A en un caso en que la base i, j, k sea *ortonormal*. Por cuanto en tal caso la base recíproca coincide con la dada, de conformidad con las fórmulas (6.20), los elementos a_{ij} de la matriz del operador A pueden hallarse según las fórmulas

$$\left.\begin{aligned} a_{11} &= iAi, & a_{12} &= iAj, & a_{13} &= iAk,\\ a_{21} &= jAi, & a_{22} &= jAj, & a_{23} &= jAk,\\ a_{31} &= kAi, & a_{32} &= kAj, & a_{33} &= kAk. \end{aligned}\right\} \qquad (6.26)$$

(a diferencia del caso general, hemos designado elementos de la matriz del operador A por los símbolos a_{ml}, en lugar de a_l^m).

Para la divergencia del operador A obtenemos la siguiente expresión

$$\operatorname{div} A = \sum_{i=1}^{3} a_{ii} = a_{11} + a_{22} + a_{33} = iAi + jAj + kAk. \qquad (6.27)$$

---

[1]) La validez de la igualdad $[r_i A r^i] = [r^i A r_i]$ puede confirmarse razonando del modo siguiente. Tenemos, de acuerdo con (6.9), $r^i = g^{ik} r_k$, $r_i = g_{il} r^l$. Por eso, teniendo presentes la inversibilidad recíproca y simetría de las matrices (g^{ik}) y (g_{il}), obtenemos

$$[r^i A r_i] = g^{ik} g_{il}\,[r_k A r^l] = \delta_l^k\,[r_k A r^l] = [r_k A r^k] = [r_i A r^i].$$

Hallemos la expresión para el rotor del operador A. Por ser coincidentes las bases recíprocas en el caso de una base ortonormal, a partir de (6.25) obtenemos

$$\text{rot}\, A = [iAi] + [jAj] + [kAk]. \qquad (6.28)$$

Calculemos el primer producto vectorial $[iAi]$. Por cuanto $Ai = a_{11}i + a_{21}j + a_{31}k$, resulta

$$[iAi] = a_{11}[ii] + a_{21}[ij] + a_{31}[ik] = -a_{31}j + a_{21}k.$$

De un modo sumamente análogo se obtienen las fórmulas

$$[jAj] = a_{32}i - a_{12}k, \quad [kAk] = -a_{23}i + a_{13}j.$$

Con ayuda de las fórmulas obtenidas y la correlación (6.28) para rot A determinemos

$$\text{rot}\, A = (a_{32} - a_{23})\, i + (a_{13} - a_{31})\, j + (a_{21} - a_{12})\, k. \qquad (6.29)$$

§ 2. Campo escalar y campo vectorial. Conceptos y operaciones fundamentales

1. Concepto de campo escalar y vectorial. Sea Ω un dominio sobre un plano o en un espacio.

Se dice que *en el dominio Ω está dado un campo escalar, si a todo punto M de Ω se le pone en correspondencia, según una ley conocida, cierto número $u(M)$.*

Notemos que el concepto de campo escalar y el de una función definida en el dominio Ω coinciden. Por regla general, se emplea la siguiente terminología: *un campo escalar se define con ayuda de la función $u(M)$.*

El concepto de campo vectorial se introduce por analogía completa con el de campo escalar: *si a todo punto M del dominio D se le pone en correspondencia, según una ley conocida, cierto vector $p(M)$, suele decirse que en el dominio Ω viene dado un campo vectorial.* En este caso diremos que *un campo vectorial se define con ayuda de una función vectorial $p(M)$.*

El campo de temperaturas dentro de un cuerpo calentado, el campo de densidad de una masa son ejemplos de campos escalares El campo de velocidades de un flujo estable, el campo de intensidad magnética constituyen ejemplos de campos vectoriales.

2. Campos escalares diferenciables. Gradiente de un campo escalar. Derivada direccional. Ya hemos dicho que el concepto de campo escalar $u(M)$ en el dominio Ω y el de función definida en el dominio citado coinciden. Por eso, la diferenciabilidad de un campo escalar puede definirse como diferenciabilidad de la función que define dicho campo. Enunciemos, para mayor comodidad, el concepto de diferenciabilidad de un campo, recurriendo a la terminología un tanto diferente de la habitual.

Llamemos *forma lineal* $f(\Delta \boldsymbol{r})$ respecto del vector $\Delta \boldsymbol{r}$ a un producto escalar de este vector por cierto vector $\boldsymbol{g}$ independiente de $\Delta \boldsymbol{r}$. Usemos también las siguientes designaciones:

$\rho = \rho(M, M')$ es la distancia entre los puntos M y M',

$\Delta \boldsymbol{r} = \overline{MM'}$ es el vector que une los puntos M y M',

$\Delta u = u(M') - u(M)$ es el incremento del campo en el punto M.

Enunciemos la siguiente *definición*.

Definición 1. *Un campo escalar $u(M)$ se denomina diferenciable en el punto M del dominio Ω, si el incremento del campo Δu en el punto M puede ser representado en la forma*

$$\Delta u = f(\Delta \boldsymbol{r}) + o(\rho), \tag{6.30}$$

donde $f(\Delta \boldsymbol{r})$ es la forma lineal respecto del vector $\Delta \boldsymbol{r}$.

La correlación (6.30) se llamará *condición de diferenciabilidad* del campo $u(M)$ en el punto M.

OBSERVACIÓN 1. Por cuanto la forma lineal $f(\Delta \boldsymbol{r})$ representa un producto escalar $\boldsymbol{g} \cdot \Delta \boldsymbol{r}$, donde $\boldsymbol{g}$ es un vector independiente de $\Delta \boldsymbol{r}$, la condición de diferenciabilidad (6.30) del campo escalar $u(M)$ en el punto M puede ser escrita en la forma siguiente:

$$\Delta u = \boldsymbol{g} \cdot \Delta \boldsymbol{r} + o(\rho). \tag{6.31}$$

Demostremos que si un campo escalar $u(M)$ es diferenciable en el punto M, la representación (6.30) (ó (6.31)) para el incremento Δu de dicho campo en el punto M es único. Sean

$$\Delta u = \boldsymbol{g} \cdot \Delta \boldsymbol{r} + o_1(\rho) \text{ y } \Delta u = \boldsymbol{h} \cdot \Delta \boldsymbol{r} + o_2(\rho) \tag{6.32}$$

dos representaciones del incremento Δu en el punto M. De las fórmulas (6.32) para $\Delta \boldsymbol{r} \neq 0$ obtenemos una correlación

$$(\boldsymbol{g} - \boldsymbol{h})\, \boldsymbol{e} = \frac{o(\rho)}{|\Delta \boldsymbol{r}|}, \tag{6.33}$$

en la cual $\boldsymbol{e} = \frac{\Delta \boldsymbol{r}}{|\Delta \boldsymbol{r}|}$ es un vector unidad, y $o(\rho) = o_2(\rho) - o_1(\rho)$. Por cuanto $\frac{o(\rho)}{|\Delta \boldsymbol{r}|} = \frac{o(\rho)}{\rho}$ es una variable infinitésima para $\rho \to 0$, de (6.33) proviene que $(\boldsymbol{g} - \boldsymbol{h})\, \boldsymbol{e} = 0$, cualquiera que sea $\boldsymbol{e}$, es decir, $\boldsymbol{g} = \boldsymbol{h}$. La unicidad de la representación (6.30) está demostrada.

Diremos que *un campo escalar $u(M)$ definido en el dominio Ω es diferenciable en este dominio, si es diferenciable en cada punto del mismo.*

Definición 2. *Se llama gradiente en un punto M del campo escalar $u(M)$, diferenciable en dicho punto, al vector $\boldsymbol{g}$ definido mediante la correlación* (6.31).

El gradiente de un campo escalar se denota con el símbolo $\operatorname{grad} u$.

OBSERVACIÓN 2. La definición de diferenciabilidad de un campo escalar enunciada más arriba, es cómoda por aquella razón que lleva

un carácter invariante, independiente de la elección del sistema de coordenadas. Por eso, *el gradiente de un campo escalar representa un invariante de este campo.*

OBSERVACIÓN 3. Señalemos la siguiente circunstancia importante: *si un campo escalar $u(M)$ definido en el dominio Ω es diferenciable en dicho dominio, el gradiente* grad u *del campo está definido en cada punto de Ω, y, evidentemente, representa un campo vectorial definido en Ω.*

OBSERVACIÓN 4. Para un campo escalar se introduce la noción de *superficie de nivel* (*línea de nivel*, si se trata de un plano) que representa un conjunto de puntos, sobre el cual los valores del campo $u(M)$ son iguales. El gradiente del campo en un punto M es ortogonal a la superficie de nivel en dicho punto. El lector mismo puede cerciorarse con facilidad de la validez de esta afirmación.

Haciendo uso de la designación grad u para el gradiente de un campo escalar, escribamos la correlación (6.31) en la siguiente forma:

$$\Delta u = \operatorname{grad} u \cdot \Delta \mathbf{r} + o(\rho). \tag{6.34}$$

Notemos que el sumando grad $u \cdot \Delta \mathbf{r}$ se llama, de ordinario, *diferencial du* del campo escalar. De este modo,

$$du = \operatorname{grad} u \cdot \Delta \mathbf{r}. \tag{6.35}$$

Convengamos en llamar diferencial $d\mathbf{r}$ al incremento $\Delta \mathbf{r}$ del radio vector $\mathbf{r} = \overline{OM}$, $\Delta \mathbf{r} = \overline{OM'} - \overline{OM}$. Entonces, la fórmula (6.35) para la diferencial du del campo escalar puede ser escrita en la forma

$$du = \operatorname{grad} u \cdot d\mathbf{r}. \tag{6.36}$$

Supongamos que en el dominio Ω están dados dos campos diferenciales $u(M)$ y $v(M)$. Son válidas las siguientes correlaciones:

$$\left.\begin{aligned} \operatorname{grad}(u \pm v) &= \operatorname{grad} u \pm \operatorname{grad} v, \\ \operatorname{grad}(uv) &= u \operatorname{grad} v + v \operatorname{grad} u, \\ \operatorname{grad}\left(\frac{u}{v}\right) &= \frac{v \operatorname{grad} u - u \operatorname{grad} v}{v^2} \quad (\text{para } v \neq 0). \end{aligned}\right\} \tag{6.37}$$

Si F es una función diferenciable, tenemos

$$\operatorname{grad} F(u) = F'(u) \operatorname{grad} u. \tag{6.38}$$

Las deducciones de las fórmulas (6.37) y (6.38) son de un mismo tipo. Demostremos, a título de ejemplo, la validez de la segunda fórmula de (6.37). Resulta, teniendo presentes la fórmula (6.34) y la continuidad de la función $u(M)$:

$$\Delta(uv) = u(M')\,v(M') - u(M)\,v(M) = u(M')\,\Delta v + \\ + v(M)\,\Delta u = (u(M) \operatorname{grad} v + v(M) \operatorname{grad} u)\,\Delta \mathbf{r} + o(\rho).$$

De estas relaciones proviene que el incremento $\Delta (uv)$ puede representarse en la forma (6.31). Por eso, uv es una función diferenciable y $\operatorname{grad}(uv) = u \operatorname{grad} v + v \operatorname{grad} u$. La segunda de las fórmulas (6.37) queda demostrada.

Introduzcamos el concepto de *derivada direccional* para un campo escalar.

Sea $u(M)$ un campo definido en el dominio Ω, sea M un punto de Ω, y sea $\boldsymbol{e}$ un vector unidad que indica la dirección en el punto M. Admitamos luego que M' es un punto cualquiera de Ω, diferente de M y de tal género que el vector $\overline{MM'}$ sea colineal con $\boldsymbol{e}$. La distancia entre M y M' se denotará con ρ

Si existe un límite

$$\lim_{\rho \to 0} \frac{\Delta u}{\rho}$$

$(\Delta u = u(M') - u(M))$, *el mismo se llama derivada del campo* u *en el punto* M *según la dirección de* $\boldsymbol{e}$ *y se denota con el símbolo* $\frac{\partial u}{\partial e}$. De este modo,

$$\frac{\partial u}{\partial e} = \lim_{\rho \to 0} \frac{\Delta u}{\rho}. \tag{6.39}$$

Resulta válida la siguiente afirmación.

Supongamos que un campo $u(M)$ *es diferenciable en el punto* M. *En este caso la derivada* $\frac{\partial u}{\partial e}$ *del campo en dicho punto según cualquier dirección de* $\boldsymbol{e}$ *existe y puede hallarse por la fórmula*

$$\frac{\partial u}{\partial e} = \operatorname{grad} u \cdot \boldsymbol{e}. \tag{6.40}$$

Demostremos esta afirmación. Sea $\boldsymbol{e}$ una dirección fija cualquiera y supongamos que un punto M' se elige de una manera tal que el vector $\Delta \boldsymbol{r} = \overline{MM'}$ sea colineal con $\boldsymbol{e}$. Está claro que $\Delta \boldsymbol{r} = \rho \boldsymbol{e}$. Al sustituir el valor de $\Delta \boldsymbol{r}$ en la relación (6.34), encontramos

$$\Delta u = (\operatorname{grad} u \cdot \boldsymbol{e})\, \rho + o(\rho).$$

De aquí se obtiene la fórmula

$$\frac{\Delta u}{\rho} = \operatorname{grad} u \cdot \boldsymbol{e} + \frac{o(\rho)}{\rho}. \tag{6.41}$$

A partir de las relaciones (6.39) y (6.41) proviene (6.40). La afirmación está demostrada.

Hallemos la expresión para el gradiente de un campo escalar diferenciable, considerando que en un espacio queda elegida la base ortonormal $\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}$, con la cual está ligado el sistema rectangular de coordenadas cartesianas $Oxyz$. Por cuanto $\operatorname{grad} u = \boldsymbol{i}(\operatorname{grad} u \cdot \boldsymbol{i}) +$

$+ j$ (grad $u \cdot j$) $+ k$ (grad $u \cdot k$), y, además, $\frac{\partial u}{\partial i} = \frac{\partial u}{\partial x}$, $\frac{\partial u}{\partial j} = \frac{\partial u}{\partial y}$, $\frac{\partial u}{\partial k} = \frac{\partial u}{\partial z}$, obtendremos, con ayuda de la relación (6.40):

$$\operatorname{grad} u = i \frac{\partial u}{\partial x} + j \frac{\partial u}{\partial y} + k \frac{\partial u}{\partial z}.$$

Recurriendo a la expresión (6.40) para una derivada direccional, obtenemos la siguiente ilustración gráfica de distribución de los valores de las derivadas direccionales del campo $u(M)$ en el punto M de un dominio plano Ω. Sea grad $u \neq 0$ (si grad $u = 0$, de (6.40) se deduce que $\frac{\partial u}{\partial e} = 0$ para e cualquiera). Empleando grad u como diámetro (fig. 6.1), construyamos sobre este vector una circunferencia C. Construyamos también una circunferencia C^* que es igual a C y que es tangente a la última en un punto M. Sea e una dirección arbitraria. Tracemos por M una semirrecta en dirección del vector e. Si dicha semirrecta es tangente a las circunferencias C y C^*, tendremos $\frac{\partial u}{\partial e} = 0$ (el vector e es ortogonal con relación a grad u). En cambio, si la semirrecta corta C o C^* en un punto N, resulta que $\frac{\partial u}{\partial e}$ es igual a la longitud MN tomada con el signo $+$, cuando N se dispone en C, y con el signo $-$, cuando N se dispone en C^*. Para un campo espacial las circunferencias C y C^* han de ser sustituidas por las esferas.

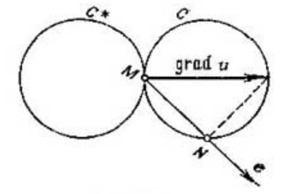


Fig. 6.1.

3. Campos vectoriales diferenciables. Divergencia y rotor de un campo vectorial. Derivada direccional de un campo vectorial. Supongamos que en un dominio Ω del espacio euclídeo tridimensional está dado un campo vectorial $p(M)$. En lo que sigue adelante utilizaremos las designaciones: $\Delta r = \overline{MM'}$, $\Delta p = p(M') - p(M)$.

Enunciemos la siguiente *definición*.

***Definición* 3.** *Un campo vectorial* $p(M)$ *se llama diferenciable en un punto* M *del dominio* Ω, *si el incremento del campo* Δp *en el punto* M *puede ser representado en la forma siguiente:*

$$\Delta p = A \Delta r + o(|\Delta r|), \tag{6.42}$$

donde A *es un operador lineal independiente de* Δr *(independiente de la elección del punto* M'*).*

Las relaciones (6.42) se denominarán *condiciones de diferenciabilidad del campo* $\boldsymbol{p}(M)$ *en el punto* M.

Demostremos que si un campo vectorial $\boldsymbol{p}(M)$ es diferenciable en el punto M, la representación (6.42) para el incremento $\Delta\boldsymbol{p}$ de este campo en el punto M es única.

Sean

$$\Delta\boldsymbol{p} = A\Delta\boldsymbol{r} + \boldsymbol{o}_1(|\Delta\boldsymbol{r}|) \text{ y } \Delta\boldsymbol{p} = B\Delta\boldsymbol{r} + \boldsymbol{o}_2(|\Delta\boldsymbol{r}|) \qquad (6.43)$$

dos representaciones del incremento $\Delta\boldsymbol{p}$ en el punto M. De las fórmulas (6.34) para $\Delta\boldsymbol{r} \neq 0$ obtenemos una relación

$$(A-B)\,\boldsymbol{e} = \frac{\boldsymbol{o}(|\Delta\boldsymbol{r}|)}{|\Delta\boldsymbol{r}|}, \qquad (6.44)$$

en la cual $\boldsymbol{e} = \frac{\Delta\boldsymbol{r}}{|\Delta\boldsymbol{r}|}$ es el vector unidad; $\boldsymbol{o}(|\Delta\boldsymbol{r}|) = \boldsymbol{o}_2(|\Delta\boldsymbol{r}|) - \boldsymbol{o}_1(|\Delta\boldsymbol{r}|)$. Por cuanto $\frac{\boldsymbol{o}(|\Delta\boldsymbol{r}|)}{|\Delta\boldsymbol{r}|}$ es un vector infinitamente pequeño para $\Delta\boldsymbol{r} \to 0$, y $\boldsymbol{e}$ es vector unidad arbitrario, de (6.44) proviene que $(A-B)\,\boldsymbol{e} = 0$ para cualquier $\boldsymbol{e}$, es decir, $A = B$. La unicidad de la representación (6.42) está demostrada.

Diremos que *un campo vectorial* $\boldsymbol{p}(M)$, *definido en el dominio* Ω, *es diferenciable en dicho dominio, si es diferenciable en cada punto del mismo.*

Introduzcamos *el concepto de derivada direccional para el campo vectorial* $\boldsymbol{p}(M)$.

Sea $\boldsymbol{p}(M)$ un campo definido en el dominio Ω, sea M cierto punto de Ω, y sea $\boldsymbol{e}$ el vector unidad que indica la dirección en el punto M. Admitamos, además, que M' es un punto cualquiera diferente de M y de tal género que el vector $\overline{MM'}$ sea colineal con el vector $\boldsymbol{e}$. La distancia entre los puntos M y M' se designará con ρ.

Si existe un límite

$$\lim_{\rho\to 0} \frac{\Delta\boldsymbol{p}}{\rho}$$

($\Delta\boldsymbol{p} = \boldsymbol{p}(M') - \boldsymbol{p}(M)$), *el mismo se llama derivada del campo* $\boldsymbol{p}(M)$ *en el punto* M *según la dirección de* $\boldsymbol{e}$ *y se denota con el símbolo* $\frac{\partial\boldsymbol{p}}{\partial\boldsymbol{e}}$.

De este modo,

$$\frac{\partial\boldsymbol{p}}{\partial\boldsymbol{e}} = \lim_{\rho\to 0} \frac{\Delta\boldsymbol{p}}{\rho}. \qquad (6.45)$$

Resulta válida la siguiente afirmación. *Supongamos que un campo* $\boldsymbol{p}(M)$ *es diferenciable en el punto* M *del dominio* Ω. *En este caso la derivada* $\frac{\partial\boldsymbol{p}}{\partial\boldsymbol{e}}$ *del campo* $\boldsymbol{p}$ *en dicho punto según cualquier*

dirección de $\boldsymbol{e}$ existe y puede hallarse por la fórmula

$$\frac{\partial \boldsymbol{p}}{\partial \boldsymbol{e}} = A\boldsymbol{e}, \tag{6.46}$$

donde A es un operador lineal definido por la relación (6.42).

Demostremos esta afirmación. Sea $\boldsymbol{e}$ una dirección fija cualquiera y supongamos que un punto M' se toma de una manera tal que el vector $\Delta \boldsymbol{r} = \rho \boldsymbol{e}$, y $|\Delta \boldsymbol{r}| = \rho$. Al sustituir este valor de $\Delta \boldsymbol{r}$ en la relación (6.42) y al aprovechar las propiedades de un operador lineal, encontramos

$$\Delta \boldsymbol{p} = \rho A\boldsymbol{e} + \boldsymbol{o}(\rho).$$

De aquí obtenemos la fórmula

$$\frac{\Delta \boldsymbol{p}}{\rho} = A\boldsymbol{e} + \frac{\boldsymbol{o}(\rho)}{\rho}. \tag{6.47}$$

De las relaciones (6.45) y (6.47) se deduce la fórmula (6.46). La afirmación queda demostrada.

Sea $\boldsymbol{p}(M)$ un campo diferenciable en el punto M del dominio Ω. Entonces,

$$\Delta \boldsymbol{p} = A\Delta \boldsymbol{r} + \boldsymbol{o}(|\Delta \boldsymbol{r}|).$$

Hallemos la matriz de un operador lineal A para el caso en que la base $\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}$ sea ortonormal. Convengamos en considerar que con dicha base está relacionado el sistema rectangular de coordenadas cartesianas $Oxyz$.

Denotemos con P, Q y R las coordenadas del campo vectorial $\boldsymbol{p}(M)$ en la base $\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}$. Es evidente que de conformidad con la fórmula (6.46),

$$\frac{\partial \boldsymbol{p}}{\partial \boldsymbol{i}} = \frac{\partial \boldsymbol{p}}{\partial x} = A\boldsymbol{i}, \quad \frac{\partial \boldsymbol{p}}{\partial \boldsymbol{j}} = \frac{\partial \boldsymbol{p}}{\partial y} = A\boldsymbol{j}, \quad \frac{\partial \boldsymbol{p}}{\partial \boldsymbol{k}} = \frac{\partial \boldsymbol{p}}{\partial z} = A\boldsymbol{k}.$$

A partir de estas fórmulas y de las relaciones (6.26) para la matriz de los coeficientes de un operador lineal en la base ortonormal $\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}$ se deduce que la matriz $\mathring{A}$ del operador en consideración A tiene por expresión

$$\mathring{A} = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial P}{\partial x} & \dfrac{\partial P}{\partial y} & \dfrac{\partial P}{\partial z} \\ \dfrac{\partial Q}{\partial x} & \dfrac{\partial Q}{\partial y} & \dfrac{\partial Q}{\partial z} \\ \dfrac{\partial R}{\partial x} & \dfrac{\partial R}{\partial y} & \dfrac{\partial R}{\partial z} \end{pmatrix}. \tag{6.48}$$

Introduzcamos el concepto *de divergencia* y *de rotor* para el campo vectorial $\boldsymbol{p}(M)$ diferenciable en un dominio Ω, esto es para tal campo cuyo incremento $\Delta \boldsymbol{p}$ en cada punto M del dominio Ω pueda ser representado en la forma

$$\Delta \boldsymbol{p} = A\Delta \boldsymbol{r} + \boldsymbol{o}(|\Delta \boldsymbol{r}|),$$

con la particularidad de que el operador A varía, en el caso general, al pasar de un punto del dominio Ω al otro. Dicho de otro modo, el operador depende del punto M y no depende, por supuesto, de $\Delta \boldsymbol{r}$.

Llamemos divergencia y rotor del campo $\boldsymbol{p}$ (M) *en un punto* M *del dominio* Ω *a la divergencia y al rotor del operador lineal* A. *De este modo por definición*,

$$\operatorname{div} \boldsymbol{p} = \operatorname{div} A, \quad \operatorname{rot} \boldsymbol{p} = \operatorname{rot} A. \tag{6.49}$$

OBSERVACIÓN. Admitida la suposición sobre la diferenciabilidad del campo $\boldsymbol{p}$ (M) en el dominio Ω, la divergencia $\operatorname{div} \boldsymbol{p}$ y el rotor $\operatorname{rot} \boldsymbol{p}$ están definidos en todo punto de Ω. Por cuanto estos entes son invariantes (no dependen de la elección de la base), resulta obvio que $\operatorname{div} \boldsymbol{p}$ es un campo escalar, y $\operatorname{rot} \boldsymbol{p}$, campo vectorial en el dominio Ω.

Hallemos las expresiones para la divergencia, el rotor y la derivada direccional de un campo vectorial diferenciable $\boldsymbol{p}$ (M), considerando que en un espacio se encuentra elegido la base ortonormal $\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}$, con la cual está ligado el sistema rectangular de coordenadas cartesianas $Oxyz$. Convengamos en considerar, como antes, que el campo $\boldsymbol{p}$ (M) tiene coordenadas P, Q, R en la base $\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}$.

Como la matriz $\mathring{A}$ del operador lineal A se define en este caso por la relación (6.48), y como, por definición, $\operatorname{div} \boldsymbol{p} = \operatorname{div} A$, $\operatorname{rot} \boldsymbol{p} = \operatorname{rot} A$ (véase (6.49), entonces, de acuerdo con las fórmulas (6.27) y (6.29), obtendremos

$$\operatorname{div} \boldsymbol{p} = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}, \tag{6.50}$$

$$\operatorname{rot} \boldsymbol{p} = \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right) \boldsymbol{i} + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right) \boldsymbol{j} + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) \boldsymbol{k}. \tag{6.51}$$

Para calcular la derivada del campo vectorial $\boldsymbol{p}$ (M) según la dirección de $\boldsymbol{e}$, hagamos uso de la fórmula (6.46) y de las propiedades del operador lineal.

Sea $\boldsymbol{e} = \boldsymbol{i} \cos \alpha + \boldsymbol{j} \cos \beta + \boldsymbol{k} \cos \gamma$ [1]. Entonces, de acuerdo con (6.46), obtendremos

$$\begin{aligned} \frac{\partial \boldsymbol{p}}{\partial \boldsymbol{e}} &= A\boldsymbol{e} = \cos \alpha A\boldsymbol{i} + \cos \beta A\boldsymbol{j} + \cos \gamma A\boldsymbol{k} = \\ &= \cos \alpha \frac{\partial \boldsymbol{p}}{\partial \boldsymbol{i}} + \cos \beta \frac{\partial \boldsymbol{p}}{\partial \boldsymbol{j}} + \cos \gamma \frac{\partial \boldsymbol{p}}{\partial \boldsymbol{k}} = \\ &= \cos \alpha \frac{\partial \boldsymbol{p}}{\partial x} + \cos \beta \frac{\partial \boldsymbol{p}}{\partial y} + \cos \gamma \frac{\partial \boldsymbol{p}}{\partial z}. \end{aligned}$$

De este modo, la derivada $\frac{\partial \boldsymbol{p}}{\partial \boldsymbol{e}}$ puede calcularse o bien según la fórmula

$$\frac{\partial \boldsymbol{p}}{\partial \boldsymbol{e}} = \cos \alpha \frac{\partial \boldsymbol{p}}{\partial x} + \cos \beta \frac{\partial \boldsymbol{p}}{\partial y} + \cos \gamma \frac{\partial \boldsymbol{p}}{\partial z}, \tag{6.52}$$

[1] Por cuanto $\boldsymbol{e}$ es un vector unidad, sus coordenadas tienen por expresión $\{\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma\}$, donde α, β y γ son los ángulos que forma este vector con los ejes Ox, Oy y Oz, respectivamente.

o bien, habida cuenta de que P, Q, R son coordenadas de $\boldsymbol{p}$ (M), según la fórmula

$$\frac{\partial \boldsymbol{p}}{\partial e}=\left(\frac{\partial P}{\partial x}\cos\alpha+\frac{\partial P}{\partial y}\cos\beta+\frac{\partial P}{\partial z}\cos\gamma\right)\boldsymbol{i}+$$
$$+\left(\frac{\partial Q}{\partial x}\cos\alpha+\frac{\partial Q}{\partial y}\cos\beta+\frac{\partial Q}{\partial z}\cos\gamma\right)\boldsymbol{j}+$$
$$+\left(\frac{\partial R}{\partial x}\cos\alpha+\frac{\partial R}{\partial y}\cos\beta+\frac{\partial R}{\partial z}\cos\gamma\right)\boldsymbol{k}. \tag{6.53}$$

4. Operaciones reiteradas de la teoría del campo. Convengamos en considerar que en un dominio Ω del espacio euclídeo E^3 están definidos un campo escalar u (M) de la clase C^2 [1]) y un campo vectorial $\boldsymbol{p}$ (M) de la clase C^2.

Admitidas estas suposiciones, grad u representa un campo vectorial diferenciable en Ω; div $\boldsymbol{p}$ es un campo escalar diferenciable y rot $\boldsymbol{p}$, un campo vectorial diferenciable. Por eso, resultan posibles las siguientes operaciones reiteradas:

rot grad u, div grad u, grad div $\boldsymbol{p}$, div rot $\boldsymbol{p}$, rot rot $\boldsymbol{p}$.

Demostremos que

$$\text{rot grad } u=0,\ \text{div rot } \boldsymbol{p}=0. \tag{6.54}$$

Para demostrar, calculemos rot grad u y div rot $\boldsymbol{p}$ en un sistema rectangular de coordenadas cartesianas. Por cuanto, en este caso, las coordenadas de grad u son $\frac{\partial u}{\partial x}$, $\frac{\partial u}{\partial y}$, $\frac{\partial u}{\partial z}$, entonces, en virtud de la fórmula (6.51), obtendremos

$$\text{rot grad } u=$$
$$=\left(\frac{\partial^2 u}{\partial y\,\partial z}-\frac{\partial^2 u}{\partial z\,\partial y}\right)\boldsymbol{i}+\left(\frac{\partial^2 u}{\partial z\,\partial x}-\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial z}\right)\boldsymbol{j}+\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y}-\frac{\partial^2 u}{\partial y\,\partial x}\right)\boldsymbol{k}=0.$$

De este modo, la primera de las igualdades (6.54) es válida para el sistema cartesiano de coordenadas. Por ser invariante la expresión rot grad u, la primera de las igualdades (6.54) queda demostrada. Demostremos la segunda igualdad. Volvamos de nuevo a un sistema cartesiano de coordenadas. De acuerdo con (6.51), en este sistema el campo vectorial rot $\boldsymbol{p}$ tiene por coordenadas $\left(\frac{\partial R}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial z}\right)$, $\left(\frac{\partial P}{\partial z}-\frac{\partial R}{\partial x}\right)$, $\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)$, donde P, Q, R son coordenadas del vector $\boldsymbol{p}$. De acuerdo con (6.50), la divergencia de un campo vectorial rot $\boldsymbol{p}$ en el sistema rectangular de coordenadas cartesianas es igual a la suma de derivadas de los componentes de dicho campo respecto de las coordena-

[1]) Una función pertenece a la clase C^k en el dominio Ω, si todas sus derivadas parciales de orden k son continuas.

das homónimas. De este modo,

$$\operatorname{div} \operatorname{rot} \boldsymbol{p} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) = 0.$$

Así pues, la segunda de las igualdades (6.54) es válida para el sistema de coordenadas cartesianas. Por ser invariante la expresión div rot $\boldsymbol{p}$, la segunda igualdad en (6.54) queda válida en cualquier sistema de coordenadas.

Una de las operaciones reiteradas principales en la teoría del campo es div grad u. Esta operación se denota brevemente por Δu, con la particularidad de que el símbolo Δ se denomina, corrientemente, operador de Laplace[1]). De este modo,

$$\Delta u = \operatorname{div} \operatorname{grad} u. \tag{6.55}$$

Calculemos el operador de Laplace en un sistema rectangular de coordenadas cartesianas. En tal sistema el campo vectorial grad u sus coordenadas $\frac{\partial u}{\partial x}$, $\frac{\partial u}{u y}$, $\frac{\partial u}{\partial z}$. Volviendo a la expresión (6.50) para la divergencia de un campo vectorial, obtendremos

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}. \tag{6.56}$$

Las operaciones reiteradas grad div $\boldsymbol{p}$ y rot rot $\boldsymbol{p}$ están entrelazadas por la correlación

$$\operatorname{rot} \operatorname{rot} \boldsymbol{p} = \operatorname{grad} \operatorname{div} \boldsymbol{p} - \Delta \boldsymbol{p}, \tag{6.57}$$

donde $\Delta \boldsymbol{p}$ es un vector cuyas coordenadas en la base $\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}$ son ΔP, ΔQ, ΔR (P, Q, R son coordenadas del campo vectorial $\boldsymbol{p}$ en la base $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{k}$). El lector mismo puede convencerse con facilidad de que (6.57) es válida.

§ 3. Expresión de las operaciones fundamentales de la teoría del campo en coordenadas curvilíneas

1. Coordenadas curvilíneas. Sea Ω un dominio de un espacio euclídeo E^3; y sean x, y, z, las coordenadas cartesianas en dicho espacio. Supongamos, además, que $\tilde{\Omega}$ es un dominio de un espacio euclídeo $\tilde{E}^3$, mientras que x^1, x^2, x^3, las coordenadas cartesianas en $\tilde{E}^3$.

Examinemos una aplicación biunívoca y recíprocamente continua del dominio $\tilde{\Omega}$ sobre el Ω, la cual se realiza mediante las funciones

$$x = x(x^1, x^2, x^3),\ y = y(x^1, x^2, x^3),\ z = z(x^1, x^2, x^3). \tag{6.58}$$

---

[1]) P. S. Laplace (1749—1827), destacado astrónomo, físico y matemático francés.

Con ayuda de la aplicación mencionada se introducen en el dominio Ω las coordenadas curvilíneas x^1, x^2, x^3. El sentido de esta denominación lo esclarecen fácilmente los siguientes razonamientos. Primero, a todo punto M (x, y, z) del dominio Ω se le ponen en correspondencia tres números x^1, x^2, x^3. Para ser más preciso el punto M se predetermina por una terna de números x^1, x^2, x^3. Exactamente a esto se debe la denominación «coordenadas» del punto M para los números x^1, x^2, x^3. Segundo, si en los miembros derechos de las relaciones (6.58) son fijas algunas coordenadas, x^2 y x^3, por ejemplo, dichas relaciones

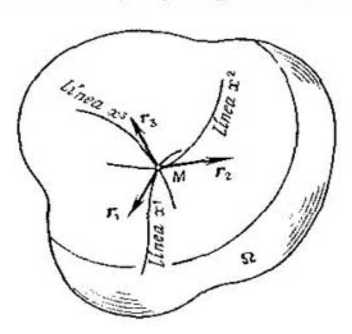


Fig. 6.2.

definen, para x^1 variable, cierta línea en Ω, la cual, generalmente, se diferencia de una recta. Resulta natural llamarla *línea coordenada* x^1, subrayando con ello que en los puntos de la citada línea varía sólo la coordenada x^1. Por analogía completa se definen las líneas coordenadas x^2 y x^3. En general, las líneas coordenadas x^1, x^2, x^3 no serán rectas, a lo que se debe el término «coordenadas curvilíneas».

Se ha puesto en claro que por todo punto M del dominio Ω pasan tres líneas coordenadas x^1, x^2, x^3 (fig. 6.2.). Construyamos en el punto M una base r_1, r^i ligada de un modo natural con las líneas coordenadas que pasan por el mismo punto. Hagamos uso en este caso de las relaciones (6.58). Evidentemente, las derivadas $\frac{\partial x}{\partial x^1}, \frac{\partial y}{\partial x^1}, \frac{\partial z}{\partial x^1}$, calculadas en el punto M, representan las coordenadas del vector de la tangente a la línea x^1 en este punto. Designemos este vector con r_1. De un modo análogo construimos los vectores r_2 y r_3 de las tangentes a las líneas x^2 y x^3, respectivamente. De este modo,

$$r_k = \left\{ \frac{\partial x}{\partial x^k}, \frac{\partial y}{\partial x^k}, \frac{\partial z}{\partial x^k} \right\}, \quad k = 1, 2, 3. \qquad (6.59)$$

Para que los vectores $\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{r}_2, \boldsymbol{r}_3$ formen una base, hace falta exigir que estos vectores no sean coplanares. Una condición suficiente para que se cumpla dicha exigencia consiste, evidentemente, en que el jacobiano

$$\frac{\mathcal{D}(x, y, z)}{\mathcal{D}(x^1, x^2, x^3)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial x^1} & \frac{\partial y}{\partial x^1} & \frac{\partial z}{\partial x^1} \\ \frac{\partial x}{\partial x^2} & \frac{\partial y}{\partial x^2} & \frac{\partial z}{\partial x^2} \\ \frac{\partial x}{\partial x^3} & \frac{\partial y}{\partial x^3} & \frac{\partial z}{\partial x^3} \end{vmatrix}$$

no se reduzca a cero, pues dicho jacobiano es igual al producto mixto de los vectores $\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{r}_2, \boldsymbol{r}_3$. Con ayuda de la base construida $\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{r}_2, \boldsymbol{r}_3$ se construye de un modo estándar la base recíproca $\boldsymbol{r}^1, \boldsymbol{r}^2, \boldsymbol{r}^3$.

Así pues, si en el dominio Ω están introducidas las coordenadas x^1, x^2, x^3, con cada punto M de este dominio se ligan de un modo natural los vectores básicos $\boldsymbol{r}_i, \boldsymbol{r}^i$. Veamos los ejemplos.

1°. *Sistema de coordenadas cilíndricas.* Este sistema de coordenadas se introduce con ayuda de las relaciones

$$x = \rho \cos \varphi, \quad y = \rho \operatorname{sen} \varphi, \quad z = z. \tag{6.60}$$

De este modo, $x^1 = \rho$, $x^2 = \varphi$, $x^3 = z$. Se conoce que las coordenadas citadas ρ, φ, z (o bien, que es lo mismo, x^1, x^2, x^3) varían dentro de los siguientes límites[1]):

$$0 \leqslant \rho < +\infty, \quad 0 \leqslant \varphi < 2\pi, \quad -\infty < z < \infty.$$

Las desigualdades aducidas definen en el espacio euclídeo $\widetilde{E}^3$ con las coordenadas ρ, φ, z (o bien x^1, x^2, x^3) un dominio infinito $\widetilde{\Omega}$, expuesto en la fig. 6.3. Por consiguiente, la introducción de las coordenadas cilíndricas en el espacio euclídeo E^3 puede considerarse como resultado de la aplicación del dominio $\widetilde{\Omega}$ del espacio $\widetilde{E}^3$ en el espacio E^3 con ayuda de las fórmulas (6.60).

Evidentemente, las líneas coordenadas ρ (o líneas x^1) representan unas rectas que pasan por el eje Oz, siendo perpendiculares con relación a dicho eje; las líneas coordenadas φ (líneas x^2) son circunferencias con centro en el eje Oz cuyos planos son paralelos al plano Oxy. Las líneas coordenadas z (líneas x^3) son rectas paralelas al eje Oz (véase fig. 6.3.). Hallemos los vectores $\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{r}_2, \boldsymbol{r}_3$ y $\boldsymbol{r}^1, \boldsymbol{r}^2, \boldsymbol{r}^3$. Se tiene

$$\boldsymbol{r}_1 = \left\{\frac{\partial x}{\partial \rho}, \frac{\partial y}{\partial \rho}, \frac{\partial z}{\partial \rho}\right\} = \{\cos \varphi, \operatorname{sen} \varphi, 0\},$$

$$\boldsymbol{r}_2 = \left\{\frac{\partial x}{\partial \varphi}, \frac{\partial y}{\partial \varphi}, \frac{\partial z}{\partial \varphi}\right\} = \{-\rho \operatorname{sen} \varphi, \rho \cos \varphi, 0\},$$

$$\boldsymbol{r}_3 = \left\{\frac{\partial x}{\partial z}, \frac{\partial y}{\partial z}, \frac{\partial z}{\partial z}\right\} = \{0, 0, 1\}.$$

[1]) Véase «Geometría analítica» del curso presente.

Destaquemos que las expresiones entre corchetes representan las coordenadas cartesianas de los vectores básicos $\boldsymbol{r}_1$, $\boldsymbol{r}_2$ y $\boldsymbol{r}_3$. Podemos convencernos directamente de que la base $\boldsymbol{r}_1$, $\boldsymbol{r}_2$, $\boldsymbol{r}_3$ es ortogonal.

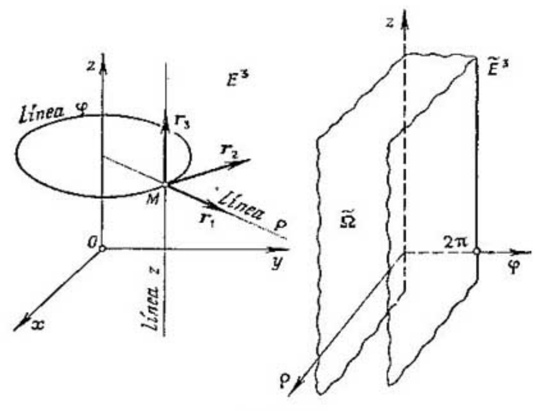


Fig. 6.3.

Con el fin de calcular la base recíproca hagamos uso de las fórmulas aducidas en el p. 1, § 1 de este capítulo. Tenemos

$$\boldsymbol{r}_1\boldsymbol{r}_2\boldsymbol{r}_3 = \begin{vmatrix} \cos\varphi & \operatorname{sen}\varphi & 0 \\ -\rho\operatorname{sen}\varphi & \rho\cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \rho,$$

$$[\boldsymbol{r}_2\boldsymbol{r}_3] = \{\rho\cos\varphi,\ \rho\operatorname{sen}\varphi,\ 0\},$$
$$[\boldsymbol{r}_3\boldsymbol{r}_1] = \{-\operatorname{sen}\varphi,\ \cos\varphi,\ 0\},$$
$$[\boldsymbol{r}_1\boldsymbol{r}_2] = \{0,\ 0,\ \rho\}.$$

Por eso,

$$\boldsymbol{r}^1 = \frac{[\boldsymbol{r}_2\boldsymbol{r}_3]}{\boldsymbol{r}_1\boldsymbol{r}_2\boldsymbol{r}_3} = \{\cos\varphi,\ \operatorname{sen}\varphi,\ 0\},$$
$$\boldsymbol{r}^2 = \frac{[\boldsymbol{r}_3\boldsymbol{r}_1]}{\boldsymbol{r}_1\boldsymbol{r}_2\boldsymbol{r}_3} = \left\{-\frac{1}{\rho}\operatorname{sen}\varphi,\ \frac{1}{\rho}\cos\varphi,\ 0\right\},$$
$$\boldsymbol{r}^3 = \frac{[\boldsymbol{r}_1\boldsymbol{r}_2]}{\boldsymbol{r}_1\boldsymbol{r}_2\boldsymbol{r}_3} = \{0,\ 0,\ 1\}.$$

2°. *Sistema de coordenadas esféricas.* Este sistema de coordenadas se introduce con ayuda de las relaciones

$$x = \rho\operatorname{sen}\theta\cos\varphi,\ y = \rho\operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}\varphi,\ z = \rho\cos\theta. \qquad (6.61)$$

De este modo, $x^1 = \rho$, $x^2 = \varphi$, $x^3 = \theta$. Se conoce que las coordenadas citadas ρ, φ, θ (o bien, que es lo mismo, x^1, x^2, x^3) varían dentro de los siguientes límites:

$$0 \leqslant \rho < +\infty, \quad 0 \leqslant \varphi < 2\pi, \quad 0 \leqslant \theta \leqslant \pi. \tag{6.62}$$

Las desigualdades (6.62) definen en el espacio euclídeo $\widetilde{E}^3$ con las coordenadas ρ, φ, θ (o bien x^1, x^2, x^3) un dominio infinito $\widetilde{\Omega}$ expuesto en la fig. 6.4. Por eso, la introducción de las coordenadas esféricas en el espacio euclídeo $\widetilde{E}^3$ puede considerarse como resultado de la aplicación del dominio $\widetilde{\Omega}$ del espacio $\widetilde{E}^3$ en el espacio E^3 con ayuda de las fórmulas (6.61).

Es evidente que las líneas coordenadas ρ (o líneas x^1) representan unos rayos que salen del origen de coordenadas; las líneas coordenadas φ (líneas x^2) son circunferencias con centros en el eje Oz cuyos planos son paralelos al plano Oxy; las líneas coordenadas θ (líneas x^3) son semicircunferencias cuyos centros se disponen en el origen de coordenadas y cuyos planos pasan por el eje Oz (véase fig. 6.4).

Hallemos los vectores $\boldsymbol{r}_1$, $\boldsymbol{r}_2$, $\boldsymbol{r}_3$ y $\boldsymbol{r}^1$, $\boldsymbol{r}^2$, $\boldsymbol{r}^3$. Tenemos

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{r}_1 &= \{\operatorname{sen}\theta\cos\varphi, \quad \operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}\varphi, \quad \cos\theta\},\\
\boldsymbol{r}_2 &= \{-\rho\operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}\varphi, \quad \rho\operatorname{sen}\theta\cos\varphi, \quad 0\},\\
\boldsymbol{r}_3 &= \{\rho\cos\theta\cos\varphi, \quad \rho\cos\theta\operatorname{sen}\varphi, \quad -\rho\operatorname{sen}\theta\}.
\end{aligned}$$

Inmediatamente podemos convencernos de que la base $\boldsymbol{r}_1$, $\boldsymbol{r}_2$, $\boldsymbol{r}_3$ es ortogonal. Para calcular la base recíproca, hagamos uso de las fórmulas aducidas en el p. 1, § 1 de este capítulo. Se tiene

$$\boldsymbol{r}_1\boldsymbol{r}_2\boldsymbol{r}_3 = \begin{vmatrix} \operatorname{sen}\theta\cos\varphi & \operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}\varphi & \cos\theta \\ -\rho\operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}\varphi & \rho\operatorname{sen}\theta\cos\varphi & 0 \\ \rho\cos\theta\cos\varphi & \rho\cos\theta\operatorname{sen}\varphi & -\rho\operatorname{sen}\theta \end{vmatrix} = -\rho^2\operatorname{sen}\theta,$$

$$\begin{aligned}
[\boldsymbol{r}_2\boldsymbol{r}_3] &= \{-\rho^2\operatorname{sen}^2\theta\cos\varphi, \quad -\rho^2\operatorname{sen}^2\theta\operatorname{sen}\varphi, \quad -\rho^2\operatorname{sen}\theta\cos\theta\},\\
[\boldsymbol{r}_3\boldsymbol{r}_1] &= \{\rho\operatorname{sen}\varphi, \quad \rho\cos\varphi, \quad 0\},\\
[\boldsymbol{r}_1\boldsymbol{r}_2] &= \{-\rho\cos\theta\operatorname{sen}\theta\cos\varphi, \quad -\rho\cos\theta\operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}\varphi, \quad \rho\operatorname{sen}^2\theta\}.
\end{aligned}$$

Por eso,

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{r}^1 &= \frac{[\boldsymbol{r}_2\boldsymbol{r}_3]}{\boldsymbol{r}_1\boldsymbol{r}_2\boldsymbol{r}_3} = \{\operatorname{sen}\theta\cos\varphi, \quad \operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}\varphi, \quad \cos\theta\},\\
\boldsymbol{r}^2 &= \frac{[\boldsymbol{r}_3\boldsymbol{r}_1]}{\boldsymbol{r}_1\boldsymbol{r}_2\boldsymbol{r}_3} = \left\{-\frac{1}{\rho}\frac{\operatorname{sen}\varphi}{\operatorname{sen}\theta}, \quad -\frac{1}{\rho}\frac{\cos\varphi}{\operatorname{sen}\theta}, \quad 0\right\},\\
\boldsymbol{r}^3 &= \frac{[\boldsymbol{r}_1\boldsymbol{r}_2]}{\boldsymbol{r}_1\boldsymbol{r}_2\boldsymbol{r}_3} = \left\{\frac{1}{\rho}\cos\theta\cos\varphi, \quad \frac{1}{\rho}\cos\theta\operatorname{sen}\varphi, \quad -\frac{1}{\rho}\operatorname{sen}\theta\right\}.
\end{aligned}$$

3°. *Sistema ortogonal de coordenadas curvilíneas.* Un sistema de coordenadas curvilíneas se llamará *ortogonal*, si en todo punto de un dominio Ω la base $\boldsymbol{r}_i$, definida por la igualdad (6.59), es ortogonal.

Los sistemas de coordenadas cilíndricas y esféricas que acabamos de estudiar intervienen como ejemplos de coordenadas curvilíneas ortogonales.

Obtengamos la expresión para los vectores r^i de la base recíproca para el caso de un sistema ortogonal de coordenadas. Introduzcamos las siguientes designaciones:

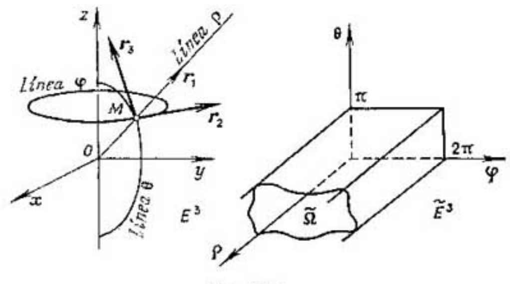


Fig. 6.4.

$$H_1 = |r_1|, \quad H_2 = |r_2|, \quad H_3 = |r_3|.$$

Las magnitudes H_1, H_2, H_3 se denominan, de ordinario, *coeficientes* o *parámetros de Lamé*[1]).

Por cuanto el sistema de coordenadas es ortogonal y la terna de vectores r_1, r_2, r_3 es derecha, tenemos

$$r_1r_2r_3 = H_1H_2H_3, \quad [r_2r_3] = \frac{H_2H_3}{H_1} r_1,$$

$$[r_3r_1] = \frac{H_3H_1}{H_2} r_2, \quad [r_1r_2] = \frac{H_1H_2}{H_3} r_3.$$

Haciendo uso de estas relaciones y de las fórmulas que expresan los vectores de la base recíproca en términos de los vectores r_i (véase p. 1. § 1 de este capítulo), obtendremos

$$r^1 = \frac{1}{H_1^2} r_1, \quad r^2 = \frac{1}{H_2^2} r_2, \quad r^3 = \frac{1}{H_3^2} r_3.$$

2. Expresiones del gradiente y de la derivada direccional para un campo escalar en las coordenadas curvilíneas. Supongamos que en un dominio Ω, donde vienen introducidas las coordenadas curvilíneas x^1, x^2, x^3, está definido un campo escalar $u(M)$. En estas condiciones grad u queda definido en cada punto de Ω y en cada punto del mismo puede calcularse según cualquier dirección e una derivada $\frac{\partial u}{\partial e}$. Tanto

[1]) G. Lamé (1795—1870), matemático francés.

el gradiente grad u, como también la derivada direccional en un punto dado M, se referirán a la base r_i, r^i en dicho punto, cuya construcción está escrita en el punto anterior.

1°. *Expresión del gradiente de un campo escalar en coordenadas curvilíneas.* Introducidas en el dominio Ω las coordenadas cirvilíneas x^1, x^2, x^3, el campo vectorial u será, evidentemente, una función de las variables x^1, x^2, x^3:

$$u = u(x^1, x^2, x^3).$$

Esta función puede ser considerada como resultado de la superposición de la función $u(x, y, z)$ de las variables x, y, z y de las funciones (6.58). Por eso, con el objeto de calcular las derivadas $\frac{\partial u}{\partial x^1}$, podemos aprovechar la regla de diferenciación de una función compuesta. Designando $\frac{\partial u}{\partial x^i}$ con u_i, obtendremos

$$u_i = \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial x^i} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial x^i} + \frac{\partial u}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x^i}. \tag{6.63}$$

Por cuanto $\frac{\partial u}{\partial x}$, $\frac{\partial u}{\partial y}$, $\frac{\partial u}{\partial z}$ son coordenadas del vector grad u en la base i, j, k, ligada con el sistema $Oxyz$, y ya que $\frac{\partial x}{\partial x^i}$, $\frac{\partial y}{\partial x^i}$, $\frac{\partial z}{\partial x^i}$ representan coordenadas del vector r_i, entonces, evidentemente, la correlación (6.53) puede reescribirse en la siguiente forma

$$u_i = r_i \operatorname{grad} u. \tag{6.64}$$

Sirviéndonos de la fórmula de Gibbs (véanse (6.6) de este capítulo) para el vector grad u y de la fórmula (6.64), obtendremos

$$\operatorname{grad} u = (r_i \operatorname{grad} u)\, r^i = u_i r^i.$$

Así pues, el gradiente del campo escalar u en las coordenadas curvilíneas tiene por expresión

$$\operatorname{grad} u = u_i r^i \left(u_i = \frac{\partial u}{\partial x^i}\right). \tag{6.65}$$

En la práctica se encuentra frecuentemente el caso de un sistema ortogonal de coordenadas curvilíneas. En el punto antecedente se ha obtenido (véase p. 3°) la expresión para los vectores r^i de la base recíproca para el sistema ortogonal. Haciendo uso de estas expresiones y de la fórmula (6.65), hallemos para grad u en las coordenadas ortogonales la siguiente fórmula

$$\operatorname{grad} u = \frac{1}{H_1^2}\frac{\partial u}{\partial x^1} r_1 + \frac{1}{H_2^2}\frac{\partial u}{\partial x^2} r_2 + \frac{1}{H_3^2}\frac{\partial u}{\partial x^3} r_3. \tag{6.66}$$

A la par con la base ortogonal $\boldsymbol{r}_i$, se examina una base ortonormal $\boldsymbol{e}_i = \boldsymbol{r}_i / H_i$. Es fácil ver que en la base $\boldsymbol{e}_i$ la expresión para grad u tiene la forma siguiente

$$\operatorname{grad} u = \frac{1}{H_1}\frac{\partial u}{\partial x^1}\boldsymbol{e}_1 + \frac{1}{H_2}\frac{\partial u}{\partial x^2}\boldsymbol{e}_2 + \frac{1}{H_3}\frac{\partial u}{\partial x^3}\boldsymbol{e}_3. \qquad (6.67)$$

2°. *Expresión de la derivada del campo escalar u (M) según la dirección de $\boldsymbol{e}$ en las coordenadas curvilíneas.* Sean e^i las coordenadas contravariantes del vector unidad $\boldsymbol{e}$ en la base $\boldsymbol{r}_i$, de suerte que

$$\boldsymbol{e} = e^k \boldsymbol{r}_k.$$

Para la derivada $\frac{\partial u}{\partial e}$ hemos obtenido en el p.2, § 2 de este capítulo la siguiente fórmula:

$$\frac{\partial u}{\partial e} = \boldsymbol{e} \cdot \operatorname{grad} u$$

(véase la fórmula (6.40)). Al sustituir en esta fórmula la expresión para $\boldsymbol{e}$ en la base $\boldsymbol{r}_i$ y la fórmula (6.65) para grad u, obtendremos

$$\frac{\partial u}{\partial e} = (e^k \boldsymbol{r}_k)(u_i \boldsymbol{r}^i) = e^k u_i (\boldsymbol{r}_k \boldsymbol{r}^i) = e^k u_i \delta_k^i = u_i e^i.$$

Por consiguiente, la derivada del campo escalar u según la dirección $\boldsymbol{e}$ se expresa en las coordenadas curvilíneas del modo siguiente:

$$\frac{\partial u}{\partial e} = u_i e^i. \qquad (6.68)$$

3. Expresiones de la divergencia, del rotor y de la derivada direccional para un campo vectorial en las coordenadas curvilíneas. Supongamos que sobre un dominio Ω, en el que están introducidas las coordenadas curvilíneas, viene dado un campo vectorial diferenciable $\boldsymbol{p}$ (M). En estas condiciones la divergencia y el rotor del campo $\boldsymbol{p}$ están definidos en cada punto del dominio Ω, y en cada punto del mismo puede calcularse una derivada $\frac{\partial \boldsymbol{p}}{\partial e}$ según cualquier dirección de $\boldsymbol{e}$. La divergencia, el rotor y la derivada direccional en un punto dado M se referirán a la base $\boldsymbol{r}_i$, $\boldsymbol{r}^i$ en dicho punto.

1°. *Expresión de la divergencia de un campo vectorial en las coordenadas curvilíneas.* Introducidas en el dominio Ω las coordenadas curvilíneas x^1, x^2, x^3, el campo vectorial $\boldsymbol{p}$ será, evidentemente, una función de las variables x^1, x^2, x^3:

$$\boldsymbol{p} = \boldsymbol{p}(x^1, x^2, x^3).$$

Esta función puede considerarse como resultado de la superposición de la función $\boldsymbol{p}(x, y, z)$ y de la función (6.58). Por eso, para el cálculo de las derivadas $\frac{\partial \boldsymbol{p}}{\partial x^i}$, podemos aplicar la regla de diferenciación de una función compuesta. Designando $\frac{\partial \boldsymbol{p}}{\partial x^i}$ con $\boldsymbol{p}_i$,

obtendremos

$$p_i = \frac{\partial p}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial x^i} + \frac{\partial p}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial x^i} + \frac{\partial p}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x^i}. \qquad (6.69)$$

Por cuanto $\frac{\partial p}{\partial x} = Ai$, $\frac{\partial p}{\partial y} = Aj$, $\frac{\partial p}{\partial z} = Ak$, donde A es un operador lineal definido por la igualdad $\Delta p = A\Delta r + o(|\Delta r|)$ (véase p. 3, § 2 de este capítulo), entonces, de las relaciones (6.69) obtenemos, teniendo presentes las propiedades del operador lineal:

$$p_i = A\left(\frac{\partial x}{\partial x^i} i + \frac{\partial y}{\partial x^i} j + \frac{\partial z}{\partial x^i} k\right) = Ar_i. \qquad (6.70)$$

Por definición, div p = div $A = r^i A r_i$. Por eso, de acuerdo con la fórmula (6.70), la divergencia del campo vectorial $p(M)$ en el sistema de coordenadas curvilíneas puede calcularse según la fórmula

$$\operatorname{div} p = r^i p_i \left(p_i = \frac{\partial p}{\partial x^i}\right). \qquad (6.71)$$

Hallemos la expresión de la divergencia para el caso de un sistema ortogonal de coordenadas curvilíneas. Empleando la expresión para los vectores r^i de la base recíproca para las coordenadas curvilíneas ortogonales y la fórmula (6.71), obtenemos

$$\operatorname{div} p = \frac{1}{H_1^2} p_1 r_1 + \frac{1}{H_2^2} p_2 r_2 + \frac{1}{H_3^2} p_3 r_3 \left(p_i = \frac{\partial p}{\partial x^i}\right). \qquad (6.72)$$

La fórmula (6.72) puede ser escrita también en una forma diferente. Denotemos con P^i las coordenadas del campo p en la base ortonormal $e_i = \frac{r_i}{H_i}$ [1]). Entonces, tras una serie de transformaciones, la expresión (6.72) para div p adquiere una forma

$$\operatorname{div} p = \frac{1}{H_1 H_2 H_3}\left[\frac{\partial (P^1 H_2 H_3)}{\partial x^1} + \frac{\partial (P^2 H_3 H_1)}{\partial x^2} + \frac{\partial (P^3 H_1 H_2)}{\partial x^3}\right]. \qquad (6.73)$$

2°. *Expresión del rotor de un campo vectorial en las coordenadas curvilíneas.* Por definición, rot p = rot $A = [r^i A r_i]$. Por eso, de acuerdo con la fórmula (6.70), obtenemos

$$\operatorname{rot} p = [r^i p_i]\left(p_i = \frac{\partial p}{\partial x^i}\right). \qquad (6.74)$$

Hallemos la expresión del rotor en un sistema ortogonal de coordenadas curvilíneas. Sirviéndonos de la expresión para los vectores r^i de la base recíproca para el sistema ortogonal y de la fórmula (6.74), obtenemos

$$\operatorname{rot} p = \frac{1}{H_1^2}[r_1 p_1] + \frac{1}{H_2^2}[r_2 p_2] + \frac{1}{H_3^2}[r_3 p_3]\left(p_i = \frac{\partial p}{\partial x^i}\right). \qquad (6.75)$$

---

[1]) En el segundo miembro de esta fórmula la sumación respecto del índice i no se realiza.

En la base ortonormal $e_i = \frac{r_i}{H_i}$ el rotor del campo vectorial $\boldsymbol{p}$ tiene por sus coordenadas

$$\left\{ \frac{1}{H_2 H_3}\left[\frac{\partial (P^3 H_3)}{\partial x^2} - \frac{\partial (P^2 H_2)}{\partial x^3}\right], \ \frac{1}{H_3 H_1}\left[\frac{\partial (P^1 H_1)}{\partial x^3} - \frac{\partial (P^3 H_3)}{\partial x^1}\right], \right.$$
$$\left. \frac{1}{H_1 H_2}\left[\frac{\partial (P^2 H_2)}{\partial x^1} - \frac{\partial (P^1 H_1)}{\partial x^2}\right]\right\}. \qquad (6.76)$$

3°. *Expresión para la derivada direccional del campo vectorial en las coordenadas curvilíneas.* Hagamos uso de la fórmula

$$\frac{\partial \boldsymbol{p}}{\partial e} = A\boldsymbol{e}, \qquad (6.46)$$

obtenida en el p.3, § 2 de este capítulo. Sea $\boldsymbol{e} = e^i \boldsymbol{r}_i$. De la fórmula (6.46) obtenemos, teniendo presentes las propiedades del operador:

$$\frac{\partial \boldsymbol{p}}{\partial e} = e^i A \boldsymbol{r}_i.$$

Por cuanto $A\boldsymbol{r}_i = \boldsymbol{p}_i$, donde $\boldsymbol{p}_i = \frac{\partial \boldsymbol{p}}{\partial x^i}$, obtenemos la siguiente expresión para la derivada del campo vectorial $\boldsymbol{p}$ según la dirección de $\boldsymbol{e}$:

$$\frac{\partial \boldsymbol{p}}{\partial e} = e^i \boldsymbol{p}_i. \qquad (6.77)$$

4. Expresión del operador de Laplace en las coordenadas curvilíneas ortogonales. Definimos el operador de Laplace Δu como una operación reiterada div grad u. Aprovechando las expresiones (6.67) y (6.73) para el gradiente y la divergencia en las coordenadas curvilíneas ortogonales, obtendremos una expresión para el operador de Laplace.

En el caso que se considera como campo vectorial $\boldsymbol{p}$, cuya divergencia ha de ser calculada, interviene el campo grad u. Al sistituir (6.67) en (6.73), obtendremos

$$\Delta u = \frac{1}{H_1 H_2 H_3}\left[\frac{\partial}{\partial x^1}\left(\frac{H_2 H_3}{H_1}\frac{\partial u}{\partial x^1}\right) + \frac{\partial}{\partial x^2}\left(\frac{H_3 H_1}{H_2}\frac{\partial u}{\partial x^2}\right) + \right.$$
$$\left. + \frac{\partial}{\partial x^3}\left(\frac{H_1 H_2}{H_3}\frac{\partial u}{\partial x^3}\right)\right]. \qquad (6.78)$$

5. Expresión de las operaciones principales de la teoría del campo en los sistemas de coordenadas cilíndricas y esféricas.

1°. *Sistema de coordenadas cilíndricas.* En virtud de los resultados obtenidos en 1°, p.1, § 3, los parámetros de Lamé para las coordenadas cilíndricas tienen por expresión

$$H_1 = 1, \quad H_2 = \rho, \quad H_3 = 1$$

En tal caso, de las fórmulas (6.67), (6.73), (6.76) y (6.78) se desprenden las siguientes igualdades:

$$\operatorname{grad} u=\frac{\partial u}{\partial \rho} e_{\rho}+\frac{1}{\rho} \frac{\partial u}{\partial \varphi} e_{\varphi}+\frac{\partial u}{\partial z} e_{z},$$

$$\operatorname{div} \boldsymbol{p}=\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho}(\rho P_{\rho})+\frac{1}{\rho} \frac{\partial P_{\varphi}}{\partial \varphi}+\frac{\partial P_{z}}{\partial z},$$

$$\operatorname{rot} \boldsymbol{p}=\left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial P_{z}}{\partial \varphi}-\frac{\partial P_{\varphi}}{\partial z}\right) e_{\rho}+\left(\frac{\partial P_{\rho}}{\partial z}-\frac{\partial P_{z}}{\partial \rho}\right) e_{\varphi}+\left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial(\rho P_{\varphi})}{\partial \rho}-\frac{1}{\rho} \frac{\partial P_{\rho}}{\partial \varphi}\right) e_{z},$$

$$\Delta u=\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho}\left(\rho \frac{\partial u}{\partial \rho}\right)+\frac{1}{\rho^{2}} \frac{\partial^{2} u}{\partial \varphi^{2}}+\frac{\partial^{2} u}{\partial z^{2}}.$$

2°. *Sistema de coordenadas esféricas.* En este caso los parámetros de Lamé tienen por expresión

$$H_{1}=1, \quad H_{2}=\rho \operatorname{sen} \theta, \quad H_{3}=\rho.$$

Por consiguiente,

$$\operatorname{grad} u=\frac{\partial u}{\partial \rho} e_{\rho}+\frac{1}{\rho \operatorname{sen} \theta} \frac{\partial u}{\partial \varphi} e_{\varphi}+\frac{1}{\rho} \frac{\partial u}{\partial \theta} e_{\theta},$$

$$\operatorname{div} \boldsymbol{p}=\frac{1}{\rho^{2}} \frac{\partial}{\partial \rho}(\rho^{2} P_{\rho})+\frac{1}{\rho \operatorname{sen} \theta} \frac{\partial P_{\varphi}}{\partial \varphi}+\frac{1}{\rho \operatorname{sen} \theta} \frac{\partial}{\partial \theta}(\operatorname{sen} \theta P_{\theta}),$$

$$\operatorname{rot} \boldsymbol{p}=\frac{1}{\rho \operatorname{sen} \theta}\left(\frac{\partial(\operatorname{sen} \theta P_{\varphi})}{\partial \theta}-\frac{\partial P_{\theta}}{\partial \varphi}\right) e_{\rho}+\left(\frac{1}{\rho \operatorname{sen} \theta} \frac{\partial P_{\rho}}{\partial \varphi}-\frac{1}{\rho} \frac{\partial(\rho P_{\varphi})}{\partial \rho}\right) e_{\theta}+\left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial(\rho P_{\theta})}{\partial \rho}-\frac{1}{\rho} \frac{\partial P_{\rho}}{\partial \theta}\right) e_{\varphi},$$

$$\Delta u=\frac{1}{\rho^{2}} \frac{\partial}{\partial \rho}\left(\rho^{2} \frac{\partial u}{\partial \rho}\right)+\frac{1}{\rho^{2} \operatorname{sen} \theta} \frac{\partial}{\partial \theta}\left(\operatorname{sen} \theta \frac{\partial u}{\partial \theta}\right)+\frac{1}{\rho^{2} \operatorname{sen}^{2} \theta} \frac{\partial^{2} u}{\partial \varphi^{2}}.$$

Como conclusión de este capítulo aducimos el sumario de fórmulas que ligan las operaciones de cálculo del gradiente, de la divergencia y del rotor con las operaciones algebraicas:

1°. $\operatorname{grad}(u \pm v)=\operatorname{grad} u \pm \operatorname{grad} v$.

2°. $\operatorname{grad}(u \cdot v)=u \operatorname{grad} v+v \operatorname{grad} u$.

3°. $\operatorname{grad}\left(\frac{u}{v}\right)=\frac{v \operatorname{grad} u-u \operatorname{grad} v}{v^{2}} \quad (v \neq 0)$.

4°. $\operatorname{div}(\boldsymbol{p} \pm \boldsymbol{q})=\operatorname{div} \boldsymbol{p} \pm \operatorname{div} \boldsymbol{q}$.

5°. $\operatorname{div}(u \boldsymbol{p})=\boldsymbol{p} \operatorname{grad} u+u \operatorname{div} \boldsymbol{p}$.

6°. $\operatorname{div}[\boldsymbol{p} \boldsymbol{q}]=\boldsymbol{q} \operatorname{rot} \boldsymbol{p}-\boldsymbol{p} \operatorname{rot} \boldsymbol{q}$.

7°. $\operatorname{rot}[\boldsymbol{p} \pm \boldsymbol{q}]=\operatorname{rot} \boldsymbol{p} \pm \operatorname{rot} \boldsymbol{q}$.

8°. $\operatorname{rot}(u \boldsymbol{p})=u \operatorname{rot} \boldsymbol{p}-[\boldsymbol{p} \operatorname{grad} u]$.

El lector mismo puede convencerse de la validez de estas fórmulas.

NOTAS CONCLUSIVAS. En este capítulo hicimos conocimiento con las operaciones principales de la teoría del campo sin apoyarnos en representaciones físicas, puesto que nos servía de objetivo la construcción del aparato matemático. En el capítulo siguiente obtendremos una serie de importantes relaciones integrales que ligan algunas de las operaciones de la teoría del campo. Estas relaciones nos permitirán señalar la interpretación física de las nociones y operaciones introducidas en el presente capítulo.

Capítulo 7

FÓRMULAS DE GREEN, STOKES Y OSTROGRADSKI

En este capítulo obtendremos fórmulas importantes que son de gran papel en diferentes aplicaciones y, en particular, en la teoría del campo. Estas fórmulas representan, en un sentido determinado, generalizaciones para el caso multidimensional de la fórmula de Newton—Leibniz elaborada para las integrales unidimensionales.

§ 1. Fórmula de Green[1])

1. Formulación del teorema fundamental. Sea D un dominio finito, múltiplemente conexo, en el caso general, sobre un plano Oxy con la frontera suave a trozos L[2]). El dominio D con la frontera L juntada se denotará con $\overline{D}$. Resulta válido el siguiente teorema fundamental.

Teorema 7.1. *Supongamos que las funciones $P(x, y)$ y $Q(x, y)$ son continuas en $\overline{D}$ y tienen derivadas parciales continuas de primer orden en D. Si existen integrales impropias, extendidas al dominio D, de cada una de las derivadas parciales de las funciones $P(x, y)$ y $Q(x, y)$* [3]), *queda válida una relación*

$$\iint\limits_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dx\, dy = \oint\limits_L P\, dx + Q\, dy, \tag{7.1}$$

llamada fórmula de Green. En este caso la integral que figura en el segundo miembro de (7.1) *representa una suma de integrales a lo largo de los componentes conexos de la frontera L, donde se marca tal dirección del recorrido que el dominio D quede por la izquierda.*

Demostremos la fórmula de Green primero para una clase de dominios especial, pero suficientemente amplia. A continuación enunciemos una serie de afirmaciones auxiliares que nos harán falta para demostrar el teorema formulado.

---

[1]) G. Green (1793—1841), matemático inglés.

[2]) La frontera L se denomina suave a trozos, si se compone de un numero finito de curvas suaves. Si la frontera L se compone de un número finito de curvas cerradas suaves a trozos L_i, el dominio conexo D se llama, de ordinario, *múltiplemente conexo*, y las curvas L_i, reciben el nombre de *componentes conexos de la frontera*.

[3]) Por cuanto las derivadas parciales de las funciones $P(x, y)$ y $Q(x, y)$ existen sólo en el dominio abierto D, las integrales citadas son impropias. Si suponemos complementariamente que las dichas derivadas parciales son continuas en $\overline{D}$, las integrales en consideración se convierten en las propias

2. Demostración de la fórmula de Green para una clase especial de dominios. Sea D un dominio simplemente conexo con la frontera suave a trozos L. Convengamos en considerar que cada recta paralela a cualquier eje de coordenadas corta la frontera L en dos puntos a lo sumo. Los dominios de tal índole se llamarán *dominios del tipo* K.

Por hipótesis, existen integrales impropias de las derivadas parciales de las funciones $P(x, y)$ y $Q(x, y)$. Esto significa que para cual-

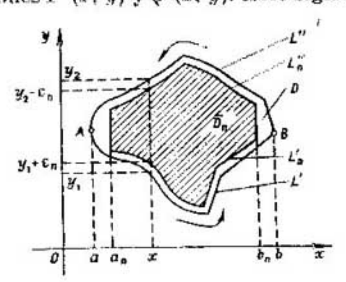


Fig. 7.1.

quier sistema de dominios $\{D_n\}$, que agotan monótonamente el dominio D, se verifica, por ejemplo, una relación

$$\lim_{n\to\infty} \iint_{\overline{D}_n} \frac{\partial Q}{\partial x}\, dx\, dy = \iint_{D} \frac{\partial Q}{\partial x}\, dx\, dy$$

(las relaciones análogas son válidas también para otras derivadas parciales de las funciones $P(x, y)$ y $Q(x, y)$).

Describamos la construcción de un sistema especial de dominios $\{D_n\}$ que agotan monótonamente un dominio del tipo K. Dicho sistema lo necesitaremos en la demostración de la fórmula de Green para los dominios del tipo citado.

Supongamos que un segmento $[a, b]$ del eje Ox representa una proyección sobre dicho eje del dominio $\overline{D}$. Tracemos por los puntos a y b unas rectas paralelas al eje Oy. Cada una de estas dos rectas se interseca con la frontera L en un solo punto. Estos dos puntos A y B de intersección de las citadas rectas con la frontera L (fig. 7.1) dividen L en dos curvas L' y L'', que representan, obviamente, las gráficas de las funciones respectivas $y_1(x)$ e $y_2(x)$, continuas y diferenciables a trozos sobre el segmento $[a, b]$. Notemos que (fig. 7.1) $y_1(x) \leqslant y_2(x)$ (la igualdad tiene lugar sólo para $x = a$ y $x = b$).

Examinemos, ahora, una sucesión de segmentos $[a_n, b_n]$ de tal índole que sea $a < a_n < b_n < b$, $a_n \to a$, $b_n \to b$, cuando $n \to \infty$. Admitamos, además, que el segmento $[a_n, b_n]$ está contenido en el

segmento $[a_{n+1}, b_{n+1}]$, cualquiera que sea n. Elijamos un número $\varepsilon_n > 0$ de un modo tal que las gráficas L'_n y L''_n de las funciones $y_1(x) + \varepsilon_n$ e $y_2(x) - \varepsilon_n$ estén dispuestas en el dominio D y no se intersequen.

De frontera del dominio $\overline{D}_n$ sirve una curva compuesta por las líneas L'_n y L''_n y por los segmentos de las rectas verticales que pasan por los puntos a_n y b_n (fig. 7.1). El dominio $\overline{D}_{n+1}$ se construye del modo análogo, pero en lugar del segmento $[a_n, b_n]$ se toma el segmento $[a_{n+1}, b_{n+1}]$, y el número $\varepsilon_{n+1} > 0$ se elige de tal modo que sea inferior a ε_n. Es evidente que si $\varepsilon_n \to 0$, el sistema construido de dominios $\{\overline{D}_n\}$ agota monótonamente el dominio D. Demostremos la siguiente *afirmación*.

Teorema 7.2. *Supongamos que en un dominio del tipo K las funciones $P(x, y)$ y $Q(x, y)$ satisfacen las condiciones del teorema 7.1. Entonces, para dicho dominio y para las funciones $P(x, y)$ y $Q(x, y)$ es válida la fórmula de Green.*

DEMOSTRACIÓN. Basta convencerse de la validez de las igualdades

$$\iint_D \frac{\partial Q}{\partial x}\,dx\,dy = \oint_L Q\,dy, \quad -\iint_D \frac{\partial P}{\partial y}\,dx\,dy = \oint_L P\,dx. \qquad (7.2)$$

Por cuanto las igualdades mencionadas se demuestran de un modo igual, aduzcamos aquí sólo la demostración de la segunda igualdad.

Veamos la integral doble

$$\iint_{\overline{D}_n} \frac{\partial P}{\partial y}\,dx\,dy. \qquad (7.3)$$

Para el dominio $\overline{D}_n$ y para la función subintegral $\frac{\partial P}{\partial y}$ se cumplen en la integral (7.3) todas las condiciones, en las cuales es vigente la fórmula de integración reiterada. De acuerdo con esta última, tenemos

$$\iint_{\overline{D}_n} \frac{\partial P}{\partial y}\,dx\,dy = \int_{a_n}^{b_n} dx \int_{y_1(x)+\varepsilon_n}^{y_2(x)-\varepsilon_n} \frac{\partial P}{\partial y}\,dy =$$

$$= \int_{a_n}^{b_n} P(x,\ y_2(x) - \varepsilon_n)\,dx - \int_{a_n}^{b_n} P(x,\ y_1(x) + \varepsilon_n)\,dx. \qquad (7.4)$$

El primer miembro de las relaciones (7.4) tiene, para $n \to \infty$, el límite que es igual a la integral $\iint_D \frac{\partial P}{\partial y}\,dx\,dy$. En virtud de que la función $P(x, y)$ es uniformemente continua en el dominio cerrado

$\overline{D}$, cada uno de los sumandos en el segundo miembro de (7.4) tiene, cuando $n \to \infty$, un límite que es igual a $\int\limits_a^b P(x, y_2(x))\,dx$ para el primer sumando, y a $\int\limits_b^a P(x, y_1(x))\,dx$, para el segundo. La primera de estas dos integrales representa, para el sentido del recorrido de la frontera expuesto en la fig. 7.1, una integral curvilínea

$$-\int\limits_{L''} P(x, y)\,dx,$$

y la segunda, una integral curvilínea

$$\int\limits_{L'} P(x, y)\,dx.$$

Vemos que el segundo miembro de las relaciones (7.4) tiene, para $n \to \infty$, el límite igual a

$$-\int\limits_{L} P(x, y)\,dx.$$

De este modo, la segunda de las fórmulas (7.2) queda demostrada. La validez de la primera de las fórmulas (7.2) se establece de un modo igual (hace falta proyectar $\overline{D}$ sobre el eje Oy y repetir los razonamientos aducidos). El teorema está demostrado.

3. Notación invariante de la fórmula de Green. Supongamos que las funciones $P(x, y)$ y $Q(x, y)$ satisfacen las condiciones del teorema 7.1 en un dominio conexo D con la frontera suave a trozos L. Definamos en el dominio $\overline{D} = D + L$ un campo vectorial $\boldsymbol{p}$, cuyas coordenadas en el sistema cartesiano de coordenadas son $P(x, y)$ y $Q(x, y)$. Es evidente que en las condiciones impuestas en las funciones $P(x, y)$ y $Q(x, y)$ el campo $\boldsymbol{p}$ será continuo en el dominio $\overline{D}$, y continuamente diferenciable, en D. Hallemos el rotor de este campo vectorial. Haciendo uso de la expresión para rot $\boldsymbol{p}$ en la base ortonormal $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{k}$, obtenemos

$$\operatorname{rot} \boldsymbol{p} = \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) \boldsymbol{k}.$$

A partir de esta relación resulta

$$\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = \boldsymbol{k} \operatorname{rot} \boldsymbol{p}. \tag{7.5}$$

OBSERVACIÓN 1. Pasemos en el plano Oxy a una nueva base ortonormal $\boldsymbol{i}'$, $\boldsymbol{j}'$, y al nuevo sistema cartesiano de coordenadas $Ox'y'$, liga-

do con la base citada. Supongamos que en esta nueva base las coordenadas del campo vectorial $\boldsymbol{p}$ son P' y Q'. En el nuevo sistema de coordenadas las funciones P' y Q' satisfacen, evidentemente, las condiciones del teorema 7.1. Además, puesto que en la nueva base $\text{rot } \boldsymbol{p} = \left(\frac{\partial Q'}{\partial x'} - \frac{\partial P'}{\partial y'}\right) \boldsymbol{k}$, tenemos

$$\frac{\partial Q'}{\partial x'} - \frac{\partial P'}{\partial y'} = \boldsymbol{k} \text{ rot } \boldsymbol{p}. \tag{7.6}$$

Por cuanto el producto escalar $\boldsymbol{k}$ rot $\boldsymbol{p}$ es un invariante, de (7.5) y (7.6) proviene que la expresión $\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}$ no cambia el valor, ni tampoco la forma, al pasar a la nueva base ortonormal, es decir, representa también un invariante.

Apoyándonos en esta observación, podemos llegar a la siguiente deducción importante: *la integral en el primer miembro de la fórmula de Green* (7.1) *lleva un carácter invariante: su valor y su forma no cambian, al pasar al nuevo sistema cartesiano de coordenadas.* En efecto, en tal transformación de las coordenadas el valor absoluto del jacobiano de transformación es igual a uno. Entre tanto, según la observación, la expresión subintegral no cambia su valor, ni tampoco la forma.

Recurramos ahora a la integral

$$\oint_L P\,dx + Q\,dy, \tag{7.7}$$

que figura en el segundo miembro de la fórmula de Green. Cerciorémonos de que *esta integral es también de carácter invariante: su valor y forma no varían, al pasar al nuevo sistema cartesiano de coordenadas.*

Sea $\boldsymbol{t}$ un vector unidad de la tangente en los puntos de la frontera L, cuya dirección se encuentra concordada con el sentido del recorrido en L, y sean $\cos\alpha$ y $\operatorname{sen}\alpha$, las coordenadas del vector $\boldsymbol{t}$. Elijamos, a título de parámetro en L, la longitud del arco l, con la particularidad de que en cada componente conexo de la frontera el crecimiento del parámetro l está concordado con el sentido del recorrido en este componente. En las condiciones, impuestas en L, la función $\boldsymbol{t}(l)$ será continua a trozos. Bajo las condiciones enunciadas más arriba, el campo vectorial $\boldsymbol{p}$ será continuo en L, mientras que sus coordenadas P y Q representan funciones continuas de l.

Notemos que, elegidos el sentido del recorrido y el parámetro en la curva L, la integral curvilínea de segunda especie (7.7) se transforma en una integral curvilínea de primera especie. En este caso P y Q se calculan en los puntos de L, y $dx = \cos\alpha\, dl$, $dy = \operatorname{sen}\alpha\, dl$.

De este modo,

$$\oint_L P\,dx + Q\,dy = \oint_L (P\cos\alpha + Q\,\mathrm{sen}\,\alpha)\,dl = \oint_L \boldsymbol{pt}\,dl. \qquad (7.8)$$

La relación (7.8) muestra que la integral (7.7) es realmente de carácter invariante: el producto escalar $\boldsymbol{pt}$ es un invariante y la parametrización con ayuda de la longitud del arco no está ligada con el sistema de coordenadas. Además, en el nuevo sistema cartesiano de coordenadas $Ox'y'$ tenemos

$$\boldsymbol{pt}dl = (P'\cos\alpha' + Q'\,\mathrm{sen}\,\alpha')\,dl = P'dx' + Q'dy',$$

y, por eso,

$$P\,dx + Q\,dy = P'\,dx' + Q'\,dy'.$$

Así pues, nos hemos convencido de que la integral (7.7) lleva un carácter invariante: su valor y su forma no varían al pasar al nuevo sistema cartesiano de coordenadas.

Los razonamientos aducidos más arriba permiten atribuir a la fórmula de Green (7.1) la siguiente *forma invariante*:

$$\iint_D \boldsymbol{k}\ \mathrm{rot}\ \boldsymbol{p}\,d\sigma = \oint_L \boldsymbol{pt}\,dl, \qquad (7.9)$$

donde $d\sigma$ denota un elemento de área del dominio D.

OBSERVACIÓN 2. Una integral

$$\oint_L \boldsymbol{pt}\,dl$$

se llama, de ordinario, *circulación del campo vectorial* $\boldsymbol{p}$ *a lo largo de la curva* L.

Del teorema 7.2 y de las deducciones de este punto podemos extraer un corolario importante.

Corolario. *Supongamos que las funciones* $P(x, y)$ *y* $Q(x, y)$ *satisfacen las condiciones del teorema 7.1 en un dominio finito* D *con la frontera suave a trozos* L. *Si el dominio* D *puede ser dividido en un número finito de subdominios* D_k *con fronteras suaves a trozos* L_k (fig. 7.2) *y si en tal caso cada uno de* D_k *representa un dominio del tipo* K *con relación a cierto sistema cartesiano de coordenadas, entonces para el dominio* D *y para las funciones* $P(x, y)$, *y* $Q(x, y)$ *resulta ser válida la fórmula de Green.*

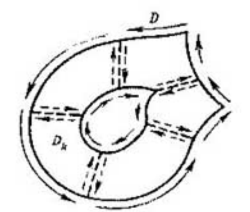


Fig. 7.2.

La validez del corolario puede confirmarse mediante los razonamientos siguientes. Está claro que la fórmula de Green es válida para cada uno de los subdominios D_k. Esto se predetermina por el carácter invariante de la fórmula y por el teorema 7.2 (en cierto sistema de coordenadas D_k será un dominio del tipo K).

Luego, es obvio que la suma de integrales $\iint\limits_{D_k} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dx\, dy$ en los primeros miembros de las fórmulas de Green, extendidas al dominio D_k, representa una integral $\iint\limits_{D} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dx\, dy$. Entre tanto, la suma de integrales curvilíneas $\int\limits_{L_k} P\, dx + Q\, dy$ en los segundos miembros de las fórmulas de Green a lo largo de las fronteras L_k de los dominios D_k proporciona una integral $\oint\limits_{L} P\, dx + Q\, dy$, pues las integrales a lo largo de los tramos comunes de la frontera de los dominios D_k se reducirán, puesto que dichos tramos en los dominios vecinos D_k se recorren en los sentidos opuestos (véase fig. 7.2 para la explicación).

OBSERVACIÓN 3 Un dominio conexo finito arbitrario D con la frontera suave a trozos L no puede dividirse, en el caso general, en un número finito de dominios D_k del tipo mencionado más arriba. No obstante, en cada dominio finito D con la frontera suave a trozos puede eliminarse una parte (tan pequeña como se quiera) tal que el dominio restante ya se puede dividirlo de un modo adecuado. En este caso el aporte en los miembros primero y segundo de la fórmula de Green, correspondiente a la parte eliminada del dominio D, será, naturalmente, tan pequeño como se quiera. Esta idea yace en la base de la demostración de la fórmula de Green en el caso general.

En el punto siguiente demostraremos una serie de proposiciones auxiliares, con ayuda de las cuales se establecerá, mediante el método descrito, la fórmula de Green en el caso general.

4. Proposiciones auxiliares. Sea L una curva plana suave a trozos sin puntos múltiples, en la cual está elegida, a título de parámetro, la longitud del arco l.

Se denominará *entorno de un punto interior* P en la curva L a cualquier conjunto abierto conexo (no coincidente con toda la curva L) de puntos de dicha curva que contiene el punto P. *Para un punto de frontera de* L se introduce la noción de *semientorno* [1]). La longitud

[1]) Si P es un punto de frontera de la curva L, y Q es cualquier otro punto de L, el conjunto de todos los puntos de la curva L (encerrados entre P y Q) que incluye punto P y no incluye Q, se llamará *semientorno* del punto P.

de un entorno (o de un semientorno) se denominará dimensión del mismo.

Un punto interior P de la curva L divide cada entorno suyo en dos semientornos. Un entorno del punto P se llamará λ-entorno, si cada uno de los semientornos es de longitud λ.

Lema 1. *Sea L una curva finita suave sin puntos múltiples y sean A y B los puntos de frontera de esta curva, mientras que $\overline{L}$ es una parte conexa de la curva L, la cual se compone íntegramente, junto con sus extremos $\overline{A}$ y $\overline{B}$, de los puntos interiores de la curva L* (fig. 7.3)[1]. *Pueden indicarse dos números positivos λ y δ tales que la cota superior exacta de los ángulos que forman las tangentes en los puntos del λ-entorno de cualquier punto P de la curva $\overline{L}$*[2] *con la tangente en el punto P sea inferior a $\pi/8$, y la distancia desde el punto P hasta los puntos de la curva L dispuestos fuera del λ-entorno, no menos de δ*[3].

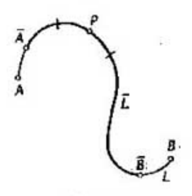


Fig. 7.3.

DEMOSTRACIÓN. *Cerciorémonos de que existe un $\lambda > 0$ que satisface las condiciones del lema.* Notemos primero que, cualquiera que sea $\alpha > 0$, para *todo* punto P puede indicarse un λ-entorno ($\lambda > 0$), en cuyos márgenes la cota superior de los ángulos que forman las tangentes en los puntos de este λ-entorno con la tangente en el punto P es menor que α. Esto se deduce de la continuidad de las tangentes a la curva L.

Se trata de λ universal, apto para *todos los puntos* de la curva $\overline{L}$.

Admitamos que no existe $\lambda > 0$ que satisfaga las condiciones del lema. Entonces, para cualquier $\lambda_n = 1/n$, en $\overline{L}$ existen tales puntos P_n y Q_n que la longitud del arco P_nQ_n sea inferior a λ_n, y el ángulo entre las tangentes en estos puntos, no menos de un $\alpha < \pi/8$ fijo.

Seleccionemos en la sucesión $\{P_n\}$ una subsucesión $\{P_{n_k}\}$ que sea convergente hacia el punto P de la curva L. Es evidente que una sucesión $\{Q_{n_k}\}$ también converge hacia P. Examinemos tal λ-entorno del punto P, en el cual la cota superior exacta de los ángulos entre las tangentes en los puntos del entorno y en el punto P es menos de $\alpha/2$.

---

[1] Una curva puede ser cerrada también. En este caso $\overline{L}$ puede coincidir con L. Si L es una curva cerrada dotada de un punto anguloso, $\overline{L}$ será cualquier parte conexa cerrada de L que no contiene este punto anguloso.

[2] El entorno de un punto de la curva $\overline{L}$ se considera como entorno de dicho punto en la curva L.

[3] Es evidente que $\lambda \geqslant \delta$.

Está claro que el ángulo entre las tangentes en cualesquiera dos puntos del λ-entorno citado del punto P es menos de α. Siendo n_k suficientemente grande, los puntos P_{n_k} y Q_{n_k} caerán en el λ-entorno elegido del punto P, por lo cual el ángulo entre las tangentes en estos puntos ha de ser menos de α, en tanto que la elección de estos puntos predetermina dicho ángulo superior o igual a α. Esta contradicción refuta la admisión de que no existe un $\lambda > 0$ que satisfaga las condiciones del lema. Notemos que el λ requerido es inferior a cada uno de los arcos $A\overline{A}$ y $B\overline{B}$.

Demostremos ahora que existe un $\delta > 0$ que satisface las condiciones del lema.

Admitamos que no hay $\delta > 0$ que satisfaga las condiciones del lema. Entonces, cualquiera que sea $\delta_n = 1/n$, pueden indicarse en $\overline{L}$ y L tales puntos respectivos P_n y Q_n que la longitud del arco P_nQ_n sea superior o igual a λ [1]), mientras que la cuerda P_nQ_n sea de longitud inferior a δ_n. Seleccionemos en la sucesión $\{P_n\}$ una subsucesión que converja hacia el punto P de la curva $\overline{L}$ y examinemos una subsucesión correspondiente de la sucesión $\{Q_n\}$. En esta última subsucesión seleccionemos una subsucesión $\{Q_{n_k}\}$ que converja al punto Q de la curva L. Está claro que la subsucesión $\{P_{n_k}\}$ converge hacia P. Por cuanto, en virtud de la elección de los puntos P_{n_k} y Q_{n_k}, la longitud del arco $P_{n_k}Q_{n_k}$ es superior o igual a λ, la longitud del arco PQ es también superior o igual a λ. Debido a que las longitudes de las cuerdas $P_{n_k}Q_{n_k}$ tienden hacia cero, la longitud de la cuerda PQ será igual a cero, es decir, el punto P coincidirá con el punto Q, representando de esta manera un punto múltiple de la curva L sin puntos múltiples. La contradicción obtenida confirma la posibilidad de elegir un $\delta > 0$ requerido. La demostración del lema queda finalizada.

Corolario 1. *Supongamos que las curvas L y $\overline{L}$ satisfacen las condiciones del lema. Puede, pues, indicarse tal número 2λ que cualquier arco de la curva $\overline{L}$ de longitud inferior a 2λ se proyecte unívocamente sobre uno de los ejes coordenados del sistema cartesiano de coordenadas rectangulares Oxy.*

En efecto, tomemos a título de λ el número aducido en el lema 1. Cualquier arco de la curva $\overline{L}$ de longitud inferior a 2λ está contenido en el λ-entorno de cierto punto P en la curva L. Una tangente en el punto P forma con uno de los ejes Ox ó Oy un ángulo inferior o igual a $\pi/4$. Entonces, evidentemente, una tangente en cualquier punto del arco en consideración forma con la tangente citada un ángulo *inferior* a $\pi/2$, por lo cual este arco se proyecta unívocamente sobre

---

[1]) La existencia de tal λ ya se ha establecido en la primera parte de la demostración del teorema.

el eje mencionado (si la proyección no fuera unívoca, tendríamos unas tangentes que formarían con el eje indicado un ángulo igual a $\pi/2$).

***Corolario* 2.** *Supongamos que las curvas L y $\overline{L}$ satisfacen las condiciones del lema 1. Entonces, puede indicarse tal número $2\lambda > 0$, que cualquier arco de la curva $\overline{L}$ de longitud inferior a 2λ se proyecte unívocamente sobre ambos ejes coordenados de un sistema cartesiano de coordenadas rectangulares Oxy elegido especialmente para dicho arco.*

Tomemos a título de λ un número mencionado en el lema. Cualquier arco de la curva $\overline{L}$ de longitud inferior a 2λ está contenido en el λ-entorno de cierto punto P de la curva $\overline{L}$. Elijamos un sistema cartesiano de coordenadas rectangulares de un modo tal que una tangente en P forme con sus ejes un ángulo de $\pi/4$. Entonces, una tangente en cualquier punto de dicho arco formará con cada uno de los ejes Ox y Oy un ángulo inferior a $\pi/2$, por lo cual dicho arco se proyectará unívocamente sobre cada uno de los ejes. Notemos que los cambios no significantes del sistema elegido de coordenadas no influyen en la posibilidad de que el arco se proyecte unívocamente sobre ambos ejes coordenados.

***Lema* 2.** *Sea Q un cuadrado y sea R un ángulo con vértice en el centro P del cuadrado Q y abertura igual a $2\alpha < \pi/4$. Designemos con Γ una parte de la frontera del cuadrado Q encerrada dentro del ángulo R. Entonces, el ángulo entre cualquier cuerda de la línea Γ (una línea recta que une dos puntos de Γ) y la bisectriz del ángulo R no es inferior a α.*

No damos la demostración de este lema por ser la misma elemental.

***Lema* 3.** *Sea Q un cuadrado y sea L una curva suave sin puntos múltiples que tiene por origen el centro P del cuadrado Q. Supongamos que la cota superior exacta de los ángulos que forman las tangentes a L con una semitangente a L en el punto P es igual a $\overline{\alpha} < \pi/8$. Entonces, L corta la frontera del cuadrado Q en un punto a lo sumo.*

DEMOSTRACIÓN Construyamos un ángulo R con abertura 2α, $\overline{2\alpha} < 2\alpha < \pi/4$, de cuya bisectriz sirve la semitangente a L en el punto P y de vértice, el centro P del cuadrado. Designemos con Γ una parte de la frontera del cuadrado Q encerrada dentro del ángulo R. Evidentemente, la curva L está dispuesta dentro del ángulo R (si L cortara el lado del ángulo R en un punto distinto de P, se encontraría una tangente paralela a este lado, y la misma formaría con la semitangente a L en el punto P un ángulo igual a $\alpha > \overline{\alpha}$, lo que contradiría la hipótesis). Supongamos que L corta Γ en dos puntos M y N. Entonces, se encontraría en L un punto, en el que una tangente sea paralela a la cuerda MN y, de acuerdo con el lema 3, dicha tangente formaría con la semitangente a L en P un ángulo no inferior a $\alpha > \overline{\alpha}$, lo que contradice la hipótesis del lema. Este último, pues, queda demostrado.

Corolario de los lemas 1 y 3. *Supongamos que las curvas L y $\overline{L}$ satisfacen las condiciones del lema 1 y que $\delta > 0$ es un número mencionado en dicho lema. Entonces, la curva $\overline{L}$ corta la frontera de cualquier cuadrado Q con centro en un punto arbitrario P de esta curva y con el lado inferior a $\sqrt{2}\delta$ en dos puntos a lo sumo.*

Cerciorémonos de que el corolario es verídico. Sea P un punto arbitrario de la curva $\overline{L}$ y sea $\lambda > 0$ un número mencionado en el lema 1. Recurramos al λ-entorno del punto P. Ambos puntos de frontera de este entorno y la parte de $\overline{L}$ dispuesta fuera del λ-entorno se disponen, de acuerdo con el lema 1, fuera de cualquier cuadrado con centro en P y con el lado inferior en longitud a $\sqrt{2}\delta$. Por eso, el λ-entorno en consideración (y sólo dicho entorno) se interseca con la frontera del cuadrado Q [1]). Por cuanto cada uno de los semientornos del λ-entorno en consideración del punto P satisface las condiciones del lema 3, se pone claro que el λ-entorno cortará la frontera del cuadrado Q en dos puntos a lo sumo.

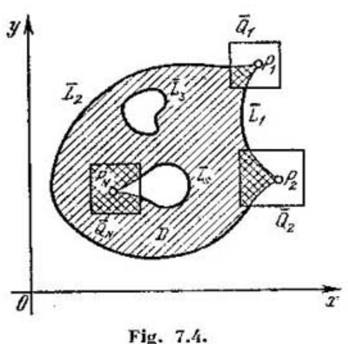


Fig. 7.4.

5. Partición especial del dominio D con frontera suave a trozos L. Sea D un dominio finito conexo, cuya frontera L se compone de un número finito de curvas cerradas suaves a trozos y sean $P_1, P_2, \ldots, \ldots, P_N$ los puntos angulosos de la frontera L. Convengamos en considerar que en un plano está elegido un sistema cartesiano de coordenadas rectangulares Oxy.

Demos a conocer un método de partición especial del dominio D en subdominios. Las particiones de este tipo nos harán falta en la demostración del teorema 1.

1°. Cerciorémonos de que para cualquier $\varepsilon > 0$ pueden elegirse los cuadrados $Q_1, Q_2, \ldots, Q_N$ con centros en los puntos angulosos de la frontera L y lados paralelos a los ejes Ox y Oy (fig. 7.4) de una manera tal que queden cumplidas las siguientes *condiciones*:

1) La frontera de cada cuadrado $\overline{Q}_i$ con centro en P_i se interseca con cada una de las dos ramas de la frontera L, que tienen por origen P_i [2]) exactamente en un punto (véase fig. 7.4). Estos puntos son los

[1]) Aquí se aprovecha el teorema de Jordan que afirma lo siguiente: si dos puntos de una curva continua L son puntos interior y exterior del dominio D, una curva L cortará la frontera de D.

[2]) Un λ-entorno suficientemente pequeño del punto anguloso P_i se compone de dos ramas suaves que tienen dicho punto como su origen.

únicos puntos comunes de la frontera del cuadrado Q_i con la frontera L.

2) La suma de áreas de los cuadrados Q_i será inferior a ε; la suma de longitudes de las partes de la frontera L dispuestas dentro de los cuadrados $\overline{Q}_i$ también será inferior a ε. Es evidente que en este caso la suma de perímetros de los cuadrados $\overline{Q}_i$ no sobrepasa $A\varepsilon$, donde A es una constante.

La posibilidad de elegir los cuadrados $\overline{Q}_i$ precisamente de un modo descrito más arriba se confirma por los siguientes razonamientos.

Veamos los λ-entornos de los puntos angulosos que obedecen a los siguientes requisitos:

1. Dichos λ-entornos no se intersecan.

2. La suma de longitudes de todos los λ-entornos es menos de ε.

3. La cota superior exacta de los ángulos que forman las tangentes de cada uno de los semientornos del λ-entorno con la semitangente correspondiente en un punto anguloso es menos de $\overline{\alpha} < \pi/8$. Es evidente que la elección de tales λ-entornos de los puntos angulosos es bien posible. Notemos que cada uno de los semientornos de los λ-entornos elegidos satisface las condiciones del lema 3. Por eso, cada uno de estos semientornos se interseca a lo sumo en un solo punto con la frontera de cualquier cuadrado que tiene por su centro el correspondiente punto anguloso.

Definamos para cada punto anguloso P_i un número $\delta_i > 0$ que sea igual a la cota inferior exacta de las distancias desde P_i hasta la parte de L obtenida por eliminación en L del λ-entorno del punto P_i.

Designemos $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_N\}$. Está claro que cualquier cuadrado Q_i con centro en P_i, cuyo lado es inferior en longitud a $\sqrt{2}\delta$, satisface *la condición* 1) enunciada anteriormente, pues, elegido del modo aducido el cuadrado Q_i, para cada uno de los semientornos del punto P_i quedan cumplidas las condiciones del lema 4, y, además, los puntos de frontera del semientorno se disponen fuera del cuadrado Q_i (precisamente a ello se debe la unicidad del punto de intersección del semientorno con la frontera del cuadrado). Está claro también que haciendo disminuir los lados de los cuadrados, podemos conseguir que la suma de sus áreas sea inferior a ε. Evidentemente la suma de longitudes de las partes de la frontera L dispuestas dentro de los cuadrados $\overline{Q}_i$ será inferior a ε a cuenta de la elección especial de los λ-entornos de los puntos angulosos. De este modo, *la condición* 2) también se cumple con la elección indicada de los cuadrados Q_i.

2°. Eliminemos en L aquellas partes que se encuentran dentro de los cuadrados $\overline{Q}_i$. La parte restante de L representa un juego de curvas suaves $\overline{L}_i$ sin puntos comunes; algunas de $\overline{L}_i$ representan en este caso curvas suaves cerradas. Notemos que cada curva no cerrada L_i se compone de puntos interiores de la curva suave L_i, cuyos puntos de

frontera serán constituidos por los puntos angulosos de L (véase fig. 7.4).

Aprovechemos el lema 1 del punto antecedente para cada una de las curvas $\overline{L}_i$. Sean λ_i y δ_i^* los números garantizados para $\overline{L}_i$ por dicho lema. El número δ_i^* lo hagamos obedecer en este caso a una exigencia más, considerando que él es menos de la cota inferior de las distancias desde los puntos de $\overline{L}_i$ hasta las demás curvas $\overline{L}_k$. Denotemos $\lambda = \min \{\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_N\}$ y $0 < \delta^* < \min \{\delta_1^*, \delta_2^*, \ldots, \delta_N^*\}$, $\delta^* < \sqrt{2}\delta$, donde δ es el número elegido en 1°. Es evidente que $\lambda \geqslant \delta^*$.

Dividamos cada una de las curvas $\overline{L}_i$ en un número finito de partes de longitud δ^*. Construyamos los cuadrados Q_i cuyos centros se disponen en los puntos de partición de la curva $\overline{L}_i$ y tienen los lados de longitud δ^*, paralelos a los ejes Ox y Oy.

3°. Con ayuda de los cuadrados $\overline{Q}_i$ y Q_i construyamos la partición requerida del dominio D.

1) Eliminemos en D las partes que son comunes con D y los cuadrados Q_i. La parte restante de D se denotará con $\overline{D}_\varepsilon$, y la frontera de $\overline{D}_\varepsilon$ se denotará con $\overline{L}_\varepsilon$. La frontera de $\overline{L}_\varepsilon$ se compone de las curvas $\overline{L}_i$ y de segmentos de unas rectas paralelas a los ejes coordenados.

2) Denotemos con $\widetilde{Q}_i$ la parte común del cuadrado Q_i y del dominio $\overline{D}_\varepsilon$. Los dominios $\widetilde{Q}_i$ dividen el dominio D_ε en partes simplemente conexas $\overline{D}_i$ [1]), la frontera de cada una de ellas se compone de los segmentos rectilíneos paralelos a los ejes de coordenadas y, quizás, de un segmento rectilíneo que está contenido en una de las curvas $\overline{L}_i$ y que tiene longitud inferior a δ. Por cuanto el citado segmento rectilíneo se proyecta unívocamente sobre uno de los ejes coordenados (la longitud de cada uno de estos segmentos es inferior a $\delta^* < \lambda$, y en este caso, de acuerdo con el corolario 1 del lema 1, dicho segmento se proyecta unívocamente sobre uno de los ejes coordenados), entonces, *evidentemente, cualquier dominio $\overline{D}_i$ puede dividirse, mediante unas rectas paralelas a uno de los ejes coordenados, en un número finito de las partes D_k, cada una de las cuales representa o bien un rectángulo, o bien un trapecio curvilíneo* [2]), degenerado, quizás, en un triángulo curvilíneo.

---

[1]) Un dominio D se llama simplemente conexo, si cualquier curva cerrada suave a trozos sin puntos múltiples, dispuesta en D, limita el dominio, cuyos puntos pertenecen todos a D.

[2]) Recordemos que se llama trapecio curvilíneo a una figura cuyas bases son paralelas a uno de los ejes coordenados, además, uno de los lados laterales es paralelo al otro eje coordenado y sobre este último se proyecta unívocamente el lado lateral curvilíneo del trapecio.

En la fig. 7.5 se muestra uno de los dominios $\overline{D}_i$. Con líneas punteadas se señala la partición de $\overline{D}_i$ en las partes D_k.

6. Demostración del teorema 7.1. Acabamos de convencernos de que, al eliminar en D las partes dispuestas dentro de los cuadrados $\overline{Q}_i$, se obtiene un dominio $\overline{D_\varepsilon}$ [1]) con la frontera L_ε, el cual puede dividirse en un número finito de los dominios del tipo especial D_k.

Demostremos que para el dominio $\overline{D}_\varepsilon$ es válida la fórmula de Green. De acuerdo con el corolario en el p. 3 del párrafo dado, para ello basta cerciorarse de que cada uno de los dominios D_k es un dominio del tipo K con relación a cierto sistema cartesiano de coordenadas especialmente elegido.

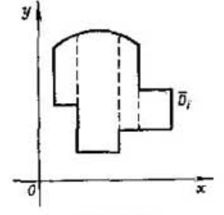


Fig. 7.5.

Si D_k es un rectángulo, a título de sistema requerido interviene, por ejemplo, un sistema de coordenadas en el que uno de los ejes es paralelo a la diagonal de este rectángulo. Sea D_k un trapecio curvilíneo o un triánguo curvilíneo. El método de construcción de los dominios D_k prevé que el lado encorvado de la frontera de D_k satisface las condiciones del lema 1, p. 4 de este párrafo, por lo cual se proyecta unívocamente, con arreglo al corolario 2 del lema citado, sobre ambos ejes coordenados del sistema rectangular de coordenadas cartesianas especialmente elegido. Por cuanto los cambios no significantes en la elección de dicho sistema no perturban la propiedad mencionada, podemos, obviamente, elegir tal sistema de coordenadas que sobre ambos ejes del mismo también se proyecten unívocamente las partes rectilíneas de la frontera de D_k. Con relación a este sistema de coordenadas D_k será un dominio del tipo K. Así pues, para el dominio D_ε queda válida la fórmula de Green

$$\iint\limits_{D_\varepsilon} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx\, dy = \oint\limits_{L_\varepsilon} P\, dx + Q\, dy. \tag{7.10}$$

El método de construcción de los dominios D_ε estipula que, cuando $\varepsilon \to 0$, los miembros izquierdo y derecho de la fórmula (7.10) tienen por límites $\iint\limits_{D} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx\, dy$ y $\int\limits_{L} P\, dx + Q\, dy$, respectivamente. El teorema 7.1 está demostrado.

[1]) Recordemos que los cuadrados $\overline{Q}_i$ se eligen a base de cualquier ε positivo dado de un modo tal que la suma de sus áreas sea inferior a ε, y que la suma de longitudes de las partes de la frontera L dispuestas en $\overline{Q}_i$, sea también inferior a ε. Está claro que los dominios $\overline{D}_\varepsilon$ agotan el dominio D, cuando $\varepsilon \to 0$.

§ 2. Fórmula de Stokes[1])

1. Formulación del teorema fundamental. Sea S una superficie bilateral, completa, limitada y continua a trozos con una frontera suave a trozos L [2]).

Se llamará *entorno* de la superficie S a cualquier conjunto abierto Ω que contiene S.

Resulta válido el siguiente teorema *fundamental.*

Teorema 7.3. *Supongamos que en cierto entorno de la superficie S las funciones $P(x, y, z)$, $Q(x, y, z)$ y $R(x, y, z)$ son continuas y tienen derivadas parciales continuas de primer orden. Entonces, tiene lugar una relación siguiente:*

$$\iint_S \left(\frac{\partial R}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial z}\right) dy\,dz+\left(\frac{\partial P}{\partial z}-\frac{\partial R}{\partial x}\right) dz\,dx+\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right) dx\,dy = \oint_\Gamma P\,dx+Q\,dy+R\,dz, \tag{7.11}$$

que se denomina fórmula de Stokes. En esta fórmula la integral en el segundo miembro representa una suma de integrales a lo largo de los componentes conexos de la frontera Γ, donde se indica tal dirección del recorrido que, al tener en cuenta la elección del lado de la superficie, la superficie S quede por la izquierda.

Teniendo presente la observación 2, p. 2, § 3, cap. 4 sobre la forma de notación de las integrales de superficie de segunda especie y, por otra parte, las designaciones X, Y, Z para los ángulos formados por la normal a la superficie con los ejes coordenados, la fórmula de Stokes (7.11) puede ser escrita en la siguiente forma:

$$\iint_S \left[\left(\frac{\partial R}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial z}\right)\cos X+\left(\frac{\partial P}{\partial z}-\frac{\partial R}{\partial x}\right)\cos Y + \left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)\cos Z\right] d\sigma = \oint_\Gamma P\,dx+Q\,dy+R\,dz. \tag{7.12}$$

En los puntos que vienen abajo demostraremos una serie de proposiciones que nos harán falta en la demostración del teorema enunciado.

2. Demostración de la fórmula de Stokes para una superficie suave que se proyecta unívocamente sobre tres planos coordenados. Es válido el siguiente teorema.

Teorema 7.4. *Sea S una superficie bilateral simplemente conexa, suave limitada y completa con una frontera suave a trozos Γ. Convengamos en considerar que S se proyecta unívocamente sobre cada uno de los*

---

[1]) G. G. Stokes (1819—1903), matemático y físico inglés.

[2]) Notemos que una superficie cerrada no tiene frontera.

planos coordenados del sistema Oxyz. Supongamos que en cierto entorno de S vienen dadas las funciones P, Q y R que son continuas en dicho entorno y que tienen sobre el mismo derivadas parciales continuas de primer orden. En este caso queda válida la fórmula de Stokes (7.11).

DEMOSTRACIÓN. Para demostrar, recurramos a la forma (7.12) en que se anota la fórmula de Stokes. Se considerará que los vectores unidad de la normal forman ángulos agudos con los ejes coordenados. Es evidente que el teorema quedará demostrado, si demostramos las igualdades

$$\left.\begin{aligned} \iint_S \left(\frac{\partial P}{\partial z}\cos Y-\frac{\partial P}{\partial y}\cos Z\right)d\sigma &= \oint_\Gamma P\,dx,\\ \iint_S \left(\frac{\partial Q}{\partial x}\cos Z-\frac{\partial Q}{\partial z}\cos X\right)d\sigma &= \oint_\Gamma Q\,dy,\\ \iint_R \left(\frac{\partial R}{\partial y}\cos X-\frac{\partial R}{\partial x}\cos Y\right)d\sigma &= \int_\Gamma R\,dz. \end{aligned}\right\} \tag{7.13}$$

Por cuanto las relaciones (7.13) se demuestran de un modo igual, detengámonos en la demostración de la primera de ellas.

Denotemos con I la integral en el primer miembro de la primera de las igualdades (7.13):

$$I=\iint_S \left(\frac{\partial P}{\partial z}\cos Y-\frac{\partial P}{\partial y}\cos Z\right)d\sigma. \tag{7.14}$$

Por hipótesis, la superficie S es suave y se proyecta unívocamente sobre el plano Oxy. Por eso, S representa la gráfica de una función $z=z(x, y)$. En tal caso podemos hallar $\cos Y$ y $\cos Z$, si tomamos en consideración la orientación de las normales unidad con relación a S, de acuerdo con las siguientes fórmulas:

$$\cos Y=\frac{-q}{\sqrt{1+p^2+q^2}},\quad \cos Z=\frac{1}{\sqrt{1+p^2+q^2}}, \tag{7.15}$$

donde $p=\frac{\partial z}{\partial x}$, $q=\frac{\partial z}{\partial y}$.

Haciendo uso de las fórmulas (7.15), escribamos la relación (7.14) del modo siguiente:

$$I=-\iint_S \left(\frac{\partial P}{\partial y}+q\,\frac{\partial P}{\partial z}\right)\cos Z\,d\sigma. \tag{7.16}$$

Sobre la superficie S los valores de la función $P(x, y, z)$ son iguales a $P(x, y, z(x, y))$, razón por la cual obtenemos, según la regla de diferenciación de la función compuesta

$$\frac{\partial}{\partial y}[P(x, y, z(x, y))]=\frac{\partial P}{\partial y}+q\frac{\partial P}{\partial z}.$$

Por eso, la relación (7.16) toma la forma

$$I = -\iint_S \frac{\partial}{\partial y}\,[P(x,\ y,\ z(x,\ y))]\cos Z\,d\sigma. \qquad (7.17)$$

Sea D la proyección sobre el plano Oxy de la superficie S, y sea L la proyección sobre el mismo plano de la frontera Γ de esta superficie. Es evidente que la integral de superficie en el segundo miembro de (7.17) será igual a una integral doble

$\iint_D \frac{\partial}{\partial y}[P(x,\ y,\ z(x,\ y))]\,dx\,dy$ (véase observación 2, p.2, §3, cap. 5), y, por eso,

$$I = -\iint_D \frac{\partial}{\partial y}[P(x,\ y,\ z(x,\ y))]\,dx\,dy. \qquad (7.18)$$

Aplicando a la integral en el segundo miembro de 7 (18) la fórmula de Green, obtenemos

$$\iint_D \frac{\partial}{\partial y}[P(x,\ y,\ z(x,\ y))]\,dx\,dy = -\oint_L P(x,\ y,\ z(x,\ y))\,dx. \quad (7.19)$$

Supongamos que un punto $M(x, y, z)$ de la curva Γ se proyecta en el punto $N(x, y)$ de la curva L. Entonces, evidentemente, el valor de la función $P(x, y, z)$ en el punto M de la curva Γ coincide con el de la función $P(x, y, z(x, y))$ en el punto N de la mismacurva. Por eso resulta válida la siguiente igualdad

$$\oint_L P(x,\ y,\ z(x,\ y))\,dx = \oint_\Gamma P(x,\ y,\ z)\,dx. \qquad (7.20)$$

De las relaciones (7.14), (7.18)—(7.20) se deduce, obviamente, la primera de las igualdades (7.13). La demostración de la segunda y de la tercera de estas igualdades se realiza de un modo análogo, pero se deben examinar esta vez las proyecciones de S sobre los planos Oyz y Oxz, respectivamente. El teorema está demostrado.

3. Notación invariante de la fórmula de Stokes. Supongamos que las funciones $P(x, y, z)$, $Q(x, y, z)$ y $R(x, y, z)$ son continuas y tienen derivadas parciales continuas de primer orden en cierto entorno Ω de la superficie S. Definamos en Ω un campo vectorial $\boldsymbol{p}$, cuyas coordenadas en el sistema cartesiano de coordenadas rectangulares dado son iguales a P, Q, R. Es evidente, que bajo las condiciones impuestas en las funciones P, Q, R, el campo $\boldsymbol{p}$ será continuo y diferenciable en Ω. Hallemos el rotor de este campo. Haciendo uso de la expresión para rot $\boldsymbol{p}$ en una base ortonormal $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{k}$, obtendremos

$$\operatorname{rot}\ \boldsymbol{p} = \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right)\boldsymbol{i} + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right)\boldsymbol{j} + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\boldsymbol{k}. \quad (7.21)$$

Elijamos en la superficie S un lado determinado, es decir, señalemos en S un campo continuo de normales unidad $\boldsymbol{n}$. Recurriendo a la expresión (7.21) para rot $\boldsymbol{p}$, y empleando la designación estándar $\cos X$, $\cos Y$, $\cos Z$ para las coordenadas del vector unidad de la normal $\boldsymbol{n}$ a la superficie S, obtendremos

$$\boldsymbol{n} \operatorname{rot} \boldsymbol{p} = \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right) \cos X + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right) \cos Y + \\ + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) \cos Z. \tag{7.22}$$

De la relación (7.22) proviene que la integral en el primer miembro de la fórmula de Stokes (7.12) puede ser escrito en la forma

$$\iint\limits_S \boldsymbol{n} \operatorname{rot} \boldsymbol{p} \, d\sigma. \tag{7.23}$$

Así pues, la integral en el primer miembro de la fórmula (7.12) puede considerarse, siendo elegido un lado determinado de la superficie, como integral de superficie de primera especie (7.23) de la función $\boldsymbol{n} \operatorname{rot} \boldsymbol{p}$ definida sobre la superficie S. Por cuanto el producto escalar $\boldsymbol{n} \operatorname{rot} \boldsymbol{p}$ y el elemento de área $d\sigma$ de la superficie S no dependen de la elección del sistema cartesiano de coordenadas rectangulares en el espacio, al pasar a una nueva base ortonormal $\boldsymbol{i}'$, $\boldsymbol{j}'$, $\boldsymbol{k}'$, el primer miembro de la fórmula (7.12) no cambiará su valor y forma, es decir, el primer miembro *es invariante* respecto del sistema cartesiano de coordenadas rectangulares en el espacio.

Volvamos ahora a la integral

$$\oint\limits_\Gamma P\,dx + Q\,dy + R\,dz, \tag{7.24}$$

que figura Γ en el segundo miembro de la fórmula de Stokes.

Cerciorémonos de que *esta integral lleva también un carácter invariante*: su valor y su forma no varían, al pasar al sistema nuevo de coordenadas cartesianas.

Sea $\boldsymbol{t}$ un vector unidad de la tangente en los puntos de la frontera Γ de la superficie S cuya dirección está concordada con el sentido del recorrido en Γ, y sean $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ las coordenadas del vector $\boldsymbol{t}$. Tomemos por parámetro en Γ la longitud del arco l, con la particularidad de que en cada componente conexo de la frontera el crecimiento del parámetro se concuerda con el sentido del recorrido en dicho componente. Bajo las condiciones impuestas en Γ, la función $\boldsymbol{t}\,(l)$ será continua a trozos. Por cuanto el campo $\boldsymbol{p}$ es continuo en Γ, sus coordenadas representan en Γ funciones continuas de l. Observemos que, después de elegir el sentido del recorrido y el parámetro en la curva Γ, la integral curvilínea de segunda especie (7.24) se transforma en una integral curvilínea de primera especie. En tal caso P, Q, y R

se calculan en los puntos de Γ, y $dx = \cos\alpha\, dl$, $dy = \cos\beta\, dl$, $dz = \cos\gamma\, dl$. De este modo,

$$\oint_\Gamma P\,dx + Q\,dy + R\,dz = \oint_\Gamma (P\cos\alpha + Q\cos\beta + R\cos\gamma)\,dl = \oint_\Gamma \boldsymbol{pt}\,dl. \qquad (7.25)$$

Las relaciones (7.25) muestran que la integral (7.24) es realmente de carácter invariante: el producto escalar $\boldsymbol{pt}$ es invariante y la parametrización con ayuda de la longitud del arco no está ligada con el sistema de coordenadas.

En el nuevo sistema cartesiano de coordenadas $Ox'y'z'$ tenemos

$$\boldsymbol{pt}dl = (P'\cos\alpha' + Q'\cos\beta' + R'\cos\gamma')\,dl = P'dx' + Q'dy' + R'dz'.$$

Por eso,

$$P\,dx + Q\,dy + R\,dz = P'\,dx' + Q'\,dy' + R'\,dz'.$$

Indiquemos que la integral

$$\oint_\Gamma \boldsymbol{pt}\,dl$$

se llama, de ordinario, *circulación del campo vectorial* $\boldsymbol{p}$ *a lo largo de la curva* Γ.

Los razonamientos aducidos permiten atribuir a la fórmula de Stokes (7.11) (ó a (7.12)) la siguiente forma invariante:

$$\iint_S \boldsymbol{n}\ \mathrm{rot}\ \boldsymbol{p}\,d\sigma = \oint_\Gamma \boldsymbol{pt}\,dl. \qquad (7.26)$$

4. Demostración del teorema 7.3. Demostremos la siguiente afirmación auxiliar.

Lema. *Sea S una superficie suave bilateral, completa y limitada con una frontera suave a trozos Γ*[1]*). Existe tal $\delta > 0$ que cualquier parte conexa de la superficie S, cuyas dimensiones son inferiores a δ*[2]*) se proyecta unívocamente sobre cada uno de los planos coordenados de cierto sistema cartesiano de coordenadas.*

DEMOSTRACIÓN. Cerciorémonos primero de que cierto entorno de cada punto M de tal superficie se proyecta unívocamente sobre cada uno de los planos coordenados de cierto sistema cartesiano de coordenadas.

---

[1]) Notemos que una superficie cerrada no tiene fronteras.

[2]) Tal parte de la superficie puede disponerse dentro de una esfera de radio δ.

Sea $\boldsymbol{n}_M$ el vector de una normal unidad a la superficie en el punto M. Elijamos un sistema cartesiano de coordenadas $Oxyz$ de un modo tal que el vector $\boldsymbol{n}_M$ forme ángulos agudos con los ejes Ox, Oy, Oz. Entonces, evidentemente, en este sistema de cordenadas los determinantes

$$\begin{vmatrix} y_u z_u \\ y_v z_v \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} z_u x_u \\ z_v x_v \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} x_u y_u \\ x_v y_v \end{vmatrix}$$

son distintos de cero para los valores de u y v que definen el punto M, y, por ser S suave, distintos de cero en cierto entorno del punto (u, v) (estos determinantes son proporcionales a las coordenadas del vector unidad de la normal a la superficie). Recurriendo a la demostración del teorema 5.1 y a la observación que acompaña dicho teorema (véase p. 2, § 1, cap. 5), nos convencemos de que cierto entorno del punto se proyecta unívocamente sobre cada uno de los planos coordenados del sistema elegido de coordenadas $Oxyz$.

Admitamos que la afirmación del lema no es cierta. Entonces, para cada $\delta_n = 1/n$, $n = 1, 2, \ldots$, puede indicarse una parte S_n de la superficie S, cuyas dimensiones son inferiores a δ_n, que no se proyecta unívocamente sobre tres planos coordenados de cualquier sistema cartesiano de coordenadas. Elijamos en cada parte S_n un punto M_n y separemos, a continuación, en cada sucesión $\{M_n\}$ una subsucesión que converja a cierto punto M de la superficie S. Examinemos un entorno del punto M que se proyecta unívocamente sobre cada uno de los planos coordenados de cierto sistema cartesiano de coordenadas $Oxyz$. Dicho entorno contiene una de las partes S_n que también se proyectará unívocamente sobre tres planos coordenados del sistema $Oxyz$, lo que contradice el modo de elegir las partes S_n. De este modo, la admisión de que la afirmación del lema era errónea conduce a una contradicción. El lema está demostrado.

Procedamos ahora con *la demostración del teorema* 7.3. Dividamos S, mediante unas curvas suaves a trozos, en un número finito de partes suaves S_i, cada una de las cuales sea inferior en dimensión a δ que acabamos de mencionar, demostrando el lema. Además, al número de las curvas que dividen S le sumemos también las aristas de la superficie. Por cuanto la parte S_i se proyecta unívocamente sobre tres planos coordenados de cierto sistema cartesiano de coordenadas, la fórmula de Stokes se verifica para la parte S_i, en virtud de la invariación de la misma (véase p. 3 de este párrafo) y de las deducciones obtenidas en el p. 2 del párrafo presente. Sumemos, ahora, los miembros primero y segundo de las fórmulas de Stokes para las partes S_i. Es evidente que la suma de los primeros miembros de estas fórmulas representan una integral doble $\iint\limits_S \boldsymbol{n} \operatorname{rot} \boldsymbol{p}\, d\sigma$, mientras que en el

segundo miembro figurará la suma de integrales $\oint \boldsymbol{p}\mathbf{t}\, dl$ a lo largo de las fronteras Γ_i de las partes S_i. Está claro que las integrales a lo largo de los tramos comunes de la frontera de las partes S_i se reducirán, puesto que dichos tramos se recorren en los sentidos opuestos

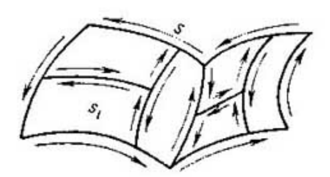


Fig. 7.6

(véase la ilustración en la fig. 7.6). Por eso, la suma de integrales curvilíneas citada más arriba es igual a la integral curvilínea a lo largo de la frontera Γ de la superficie S. De nuestros razonamientos proviene la validez de la fórmula

$$\iint_S \boldsymbol{n} \operatorname{rot} \boldsymbol{p}\, d\sigma = \oint_\Gamma \boldsymbol{p}\mathbf{t}\, dl,$$

la cual es precisamente fórmula de Stokes. El teorema está demostrado.

§ 3. Fórmula de Ostrogradski

1. Formulación del teorema fundamental. Sea V un dominio finito, en el caso general, múltiplemente conexo en un espacio $Oxyz$ con la frontera suave a trozos S [1]). El dominio V con la frontera adjunta se denotará con $\overline{V}$. Es válido el siguiente teorema *fundamental*.

***Teorema* 7.5.** *Supongamos que las funciones $P(x, y, z)$, $Q(x, y, z)$ y $R(x, y, z)$ son continuas en $\overline{V}$ y tienen derivadas parciales continuas de primer orden en V. Si existen integrales impropias, extendidas al dominio V, de cada una de las derivadas parciales de las funciones P, Q y R queda válida la relación*

$$\iiint_V \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}\right) dx\, dy\, dz = \iint_S P\, dy\, dz + Q\, dz\, dx + R\, dx\, dy. \tag{7.27}$$

---

[1]) La frontera S se llama suave a trozos, si está compuesta por un número finito de superficies suaves que lindan una con otra a lo largo de las curvas suaves, llamadas aristas de la superficie. Si la frontera S se compone de un número finito de superficies suaves a trozos cerradas S_i, estas últimas se denominan *componentes conexos de* S, y el dominio conexo V, se llama *múltiplemente conexo*.

que se denomina fórmula de Ostrogradski. La integral en el segundo miembro representa una suma de integrales a lo largo de los componentes conexos de la frontera S, en los cuales está elegido el lado exterior con relación a V.

Limitémonos a la demostración de la fórmula de Ostrogradski sólo para una clase especial de dominios.

Observemos que el teorema 7.5 puede ser demostrado aplicando el método empleado en el § 1 de este capítulo, al demostrar la fórmula de Green.

2. Demostración de la fórmula de Ostrogradski para una clase especial de dominios. Un dominio finito simplemente conexo V con la frontera suave a trozos S se llamará *dominio del tipo K*, si cada recta paralela a cualquier eje coordenado corta la frontera S del dominio V en dos puntos a lo sumo.

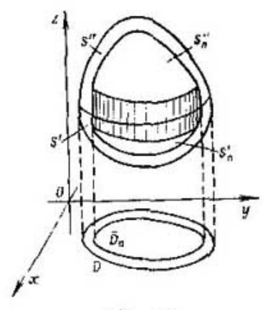


Fig. 7.7.

Para un dominio del tipo K se emplearán sistemas especiales de dominios agotadores $\{\overline{V}_n\}$. Describamos la construcción de este tipo de sistemas.

Supongamos que un dominio D en el plano Oxy representa una proyección sobre este plano del dominio V. Por los puntos de frontera del dominio D tracemos unas rectas paralelas al eje Oz. Cada una de estas rectas se interseca con la frontera S del dominio V en un solo punto. El conjunto de estos puntos divide S en dos partes S' y S'' (fig. 7.7) que representan las gráficas de las funciones $z_1(x, y)$ y $z_2(x, y)$, que son continuas en $\overline{D}$ y diferenciables a trozos en D. Notemos que $z_1(x, y) \leqslant z_2(x, y)$ (la igualdad tiene lugar sólo en los puntos de la frontera del dominio D).

Veamos una sucesión arbitraria de dominios $\{\overline{D}_n\}$, que agotan monótonamente el dominio D. Sean S'_n y S''_n las gráficas de las funciones $z_1(x, y) + \varepsilon_n$ y $z_2(x, y) - \varepsilon_n$, definidas sobre $\overline{D}_n$ (el número ε_n se elige tan pequeño que las superficies S'_n y S''_n no se intersequen).

La frontera del dominio $\overline{V}_n$ es una superficie compuesta por las superficies S'_n y S''_n y la parte de una superficie cilíndrica con generatrices paralelas al eje Oz. En tal caso de generatriz de la superficie cilíndrica sirve la frontera del dominio $\overline{D}_n$. Un dominio $\overline{V}_{n+1}$ se construye de un modo análogo, mas en lugar del dominio $\overline{D}_n$ se toma el $\overline{D}_{n+1}$, y ε_{n+1} ha de ser inferior a ε_n. Es obvio que, cuando $\varepsilon_n \to 0$, el sistema $\{\overline{V}_n\}$ agota monótonamente el dominio V.

Demostremos la siguiente *afirmación*.

Teorema 7.6. *Supongamos que en un dominio V del tipo K las funciones $P(x, y, z)$, $Q(x, y, z)$ y $R(x, y, z)$ satisfacen las condiciones del teorema 7.5. Entonces, para dicho dominio y para las funciones P, Q y R es válida la fórmula de Ostrogradski.*

DEMOSTRACIÓN. Es evidente que basta cerciorarse de la validez de las igualdades

$$\begin{aligned} \iiint\limits_V \frac{\partial P}{\partial x}\,dx\,dy\,dz &= \iint\limits_S P\,dy\,dz, \\ \iiint\limits_V \frac{\partial Q}{\partial y}\,dx\,dy\,dz &= \iint\limits_S Q\,dz\,dx, \\ \iiint\limits_V \frac{\partial R}{\partial z}\,dx\,dy\,dz &= \iint\limits_S R\,dx\,dy. \end{aligned} \tag{7.28}$$

Por ser igual la demostración de cada una de estas igualdades, realicémosla sólo de la tercera de las mismas.

Veamos una integral triple

$$\iiint\limits_{\overline{V}_n} \frac{\partial R}{\partial z}\,dx\,dy\,dz. \tag{7.29}$$

Para el dominio $\overline{V}_n$ y la función subintegral $\frac{\partial R}{\partial z}$ en la integral (7.29) se cumplen todas las condiciones, bajo las cuales resulta vigente la fórmula de integración reiterada. De acuerdo con esta fórmula, tenemos

$$\iiint\limits_{\overline{V}_n} \frac{\partial R}{\partial z}\,dx\,dy\,dz = \iint\limits_{\overline{D}_n} dx\,dy \int\limits_{z_1(x,\,y)+\varepsilon_n}^{z_2(x,\,y)-\varepsilon_n} \frac{\partial R}{\partial z}\,dz =$$
$$= \iint\limits_{\overline{D}_n} R(x,\ y,\ z_2(x,\ y)-\varepsilon_n)\,dx\,dy - \iint\limits_{\overline{D}_n} R(x, y, z_1(x, y)+\varepsilon_n))\,dx\,dy. \tag{7.30}$$

El primer miembro de la relación (7.30) tiene, para $n \to \infty$, un límite igual a $\iiint\limits_V \frac{\partial R}{\partial z}\,dx\,dy\,dz$. Por ser la función $R(x, y, z)$ uniformemente continua en el dominio cerrado $\overline{V}$, cada uno de los sumandos en el segundo miembro de (7.30) tiene, para $n \to \infty$, un límite que es igual a $\iint\limits_D R(x,\ y,\ z_2(x,\ y))\,dx\,dy$ para el pri-

mer sumando, y a $-\iint\limits_{D} R(x, y, z_1(x, y))\,dx\,dy$, para el segundo sumando. La primera integral de las que acabamos de señalar representa, al elegir el lado exterior de la superficie S, la integral $\iint\limits_{S''} R(x, y, z)\,dx\,dy$, y la segunda (habida cuenta del signo "menos" por delante de ella) la integral $\iint\limits_{S'} R(x, y, z)\,dx\,dy$. Así pues, el segundo miembro de las relaciones (7.30) tiene para $n \to \infty$, un límite igual a $\iint\limits_{S} R(x, y, z)\,dx\,dy$. Por consiguiente, la tercera de las fórmulas (7.28) está demostrada.

La demostración de las fórmulas primera y segunda en (7.28) se realiza de un modo análogo (hace falta examinar las proyecciones de V sobre los planos Oyz y Oxz, respectivamente, y repetir los razonamientos aducidos). El teorema está demostrado.

3. Notación invariante de la fórmula de Ostrogradski. Supongamos que las funciones P, Q y R satisfacen las condiciones del teorema 7.5 en un dominio conexo finito V con la frontera suave a trozos S. Definamos en V un campo vectorial $\boldsymbol{p}$, cuyas coordenadas en el sistema cartesiano dado de coordenadas $Oxyz$ son iguales a P, Q, R. Es evidente que bajo las condiciones impuestas en dichas funciones el campo $\boldsymbol{p}$ será continuo en $\overline{V}$ y diferenciable en V.

Hallemos la divergencia del campo $\boldsymbol{p}$. Al hacer uso de la expresión para la divergencia del campo $\boldsymbol{p}$ en la base ortonormal $\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}$, obtenemos

$$\operatorname{div} \boldsymbol{p} = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}.$$

OBSERVACIÓN. Pasemos a un nuevo sistema cartesiano de coordenadas en un espacio. Sean $\boldsymbol{i}', \boldsymbol{j}', \boldsymbol{k}'$ una base ortonormal ligada con dicho sistema, y sean P', Q', R', las coordenadas del campo $\boldsymbol{p}$ es esta base. Evidentemente, las funciones P', Q', R' son continuas en $\overline{V}$ y diferenciables en V (estas funciones representan combinaciones lineales de las funciones P, Q, R). Por cuanto en el nuevo sistema de coordenadas

$$\operatorname{div} \boldsymbol{p} = \frac{\partial P'}{\partial x'} + \frac{\partial Q'}{\partial y'} + \frac{\partial R'}{\partial z'}$$

queda válida, por ser invariante la divergencia, una igualdad

$$\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} = \frac{\partial P'}{\partial x'} + \frac{\partial Q'}{\partial x'} + \frac{\partial R'}{\partial z'}.$$

De este modo, si P, Q, R se consideran como coordenadas del campo vectorial $\boldsymbol{p}$, la expresión $\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}$ no cambia su valor y forma, al pasar al nuevo sistema cartesiano de coordenadas rectangulares, es decir, es un invariante.

Podemos obtener, por eso, la siguiente deducción importante: *la integral que figura en el primer miembro de la fórmula de Ostrogradski* (7.27) *tiene un carácter invariante; su valor y su forma no varían al pasar a un nuevo sistema cartesiano de coordenadas*. En efecto, en tal transformación de las coordenadas el valor absoluto del jacobiano de transformación es igual a uno. Por otra parte, de acuerdo con la observación, la expresión subintegral no cambia ni el valor ni tampoco la forma, al realizarse tal transformación de las coordenadas.

Volvamos ahora a la integral

$$\iint_S P\,dy\,dz+Q\,dz\,dx+R\,dx\,dy \tag{7.31}$$

que figura en el segundo miembro de la fórmula de Ostrogradski (7.27). Cerciorémonos de que *esta integral lleva también carácter invariante: su valor y la forma de la expresión subintegral no varían, al pasar al nuevo sistema cartesiano de coordenadas*.

Teniendo presentes la observación 2, p. 2, § 3, cap. 5 sobre la forma de notación de una integral de superficie de segunda especie y las designaciones X, Y, Z para los ángulos que forma la normal $\boldsymbol{n}$ a la superficie con los ejes coordenados, podemos escribir la integral (7.31) en la forma siguiente

$$\iint_S (P\cos X+Q\cos Y+R\cos Z)\,d\sigma. \tag{7.32}$$

La expresión subintegral en la integral (7.32) es un producto escalar $\boldsymbol{np}$, por lo cual la integral (7.32) (o bien, que es lo mismo, (7.31)), puede ser escrita en la siguiente *forma invariante*

$$\iint_S \boldsymbol{np}\,d\sigma.$$

Notemos que esta última integral se denomina, de ordinario, *flujo del campo vectorial* $\boldsymbol{p}$ *através* de la superficie S.

Volviendo a la forma invariante de escribir la integral (7.31), vemos que en el nuevo sistema cartesiano de coordenadas esta integral tiene por expresión

$$\iint_S P'\,dy'\,dz'+Q'\,dz'\,dx'+R'\,dx'\,dy'.$$

Los razonamientos aducidos permiten escribir la fórmula de Ostrogradski (7.27) en la siguiente forma invariante:

$$\iiint\limits_V \operatorname{div} \boldsymbol{p}\, dv = \iint\limits_S \boldsymbol{n}\boldsymbol{p}\, d\sigma. \qquad (7.33)$$

En esta forma mediante dv está denotado un elemento de área del dominio V.

Del teorema 7.6 y de las deducciones de este punto podemos extraer un corolario importante.

Corolario. *Supongamos que las funciones $P(x, y, z)$, $Q(x, y, z)$ y $R(x, y, z)$ satisfacen las condiciones del teorema 7.5 en un dominio finito V con la frontera suave a trozos S. Si el dominio V puede dividirse en un número finito de dominios V_k con las fronteras suaves a trozos S_k, y si cada uno de V_k representa un dominio del tipo K con relación a cierto sistema cartesiano de coordenadas, para el dominio V y para las funciones P, Q, R queda válida la fórmula de Ostrogradski.*

La validez del corolario se deduce de los siguientes razonamientos. Está claro que la fórmula de Ostrogradski se verifica para cada uno de los dominios V_k. Esto se predetermina por el carácter invariante de la fórmula y por el teorema 7.6 (en cierto sistema de coordenadas V_k será un dominio del tipo K). Es obvio, además, que la suma de integrales $\iiint\limits_{V_k} \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}\right) dx\, dy\, dz$ de los primeros miembros de las fórmulas de Ostrogradski para los dominios V_k representa una integral $\iiint\limits_V \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}\right) dx\, dy\, dz$.

Mientras tanto, la suma de integrales de superficie $\iint\limits_{S_k} P\, dy\, dz + Q\, dz\, dx + R\, dx\, dy$ en los segundos miembros de las fórmulas de Ostrogradski a lo largo de las fronteras S_k de los dominios V_k proporciona una integral $\iint\limits_S P\, dy\, dz + Q\, dz\, dx + R\, dx\, dy$, pues las integrales a lo largo de los tramos comunes de la frontera de los dominios V_k se reducirán, puesto que dichos tramos en los dominios vecinos de V_k están orientados de un modo opuesto.

§ 4. Algunas aplicaciones de las fórmulas de Green, Stokes y Ostrogradski

1. Expresión para el área de un dominio plano en términos de la integral curvilínea. Sea D un dominio conexo plano finito con la frontera suave a trozos L. Es válida la siguiente *afirmación.*

El área σ del dominio D puede calcularse según la fórmula

$$\sigma = \frac{1}{2} \oint_L x\,dy - y\,dx, \tag{7.34}$$

en la que la integral curvilínea representa una suma de integrales a lo largo de las componentes conexas de la frontera L, con la particularidad de que en cada una de dichas componentes se indica una dirección del recorrido, para la cual el dominio D queda por la izquierda.

Para demostrar la afirmación, veamos en D las funciones

$$P(x, y) = -y, \quad Q(x, y) = x.$$

Es evidente que estas funciones satisfacen en D todas las condiciones, en las cuales es válida la fórmula de Green (7.1). De acuerdo con esta fórmula, tenemos

$$\iint_D \left(\frac{\partial (x)}{\partial x} - \frac{\partial (-y)}{\partial y}\right) dx\,dy = \oint_L (-y)\,dx + (x)\,dy.$$

La integral doble en la última fórmula es igual a 2σ, mientras que la integral curvilínea es igual a $\oint_L x\,dy - y\,dx$. De este modo, la fórmula (7.34) está demostrada.

2. Expresión para el volumen en términos de la integral de superficie. Sea V un dominio conexo finito en un espacio con la frontera suave a trozos S.

Es válida la siguiente *afirmación*.

El volumen v del dominio V puede calcularse según la fórmula

$$v = \frac{1}{3} \iint_S x\,dy\,dz + y\,dz\,dx + z\,dx\,dy, \tag{7.35}$$

en la que la integral de superficie representa una suma de integrales a lo largo de las componentes conexas de la frontera S, con la particularidad de que en cada una de dichas componentes está elegido el lado exterior con relación a V.

Para demostrar la afirmación, examinemos en V las funciones

$$P(x, y, z) = x, \quad Q(x, y, z) = y, \quad R(x, y, z) = z.$$

Es evidente que estas funciones satisfacen las condiciones, para las cuales se verifica la fórmula de Ostrogradski. De acuerdo con esta fórmula, tenemos

$$\iiint_V \left(\frac{\partial (x)}{\partial x} + \frac{\partial (y)}{\partial y} + \frac{\partial (z)}{\partial z}\right) dx\,dy\,dz =$$

$$= \iint_S x\,dy\,dz + y\,dz\,dx + z\,dx\,dy.$$

La integral triple en la última fórmula es igual a $3v$. Por eso, de esta fórmula se deduce la relación (7.35). La afirmación está demostrada.

3. Condiciones en las cuales una forma diferencial $P(x, y)\,dx + Q(x, y)\,dy$ representa una diferencial total. En este punto se indicarán una serie de condiciones, en las cuales una forma diferencial $P(x, y)\,dx + Q(x, y)\,dy$, definida en un dominio conexo D representa la diferencial total de cierta función $u(x, y)$.

Demostremos el siguiente teorema.

Teorema 7.7. *Supongamos que las funciones $P(x, y)$ y $Q(x, y)$ son continuas en un dominio D. Serán equivalentes las siguientes tres condiciones.*

1. *Para toda curva cerrada suave a trozos (quizás, con puntos múltiples) L dispuesta en D se tiene*

$$\oint_L P\,dx + Q\,dy = 0.$$

2. *Para cualesquiera dos puntos A y B del dominio D el valor de la integral*

$$\int_{\overset{\frown}{AB}} P\,dx + Q\,dy$$

no depende de la curva a trozos $\overset{\frown}{AB}$ que une los puntos A y B y que está dispuesta en D.

3. *Una forma diferencial $P(x, y)\,dx + Q(x, y)\,dy$ es una diferencial total. Dicho de otro modo, en D viene definida tal función $u(M) = u(x, y)$, que*

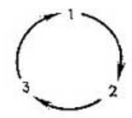
$$du = P\,dx + Q\,dy. \tag{7.36}$$

En este caso, para cualesquiera dos puntos A y B del dominio D y para una curva arbitraria suave a trozos AB que une dichos puntos y que está dispuesta en D

$$\int_{\overset{\frown}{AB}} P\,dx + Q\,dy = u(B) - u(A). \tag{7.37}$$

De este modo, el cumplimiento de cada una de las condiciones 1, 2, 3 es necesario y suficiente para que se cumpla cada una de las dos restantes.

DEMOSTRACIÓN. Realicemos la demostración según un esquema



es decir, demostremos que de la primera condición proviene la segunda, de la segunda, la tercera, y de la tercera, la primera. Es eviden-

te que en este caso quedará demostrada la equivalencia de las condiciones 1, 2, 3.

PASO PRIMERO. $1 \to 2$. Sean A y B unos puntos arbitrarios fijos del dominio D, y sean $\widehat{ACB}$ y $\widehat{AC'B}$ cualesquiera dos curvas suaves a trozos que unen los puntos citados y que están dispuestas en D (fig. 7.8).

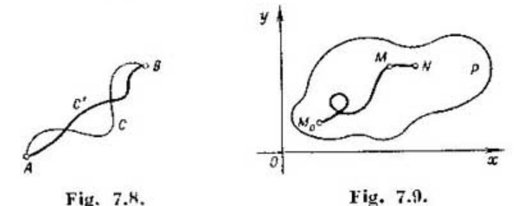


Fig. 7.8. Fig. 7.9.

7.8). La unión de estas curvas representa una curva cerrada suave a trozos (quizás, con puntos múltiples) $L = \widehat{ACB} + \widehat{BC'A}$, dispuesta en D. Por cuanto la condición 1 se supone cumplida, tenemos

$$\oint_L P\,dx + Q\,dy = 0.$$

De esta igualdad obtenemos la siguiente relación tomando en consideración que $L = \widehat{ACB} + \widehat{BC'A}$ y que, al cambiar el sentido del recorrido, una integral curvilínea cambia de signo:

$$\int_{\widehat{ACB}} P\,dx + Q\,dy = \int_{\widehat{AC'B}} P\,dx + Q\,dy.$$

Por consiguiente, la condición 2 se cumple.

PASO SEGUNDO. $2 \to 3$. Supongamos que M_0 es un punto fijo; $M(x, y)$, un punto arbitrario del dominio D; $\widehat{M_0M}$, cualquier curva suave a trozos que une los puntos M_0 y M y que está dispuesta en D.

En virtud de la condición 2, la expresión

$$u(M) = \int_{\widehat{M_0M}} P\,dx + Q\,dy \tag{7.38}$$

no depende de la curva $\widehat{M_0M}$, por lo cual representa una función definida en D. Demostremos que en cada punto M del dominio D existen derivadas parciales $\frac{\partial u}{\partial x}$ y $\frac{\partial u}{\partial y}$, con la particularidad de que

$$\frac{\partial u}{\partial x} = P(x, y), \quad \frac{\partial u}{\partial y} = Q(x, y). \tag{7.39}$$

Por cuanto $P(x, y)$, y $Q(x, y)$ son continuas en D, de las últimas relaciones se deduce la diferenciabilidad de la función u y la igualdad (7.36), con lo cual será demostrado el segundo paso $2 \to 3$.

La demostración de la existencia de las derivadas parciales de la función $u(x, y)$ y de las igualdades (7.39) se realiza simultáneamente. Demostremos, por ejemplo, la existencia de $\frac{\partial u}{\partial x}$ y la primera de las desigualdades (7.39). Fijemos un punto $M(x, y)$. Demos al argumento x un incremento Δx tan pequeño que el segmento $\overline{MN}$, que une los puntos $M(x, y)$ y $N(x + \Delta x, y)$, se disponga en D [1]. (fig. 7.9). Obtenemos

$$\Delta u = u(x + \Delta x, y) - u(x, y) =$$
$$= \int_{\widehat{M_0MN}} P\,dx + Q\,dy - \int_{\widehat{M_0M}} P\,dx + Q\,dy = \int_{\overline{MN}} P\,dx + Q\,dy.$$

Sobre el segmento $\overline{MN}$ la magnitud y es de valor constante, por la cual $\int_{\overline{MN}} Q\,dy = 0$. Por consiguiente,

$$\Delta u = \int_{\overline{MN}} P\,dx = \int_{x}^{x+\Delta x} P(t, y)\,dt.$$

Aplicando a la última integral el teorema del valor medio, obtendremos

$$\Delta u = P(x + \theta\Delta x, y)\,\Delta x, \text{ donde } 0 < \theta < 1,$$

de donde

$$\frac{\Delta u}{\Delta x} = P(x, +\theta\Delta x, y), \quad 0 < \theta < 1.$$

Por ser $P(x, y)$ continua, el segundo miembro de la última igualdad tiene, para $\Delta x \to 0$, un límite que es igual al valor de esta función en el punto $M(x, y)$. Por consiguiente, lo tendrá también el primer miembro que es igual, por definición a la derivada $\frac{\partial u}{\partial x}$. De este modo, la existencia de la derivada parcial y la validez de la primera igualdad en (7.39) está demostrada. La existencia de la derivada $\frac{\partial u}{\partial y}$ y la justeza de la segunda igualdad (7.39) resultan ser análogas.

Demostremos ahora la relación (7.37). Sean A y B cualesquiera puntos de D, y sea $\widehat{AB}$ una curva arbitraria suave a trozos que une dichos puntos y que está dispuesta en D. Esta curva se define me-

[1]) Por cuanto D es un dominio, es decir, un conjunto compuesto sólo por los puntos interiores, tal elección es bien posible.

diante las ecuaciones paramétricas $x = x(t)$, $y = y(t)$, $a \leqslant t \leqslant b$. Aprovechando la regla de cálculo de las integrales curvilíneas, obtenemos

$$\int\limits_{\widehat{AB}} P\,dx + Q\,dy = \int\limits_a^b \{P(x(t),\ y(t))\,x'(t) + Q(t),\ y(t))\,y'(t)\}\,dt =$$

$$= \int\limits_a^b u'_t\,dt = u(x(b),\ y(b)) - u(x(a),\ y(a)) = u(B) - u(A).$$

De este modo, la fórmula (7.37) queda demostrada.

PASO TERCERO: $3 \to 1$. Esta afirmación se deduce de la fórmula (7.37). En efecto, para la curva cerrada L el punto original coincidirá con el final, por lo cual, de conformidad con la fórmula (7.37), tenemos

$$\oint\limits_L P\,dx + Q\,dy = u(A) - u(A) = 0.$$

El teorema está demostrado.

OBSERVACIÓN. Se ha mostrado que las condiciones 1, 2, 3 del teorema 7.7 son equivalentes y, por eso, en particular, la condición 3 representa una condición necesaria y suficiente, bajo la cual la integral curvilínea $\int\limits_L P\,dx + Q\,dy$ no depende de la elección de la curva L que une cualesquiera puntos dados A y B del dominio D.

Para los dominios simplemente conexos [1]) señalemos una condición necesaria y suficiente, cómoda para las aplicaciones, para que la forma diferencial $P\,dx + Q\,dy$ sea una diferencial total de cierta función.

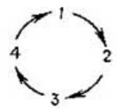
Naturalmente, esta condición será necesaria y suficiente para que la integral $\int\limits_L P\,dx + Q\,dy$ sea independiente de la elección de la curva L que une cualesquiera puntos dados A y B del dominio D.

Teorema 7.8. *Supongamos que las funciones $P(x, y)$ y $Q(x, y)$, como también sus derivadas parciales, son continuas en un dominio simplemente conexo D. Entonces, cada una de las tres condiciones* 1, 2, 3 *del teorema* 7.7 *es equivalente a la condición*

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x} \text{ en } D.$$

[1]) Recordemos que el dominio D se llama simplemente conexo, si cualquier curva cerrada suave a trozos sin puntos múltiples dispuesta en D, limita un dominio cuyos puntos pertenecen todos a D.

DEMOSTRACIÓN. Apliquemos un esquema



Ya hemos demostrado las afirmaciones $1 \to 2 \to 3$. Demostremos que $3 \to 4$ y $4 \to 1$.

PASO PRIMERO: $3 \to 4$. Supongamos que en el dominio D existe una función $u(x, y)$ tal que $du = P\,dx + Q\,dy$. Entonces $\frac{\partial u}{\partial x} = P$, $\frac{\partial u}{\partial y} = Q$, y

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right) = \frac{\partial Q}{\partial x}.$$

De este modo, la condición 4 se cumple. Notemos que para demostrar el paso $3 \to 4$ no se requiere la condición de que el dominio D sea simplemente conexo.

PASO SEGUNDO: $4 \to 1$. Supongamos cumplida la condición 4. Entonces, en cada punto del dominio D se verifica la igualdad

$$\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = 0. \tag{7.40}$$

Si L es una curva suave a trozos cerrada sin puntos múltiples que está dispuesta en D y limita un diminio D^* (el dominio D es simplemente conexo, por lo cual cada punto del dominio D^* pertenece a D), entonces, al emplear la fórmula de Green al dominio D^*, y al hacer uso de (7.40), obtenemos

$$\oint_L P\,dx + Q\,dy = \iint_{D^*} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dx\,dy = 0.$$

En el caso de que L tenga un número finito de puntos múltiples o sea una quebrada con un número finito de eslabones, para cada bucle $\widetilde{L}$ de la curva L se verifica una igualdad $\oint_{\widetilde{L}} P\,dx + Q\,dy = 0$, y, por eso, para L resulta válida la igualdad $\oint_L P\,dx + Q\,dy = 0$.

Sea L una curva suave a trozos cerrada arbitraria. Elijamos para L un número $\lambda > 0$ del modo mencionado en el lema 1. Dividamos L en las partes L_k de longitud inferior a λ (entre los puntos de partición se encuentran también los puntos angulosos de la curva L, véase fig. 7.10). De conformidad con el lema citado, las tangentes en los extremos M_k y N_k de cada parte L_h forman un ángulo inferior a $\pi/8$.

Entonces, obviamente, para λ suficientemente pequeño el triángulo curvilíneo $M_kN_kC_k$ (este triángulo está rayado en la fig. 7.10), en el cual M_kC_k forma con la tangente en M_k un ángulo inferior a $\pi/8$, y N_kC_k una normal a L en el punto N_k, se dispone íntegramente dentro de D y representa una curva suave a trozos cerrada sin puntos múltiples. Por eso,

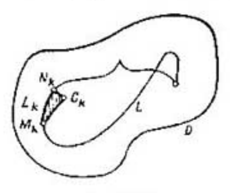


Fig. 7.10.

$$\oint\limits_{M_kN_kC_k} P\,dx+Q\,dy=0.$$

De aquí proviene que la integral curvilínea a lo largo del arco $\widehat{M_kN_k}$ es igual a la integral curvilínea a lo largo de la quebrada $M_kC_kN_k$:

$$\int\limits_{\widehat{M_kN_k}} P\,dx+Q\,dy=\int\limits_{M_kC_kN_k} P\,dx+Q\,dy.$$

Razonando análogamente para cualquier parte L_k, obtendremos, como resultado, una quebrada $\hat{L}$, dispuesta en D, para la cual

$$\oint\limits_{\hat{L}} P\,dx+Q\,dy=\oint\limits_{L} P\,dx+Q\,dy. \tag{7.41}$$

Más arriba se ha observado que para una quebrada $\hat{L}$, dispuesta en D, la integral $\oint\limits_{\hat{L}} P\,dx+Q\,dy$ es igual a cero. De aquí y de (7.41) llegamos a que

$$\oint\limits_{L} P\,dx+Q\,dy=0.$$

El teorema está demostrado.

4. Campos vectoriales potenciales y solenoidales. Hemos introducido anteriormente los conceptos de circulación y de flujo de un campo vectorial (véanse p.3, § 1, p. 3, § 2 y p. 3, § 3). Recordemos estos conceptos.

Supongamos que en cierto dominio D viene dado un campo vectorial $\boldsymbol{p}(M)=\boldsymbol{p}(x, y, z)$.

***Definición* 1.** *Se llama circulación del campo vectorial* $\boldsymbol{p}$ *a lo largo de una curva cerrada suave a trozos* L, *dispuesta en el dominio* D, *a una integral*

$$\oint\limits_{L} \boldsymbol{pt}\,dl,$$

en la cual $\boldsymbol{t}$ *es el vector unidad de la tangente a* L, *y* dl, *la diferencial de la longitud del arco de la curva* L.

Definición 2. *Se llama flujo del campo vectorial* $\boldsymbol{p}$ *através de una superficie orientada suave a trozos* S *dispuesta en el dominio* D *a una integral*

$$\iint_S \boldsymbol{pn}\, d\sigma,$$

donde $\boldsymbol{n}$ *es el vector unidad de la normal a la superficie* S *que señala su orientación, y* $d\sigma$, *un elemento de área de la superficie* S.

Introduzcamos los conceptos de campo vectorial *potencial* y de campo vectorial *solenoidal.*

Definición 3. *Un campo vectorial* $\boldsymbol{p}$ *se llama potencial en el dominio* D, *si la circulación de este campo a lo largo de cualquier curva cerrada suave a trozos, dispuesta en el dominio* D, *es igual a cero.*

Definición 4. *Un campo vectorial* $\boldsymbol{p}$ *se llama solenoidal en el dominio* D, *si el flujo de este campo a través de cualquier superficie cerrada suave a trozos, que está dispuesta en* D *sin tener líneas de autointersección y que representa una frontera de cierto subdominio limitado del dominio* D, *es igual a cero.*

Demostremos un teorema, que contiene condiciones necesarias y suficientes de potencialidad de un campo, para los campos vectoriales continuamente diferenciables y para una clase especial de dominios.

Introduzcamos previamente una noción de *dominio tridimensional simplemente conexo por superficie.*

Un dominio tridimensional D se denomina *simplemente conexo por superficie*, si para cualquier curva cerrada suave a trozos L, dispuesta en D, puede indicarse tal superficie orientable suave a trozos S, dispuesta en D, de cuya frontera sirve la curva L. Observemos que para la superficie mencionada S resulta válida la fórmula de Stokes.

Tiene lugar el siguiente teorema.

Teorema 7.9. *Supongamos que en un dominio simplemente conexo por superficie* D *viene dado un campo vectorial continuamente diferenciable* $\boldsymbol{p} = \{P, Q, R\}$. *Entonces, son equivalentes las siguientes tres condiciones*:

1. *El campo vectorial* $\boldsymbol{p} = \boldsymbol{p}(M)$ *es potencial.*

2. *En el dominio* D *existe una función potencial* $u(M)$, *es decir, una función tal que* $\boldsymbol{p} = \operatorname{grad} u$, *o bien, que es lo mismo,*

$$du = P\,dx + Q\,dy + R\,dz.$$

En este caso, para cualesquiera puntos A *y* B *del dominio* D *y para una curva arbitraria suave a trozos* AB, *que une dichos puntos y que está dispuesta en* D, *se tiene*

$$\int_{\overset{\frown}{AB}} \boldsymbol{pt}\, dl = u(B) - u(A)$$

(aquí, $\boldsymbol{t}$ es el vector unidad de la tangente a la curva AB, y dl, la diferencial del arco).

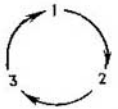
3. *El campo vectorial $\boldsymbol{p} = \boldsymbol{p}(M)$ es irrotacional, es decir,* $\operatorname{rot} \boldsymbol{p} = 0$ *en D.*

Es evidente que la condición 3 es equivalente a las relaciones

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}, \quad \frac{\partial Q}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial y}, \quad \frac{\partial R}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial z}.$$

Así pues, cada una de las condiciones 2 y 3 representa la condición necesaria y suficiente de potencialidad del campo vectorial diferenciable $\boldsymbol{p}$.

DEMOSTRACIÓN. Apliquemos un esquema



Las afirmaciones $1 \to 2$ y $2 \to 3$ son válidas sin suponer que el dominio D es simplemente conexo por superficie y se demuestran por analogía completa con las afirmaciones correspondientes de los teoremas 7.7 y 7.8.

Demostremos la afirmación $3 \to 1$.

Sea L una curva cerrada suave a trozos, dispuesta en D. Por hipótesis, D es un dominio simplemente conexo por superficie. Por eso, existe en D una superficie suave a trozos S, de cuya frontera sirve la curva L. Según la fórmula de Stokes (7.26), tenemos

$$\oint_L \boldsymbol{p}\boldsymbol{t}\, dl = \iint_S \boldsymbol{n} \operatorname{rot} \boldsymbol{p}\, d\sigma.$$

De aquí y de la condición de que $\operatorname{rot} \boldsymbol{p} = 0$, obtenemos

$$\oint_L \boldsymbol{p}\boldsymbol{t}\, dl = 0,$$

es decir, el campo $\boldsymbol{p}$ es potencial. El teorema está demostrado.

Demostremos en conclusión un teorema sobre las condiciones necesarias y suficientes de solenoidalidad en los así llamados *dominios simplemente conexos por volumen*. Un dominio espacial D se llama simplemente conexo por volumen, si cualquier superficie orientable cerrada y suave a trozos, que está dispuesta en D sin tener líneas de autointersección, es la frontera de un dominio dispuesto también en D.

Teorema 7.10. *Para que un campo vectorial continuamente diferenciable $\boldsymbol{p}$ sea solenoidal en un dominio simplemente conexo por volumen D, es necesario y suficiente que en todos los puntos de D se verifique la igualdad*

$$\operatorname{div} \boldsymbol{p} = 0.$$

DEMOSTRACIÓN. 1) *Necesidad*. Sea M un punto arbitrario del dominio D. Estudiemos cualquier esfera S con centro en M, dispuesta íntegramente en D. Al aplicar a una bola D_S con la frontera S la fórmula de Ostrogradski (7.33), obtenemos

$$\iiint\limits_{D_S} \operatorname{div} \boldsymbol{p}\, dv = \iint\limits_{S} \boldsymbol{n}\boldsymbol{p}\, d\sigma. \qquad (7.42)$$

Por cuanto $\boldsymbol{p}$ es un campo solenoidal, $\iint\limits_{S} \boldsymbol{n}\boldsymbol{p}\, d\sigma = 0$, y, por eso, de acuerdo con (7.42), $\iiint\limits_{D_S} \operatorname{div} \boldsymbol{p}\, dv = 0$. Aplicando a la última integral el teorema del valor medio, nos convencemos de que $\operatorname{div} \boldsymbol{p} = 0$ en cierto punto de la bola D_S. En virtud de que dicha bola es arbitraria y el campo $\boldsymbol{p}$, continuo, concluimos que $\operatorname{div} \boldsymbol{p}$ se reduce a cero en el punto M. De este modo, la necesidad de las condiciones del teorema está demostrada.

2) *Suficiencia*. Sea S cualquier superficie orientable cerrada y suave a trozos que está dispuesta en D y que no tiene líneas de autointersección. Por ser D un dominio simplemente conexo por volumen, S será la frontera de un dominio D_S, dispuesto también en D. Aplicando a D_S y al campo vectorial $\boldsymbol{p}$ la fórmula de Ostrogradski (7.33), obtenemos la relación (7.42), a partir de la cual proviene, teniendo en cuenta que $\operatorname{div} \boldsymbol{p} = 0$, una correlación

$$\iint\limits_{S} \boldsymbol{n}\boldsymbol{p}\, d\sigma = 0.$$

Por cuanto S es una superficie orientable cerrada y suave a trozos que está dispuesta en D y no tiene líneas con puntos múltiples la última igualdad deja constancia, por definición, de que el campo $\boldsymbol{p}$ en D es solenoidal. El teorema está demostrado.

Complemento al capítulo 7

FORMAS DIFERENCIALES EN EL ESPACIO EUCLÍDEO

§ 1. Formas polilineales de signos variables

1. Formas lineales. Sea V un espacio vectorial n-dimensional arbitrario cuyos elementos se designarán por los símbolos ξ, η, . . . El objeto de nuestro estudio lo constituirán las funciones que a todo elemento $\xi \in V$ le ponen en correspondencia cierto número real.

***Definición* 1.** *Una función a (ξ) se llama forma lineal, si para cualesquiera $\xi \in V$, $\eta \in V$ y para todo número real λ se verifican las igualdades*

1) $a(\xi+\eta)=a(\xi)+a(\eta)$.
2) $a(\lambda\xi)=\lambda a(\xi)$.

***Definición* 2.** *Llamemos suma de dos formas lineales a y b a una forma lineal c, la cual a todo vector $\xi\in V$ le pone en correspondencia un número*

$$c(\xi)=a(\xi)+b(\xi).$$

Llamemos producto de una forma lineal por un número real λ a una forma lineal b que a todo vector $\xi\in V$ le pone en correspondencia un número

$$b(\xi)=\lambda a(\xi).$$

De este modo, el conjunto de todas las formas lineales forma un espacio vectorial que se designará por el símbolo $L(V)$ [1]. Hallemos la representación de la forma lineal a en una base $\{e_i\}_{i=1}^{n}$. Sea

$$\xi=\sum_{i=1}^{n}\xi^i e_i,$$

donde los números ξ^i se definen unívocamente. Si designamos $a_i=a(e_i)$, la representación buscada tendrá por expresión

$$a(\xi)=\sum_{i=0}^{n}\xi^i a_i.$$

Demostremos que la dimensión dim $L(V)$ del espacio lineal $L(V)$ es igual a n. Con este fin basta señalar una base cualquiera en $L(V)$ que contenga exactamente n elementos, es decir, n formas lineales. Fijemos una base arbitraria $\{e_k\}$ del espacio V y examinemos las siguientes formas lineales:

$$e^k(\xi)=\xi^k \quad (k=1,\ 2,\ \ldots,\ n),$$

donde $\{\xi^k\}$ son coeficientes de la descomposición del vector ξ según los elementos de la base $\{e_k\}$. De otras palabras, la forma lineal e^k actúa sobre los elementos de la base $\{e_i\}$ según la regla

$$e^k(e_i)=\delta_{ik}=\begin{cases}1 & \text{para } i=k,\\ 0 & \text{para } i\neq k.\end{cases}$$

Entonces, en la base dada $\{e_i\}$ la forma lineal a tiene por expresión

$$a(\xi)=\sum_{i=1}^{n}a_i e^i(\xi), \qquad a_i=a(e_i),$$

es decir, las formas lineales $e^1(\xi)$, $e^2(\xi)$, . . ., $e^n(\xi)$ forman en $L(V)$ una base. Esta base se denomina *conjugada* (y también *recíproca o dual*) de la base $\{e_i\}$.

2. Formas bilineales. Designemos por $V\times V$ un conjunto de todas los pares ordenados (ξ_1, ξ_2), donde $\xi_1\in V$, $\xi_2\in V$, y examinemos las funciones $a(\xi_1, \xi_2)$ que a todo elemento de $V\times V$ (es decir, a cada dos elementos $\xi_1\in V$ y $\xi_2\in$ $\in V$) le ponen en correspondencia cierto número real.

***Definición*.** *Una función $a(\xi_1, \xi_2)$ se denomina forma bilineal, si para cada valor fijo de un argumento será forma lineal con relación al otro argumento.*

De otras palabras, para cualesquiera vectores ξ_1, ξ_2, η_1, η_2 y todos los números reales λ_1, λ_2, μ_1, μ_2 se verifica la igualdad

$$a(\lambda_1\xi_1+\mu_1\eta_1, \lambda_2\xi_2+\mu_2\eta_2)=$$
$$=\lambda_1\lambda_2\, a(\xi_1, \xi_2)+\lambda_1\mu_2\, a(\xi_1, \eta_2)+$$
$$+\mu_1\lambda_2\, a(\eta_1, \xi_2)+\mu_1\mu_2\, a(\eta_1, \eta_2).$$

[1] El espacio $L(V)$ se denota también con el símbolo V^* y se denomina *conjugado* (o *dual*) de V.

El conjunto de todas las formas bilineales se transforma con facilidad en un espacio lineal, al introducir en este conjunto de un modo natural las operaciones de sumación y multiplicación por un número real. El espacio obtenido de formas bilineales se denotará con $L_2(V)$.

Hallemos una representación de la forma bilineal $a(\xi_1, \xi_2)$ en una base $\xi\ \{e_i\}_{i=1}^n$ del espacio V. Supongamos que $\xi_k = \sum\limits_{j=1}^n \xi_k^j e_j$, $k=1, 2$. Pongamos $a(e_i, e_j) = a_{ij}$ y obtendremos la representación buscada

$$a(\xi_1, \xi_2) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij}\xi_1^i\xi_2^j.$$

Para determinar la dimensión del espacio $L_2(V)$, formemos, con ayuda de las formas bilineales $e^i(\xi)$ que constituyen en $L(V)$ una base conjugada de la base $\{e_i\}$, las siguientes formas bilineales

$$e^{ij}(\xi_1, \xi_2) = e^i(\xi_1)\, e^j(\xi_2).$$

Entonces, una forma bilineal arbitraria será unívocamente representable en la siguiente forma

$$a(\xi_1, \xi_2) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij}e^{ij}(\xi_1, \xi_2).$$

Esto significa que las formas $e^{ij}(\xi_1, \xi_2)$ forman una base en $L_2(V)$, y, por consiguiente, la dimensión de $L_2(V)$ es igual a n^2.

3. **Formas polineales.** Sea p un número natural. Con el símbolo $V^p = V \times V \times \ldots \times V$ denotemos el conjunto de todos los números ordenados $(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_p)$ de p vectores, cada uno de los cuales pertenece a V, y estudiemos unas funciones que a todo surtido de este género le pone en correspondencia cierto número real.

Definición. *Una función $a(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_p)$ se denomina forma polilineal de grado p (o bien p-forma), si es forma lineal respecto de cada argumento, siendo fijos los valores de los restantes.*

Al introducir en el conjunto de todas las p-formas las operaciones lineales, obtendremos un espacio lineal, el cual se denotará con el símbolo $L_p(V)$.

Hallemos la representación de la forma polilineal arbitraria $a(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_p)$ en una base $\{e_i\}_{i=1}^n$ del espacio V. Designemos

$$a_{i_1 i_2 \ldots i_p} = a(e_{i_1}, e_{i_2}, \ldots, e_{i_p}).$$

Entonces, si $\xi_k = \sum\limits_{i=1}^n \xi_k^i e_i$, $k = 1, 2, \ldots, p$, resulta

$$a(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_p) = \sum_{i_1=1}^p \cdots \sum_{i_p=1}^p a_{i_1 i_2 \ldots i_p}\xi_1^{i_1}\xi_2^{i_2} \ldots \xi_p^{i_p}.$$

Si $e^k(\xi)$ es la base en $L(V)$ conjugada de $\{e_i\}$, entonces, evidentemente, las p-formas

$$e^{i_1 i_2 \ldots i_p}(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_p) = e^{i_1}(\xi_1)e^{i_2}(\xi_2) \ldots e^{i_p}(\xi_p)$$

forman una base en $L_p(V)$ y, de este modo, $L_p(V)$ es de dimensión n^p.

4. Formas polilineales de signo variable.

Definición. *Una forma polilineal $a(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_p)$ se llama de signo variable, si, al permutar cualesquiera dos argumentos, ella cambia de signo* [1]. *Dicho de otro modo,*

$$a(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_i, \ldots, \xi_j, \ldots, \xi_p) = -a(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_j, \ldots, \xi_i, \ldots \xi_p).$$

El conjunto de todas las formas polilineales de signo variable de grado p forma, evidentemente, un subespacio del espacio lineal $L_p(V)$, el cual se denotará con el símbolo $A_p(V)$[2]. Los elementos del espacio $A_p(V)$ vamos a designar con el símbolo $\omega = \omega(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_p)$.

Notemos que si $\{e_i\}$ es una base arbitraria en V y

$$\omega = \sum_{i_1=1}^{n} \ldots \sum_{i_p=1}^{n} \omega_{i_1 \ldots i_p} \xi_0^{i_1} \ldots \xi_p^{i_p},$$

los números $\omega_{i_1 \ldots i_p}$ cambian de signo, al permutar dos índices. Esto se deduce de lo que

$$\omega_{i_1 \ldots i_p} = \omega(e_{i_1}, \ldots e_{i_p}).$$

Resulta natural considerar que $A_1(V) = L_1(V)$, y $A_0(V)$ se compone de todas las constantes, es decir, coincide con la recta numérica.

5. Producto exterior de las formas de signo variable. Examinemos dos formas de signo variable $\omega^p \in A_p(V)$ y $\omega^q \in A_q(V)$. En este punto introduzcamos la operación fundamental en la teoría de las formas de signo variable, esto es, la operación de *producto exterior*.

Sea

$$\left\| \begin{array}{l} \omega^p = \omega^p(\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_p), \ \eta_i \in V, \\ \omega^q = \omega^q(\zeta_1, \zeta_2, \ldots, \zeta_q), \ \zeta_j \in V. \end{array} \right\|$$

Veamos la siguiente forma polilineal $p = L_{p+q}(V)$:

$$a(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_{p+q}) = \omega^p(\xi_1, \ldots, \xi_p) \cdot \omega^q(\xi_{p+1}, \ldots, \xi_{p+q}). \quad (7.43)$$

En el caso general esta forma no es de signo variable. A saber, al permutarlos argumentos ξ_i y ξ_j, donde $1 \leqslant i \leqslant p$, y $p + 1 \leqslant j \leqslant p + q$, puede suceder que la forma (7.43) no cambie de signo. A esta circunstancia se debe precisamente la necesidad de introducir el producto exterior.

Para introducir el producto exterior, no harán falta algunos hechos de la teoría de las permutaciones.

Recordemos que se denomina *permutación* de los números $\{1, 2, \ldots, m\}$ a una función $\sigma = \sigma(k)$ que está definida en estos números y que los aplica biunívocamente sobre sí mismos. El conjunto de todas las permutaciones de tal género se denota con el símbolo Σ_m. Es evidente que existen en total $m!$ diferentes permutaciones de Σ_m. Para dos permutaciones, $\sigma \in \Sigma_m$ y $\tau \in \Sigma_m$, se define de un modo natural una superposición $\sigma\tau \in \Sigma_m$. La permutación σ^{-1} se llama inversa de σ, si $\sigma^{-1}\sigma = \sigma\sigma^{-1} = \varepsilon$, donde ε es una permutación idéntica (es decir, $\varepsilon(k) = k$ $k = 1, 2, \ldots, m$).

La permutación σ lleva el nombre de *transposición*, si hace permutar dos números, dejando en su lugar los demás. Dicho de otro modo, existe un par de números i y j ($1 \leqslant i \leqslant m$, $1 \leqslant j \leqslant m$, $i \neq j$) tal que $\sigma(i) = j$, $\sigma(j) = i$, y y $\sigma(k) = k$ para $k \neq i$ y $k \neq j$. Evidentemente, si σ es una transposición, $\sigma^{-1} = \sigma$, y $\sigma \cdot \sigma = \varepsilon$.

---

[1] Formas polilineales de signos variables se llaman también *antisimétricas, oblicuas, exteriores*.

[2] Este espacio se denomina también con el símbolo $\wedge^p V^*$ y se llama grado exterior p del espacio V^*.

Se sabe que cualquier permutación σ puede ser representada como una superposición de transposiciones que permutan los números vecinos, con la particularidad de que la paridad del número de transposiciones en tal representación no depende de su elección y se denomina paridad de la permutación σ.

Introduzcamos las siguientes designaciones:

$$\operatorname{sgn} \sigma = \begin{cases} 1, & \text{si la permutación } \sigma \text{ es par,} \\ -1, & \text{si la permutación } \sigma \text{ es impar.} \end{cases}$$

Observemos que la forma $a \in L_p(V)$ pertenece a $A_p(V)$, si para toda permutación $\sigma \in \sum_p$.

$$a(\xi_{\sigma(1)}, \xi_{\sigma(2)}, \ldots, \xi_{\sigma(p)}) = \operatorname{sgn} \sigma \cdot a(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_p).$$

Examinemos de nuevo la forma polilineal (7.43). Para cualquier permutación $\sigma \in \Sigma_{p+q}$ pongamos

$$\sigma a(\xi_1, \ldots, \xi_{p+q}) = a(\xi_{\sigma(1)}, \ldots, \xi_{\sigma(p+q)}). \tag{7.44}$$

No es difícil convencerse de que si $\tau \in \sum_{p+q}$ y $\sigma \in \sum_{p+q}$, tenemos $(\tau\sigma)a = \tau(\sigma a)$.

Introduzcamos la siguiente definición.

Definición. *Se llama producto exterior de la forma $\omega^p \in A_p(V)$ y de la forma $\omega^q \in A_q(V)$ a una forma $\omega \in A_{p+q}(V)$ que se define mediante la igualdad*

$$\omega(\xi_1, \ldots, \xi_{+q}) = \sum_\sigma \operatorname{sgn} \sigma \cdot \sigma a, \tag{7.45}$$

donde la suma se toma respecto de todas las permutaciones $\sigma \in \sum_{p+q}$ que satisfacen la condición

$$\sigma(1) < \sigma(2) < \ldots < \sigma(p), \quad \sigma(p+1) < \ldots < \sigma(p+q), \tag{7.46}$$

y la magnitud σa se define mediante las igualdades (7.43) *y* (7.44).

El producto exterior de las formas ω^p y ω^q se denota con el símbolo

$$\omega = \omega^p \wedge \omega^q.$$

Ilustremos con un ejemplo cómo actúa la permutación σ que satisface la condición (7.46). Supongamos que por una carretera se mueven paralelamente dos columnas de automóviles, en la primera de las cuales hay p, y en la segunda, q automóviles. Ahora, la carretera empieza a estrecharse y ambas columnas se reordenan en una a plena carrera. Los automóviles de la primera columna ocupan sus lugares entre los de la segunda columna, no obstante, el orden de movimiento de los automóviles dentro de cada columna queda intacto. De resultas, obtenemos una permutación que satisface la condición (7.46). Es fácil ver que, viceversa, toda permutación de esta índole puede ser realizada en nuestro modelo.

Con el fin de convencerse de que la definición enunciada es correcta, hace falta demostrar que $\omega = \omega^p \wedge \omega^q \in A_{p+q}(V)$. Evidentemente, se necesita sólo demostrar que la forma ω es de signo variable.

Probemos que, al permutar dos argumentos ξ_i y ξ_{i+1} la forma ω cambia de signo. En este caso se deducirá con facilidad que $\omega \in A_{p+q}(V)$. Supongamos que $\tau \in \Sigma_{p+q}$ es precisamente tal permutación. Cerciorémonos de que

$$\tau\omega = -\omega = (\operatorname{sgn} \tau)\,\omega. \tag{7.47}$$

De la igualdad (7.45) obtenemos

$$\tau\omega = \sum_\sigma (\operatorname{sgn} \sigma) \cdot (\tau\sigma)\, a.$$

Dividamos esta suma en dos:

$$\tau\omega = \sum_\sigma{}' (\operatorname{sgn} \sigma)(\tau\sigma)\, a + \sum_\sigma{}'' (\operatorname{sgn} \sigma)(\tau\sigma)\, a. \tag{7.48}$$

La primera suma contendrá aquellas permutaciones σ, para las cuales o bien $\sigma^{-1}(i) \leqslant p$, $\sigma^{-1}(i+1) \leqslant p$, o bien $\sigma^{-1}(i) \geqslant p+1$, $\sigma^{-1}(i+1) \geqslant p+1$. Para cada tal permutación

$$(\tau\sigma)\, a = -\sigma a.$$

Para que esta afirmación se haga más obvia, designemos $k = \sigma^{-1}(i)$, $l = \sigma^{-1}(i+1)$, es decir, $i = \sigma(k)$, $i+1 = \sigma(l)$. La forma σa representa un producto de las formas ω^p y ω^q, con la particularidad de que como los argumentos de ω^p sirven los vectores $\xi_{\sigma(1)}, \xi_{\sigma(2)}, \ldots, \xi_{\sigma(p)}$, y como los de ω^q, los vectores $\xi_{\sigma(p+1)}, \ldots, \xi_{\sigma(p+q)}$. Si $k \leqslant p$ y $l \leqslant p$, entonces $\xi_i = \xi_{\sigma(k)}$ y $\xi_{i+1} = \xi_{\sigma(l)}$ son argumentos de la forma ω^p, la cual es, por definición, de signo variable. Análogamente se examina el caso en que $k \geqslant p+1$ y $l \geqslant p+1$.

Así pues, para la primera suma se verifica la igualdad

$$\sum_{\sigma}{}' (\operatorname{sgn}\sigma)(\tau\sigma)\, a = -\sum_{\sigma}{}' (\operatorname{sgn}\sigma)\, \sigma a. \tag{7.49}$$

La segunda suma contendrá aquellas permutaciones σ, para las cuales o bien $\sigma^{-1}(i) \leqslant p$, $\sigma^{-1}(i+1) \geqslant p+1$, o bien $\sigma^{-1}(i) \geqslant p+1$, $\sigma^{-1}(i+1) \leqslant p$. Probemos que el conjunto de permutaciones $\{\sigma\}$ que satisfacen esta condición (como también, por supuesto, la condición (7.46)) coincide con el conjunto de permutaciones del tipo $\tau\sigma$, donde $\sigma \in \{\sigma\}$. Volvamos a nuestro modelo con dos columnas de automóviles. La afirmación adquirirá, evidentemente, la siguiente forma.

Si, en el proceso de alguna reordenación, el automóvil con el número k de la primera columna resulta disponerse inmediatamente delante del automóvil con el número l de la segunda columna, puede indicarse fácilmente otra reordenación, que tendrá por resultado el cambio de lugar de dichos automóviles, mientras que el orden de movimiento de los demás automóviles queda el mismo.

De este modo, por cuanto $\operatorname{sgn}\tau\sigma = -\operatorname{sgn}\sigma$, tenemos

$$\sum_{\sigma}{}'' (\operatorname{sgn}\sigma)(\tau\sigma)\, a = -\sum_{\sigma}{}'' (\operatorname{sgn}\tau\sigma)(\tau\sigma)\, a = -\sum_{\sigma}{}'' (\operatorname{sgn}\sigma)\, \sigma a. \tag{7.50}$$

Sustituyendo (7.49) y (7.50) en (7.48), obtendremos (7.47).

EJEMPLO 1. Examinemos dos formas lineales $f(\xi) \in A_1(V)$ y $g(\xi) \in A_1(V)$. Como producto exterior interviene una forma bilineal

$$f \wedge g = \sum_{\sigma} (\operatorname{sgn}\sigma)\cdot\sigma f(\xi_1) g(\xi_2) = f(\xi_1) g(\xi_2) - g(\xi_1) f(\xi_2).$$

EJEMPLO 2. Sea $f(\xi) \in A_1(V)$, $g(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_q) \in A_q(V)$. Como producto exterior $\omega = f \wedge g$ interviene la $(q+1)$-forma cuyos argumentos se denotarán con $\xi_0, \xi_1, \ldots, \xi_q$,

$$\omega = \sum_{\sigma} (\operatorname{sgn}\sigma)\, \sigma f(\xi_0)\, g(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_q) =$$

$$= \sum_{i=0}^{q} (-1)^i f(\xi_i)\, g(\xi_0, \ldots, \xi_{i-1}, \xi_{i+1}, \ldots, \xi_q).$$

6. Propiedades del producto exterior de las formas de signo variable. 1) La propiedad evidente del producto exterior es su *linealidad*:

a) si $\omega^p \in A_p(V)$, $\omega^q \in A_q(V)$, para cualquier número real λ tenemos

$$(\lambda\omega^p) \wedge \omega^q = \omega^p \wedge (\lambda\omega^q) = \lambda(\omega^p \wedge \omega^q);$$

b) si $\omega_1^p \in A_p(V)$, $\omega_2^p \in A_p(V)$ y $\omega^q \in A_q(V)$, tendremos

$$(\omega_1^p + \omega_2^p) \wedge \omega^q = \omega_1^p \wedge \omega^q + \omega_2^p \wedge \omega^q.$$

2) *Anticonmutatividad.* Si $\omega^p \in A_p(V)$ y $\omega^q \in A_q(V)$, tenemos

$$\omega^p \wedge \omega^q = (-1)^{pq}\omega^q \wedge \omega^p.$$

DEMOSTRACIÓN. Sea

$$\omega^p \wedge \omega^q = \omega = \omega(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_{p+q}).$$

Es fácil ver que

$$\omega^q \wedge \omega^p = \omega(\xi_{p+1}, \xi_{p+2}, \ldots, \xi_{p+q}, \xi_1, \ldots, \xi_p).$$

Cerciorémonos de que la permutación $(\xi_{p+1}, \ldots, \xi_{p+q}, \xi_1, \ldots, \xi_p)$ puede obtenerse a partir de los vectores $(\xi_1, \ldots, \xi_{p+q})$ con ayuda de pq transposiciones sucesivas. El vector ξ_{p+1} puede ser trasladado en el primer lugar, realizando p transposiciones. A continuación, con ayuda del mismo número de transposiciones, traslademos en el segundo lugar el vector ξ_{p+2}, etc. Se trasladarán en total q vectores, realizando cada vez p transposiciones, es decir, el número de todas las transposiciones es igual a pq. En este caso la anticonmutatividad se deducirá de que el producto exterior es de signo variable.

3) *Asociatividad.* Si $\omega^p \in A_p(V)$, $\omega^q \in A_q(V)$, $\omega^r \in A_r(V)$, tendremos

$$(\omega^p \wedge \omega^q) \wedge \omega^r = \omega^p \wedge (\omega^q \wedge \omega^r).$$

DEMOSTRACIÓN. Sea $\sigma \in \Sigma_{p+q+r}$. Veamos la siguiente magnitud:

$$\omega = \sum_{\sigma} (\operatorname{sgn}\sigma)\, \sigma\, [\omega^p(\xi_1, \ldots, \xi_p)\, \omega^q(\xi_{p+1}, \ldots, \xi_{p+q})\, \omega^r(\xi_{p+q+1}, \ldots, \xi_{p+q+r})]. \quad (7.51)$$

La suma (7.51) será igual a $(\omega^p \wedge \omega^q) \wedge \omega^r$, si, al principio, realizamos la sumación respecto de todas las permutaciones que dejan sin cambio los números $p+q+1, p+q+2, \ldots, p+q+r$, y que satisfacen la condición (7.46), y sólo después sumamos respecto de todas las permutaciones que conservan el orden obtenido de los primeros $p+q$ argumentos y el orden de los argumentos $\xi_{p+q+1}, \ldots, \xi_{p+q+r}$.

De un modo análogo podemos obtener la magnitud $\omega^p \wedge (\omega^q \wedge \omega^r)$.

Mostremos que en ambos casos se obtiene una suma respecto de todas las permutaciones que satisfacen las condiciones

$$\left.\begin{aligned} \sigma(1) < \sigma(2) < \ldots < \sigma(p), \\ \sigma(p+1) < \sigma(p+2) < \ldots < \sigma(p+q), \\ \sigma(p+q+1) < \ldots < \sigma(p+q+r). \end{aligned}\right\} \quad (7.52)$$

Con este fin volvamos otra vez a nuestro modelo con las columnas de automóviles. Supongamos que por la carretera se mueven tres columnas de automóviles, en la primera de las cuales hay p automóviles, en el segunda q, y en la tercera, r máquinas. Uno de los métodos de reordenación de las tres columnas mencionadas en una consiste en lo que se reúnen las columnas primera y segunda, tras lo cual la columna obtenida se reúne con la tercera. Puede emplearse también otro método, cuando se reúnen primero las columnas segunda y tercera y a la columna obtenida se junta después la primera columna. Es evidente que la permutación σ, obtenida como resultado de cualquiera de las reordenaciones citadas, satisface la condición (7.52) y, viceversa, cualquier permutación que satisface la condición (7.52) puede obtenerse tanto con ayuda del primer método, como con ayuda del segundo método de reordenación. Esto significa precisamente que $(\omega^p \wedge \omega^q) \wedge \omega^r$ y $\omega^p \wedge (\omega^q \wedge \omega^r)$ coinciden.

La asociatividad de la multiplicación exterior presta la posibilidad de estudiar cualquier producto finito

$$\omega_1 \wedge \omega_2 \wedge \ldots \wedge \omega_m, \quad \text{donde} \quad \omega_i \in A_{p_i}(V).$$

EJEMPLO 1. Sean $a_1(\xi), a_2(\xi), \ldots, a_m(\xi)$ unas formas lineales. Entonces,

$$a_1 \wedge a_2 \wedge \ldots \wedge a_m = \sum_{\sigma} (\operatorname{sgn} \sigma)\, \sigma\, [a_1(\xi_1)\, a_2(\xi_2) \ldots a_m(\xi_m)], \tag{7.53}$$

donde la sumación se realiza respecto de todas las permutaciones $\sigma \in \sum_m$.

Esta igualdad se comprueba con facilidad por inducción. Notemos que si introducimos la matriz $\{a_i(\xi_j)\}$, la igualdad (7.53) puede escribirse en la forma siguiente

$$(a_1 \wedge a_2 \wedge \ldots \wedge a_m)(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_m) = \det \{a_i(\xi_j)\}. \tag{7.54}$$

7. Base en un espacio de formas de signo variable. Elijamos una base $\{e_i\}_{i=1}^n$ en el espacio V y denotemos con $\{e^i\}_{i=1}^n$ una base en $L(V)$, conjugada de la primera. Recordemos que $e^i(\xi)$ es una forma lineal que en los elementos de la base $\{e_i\}$ toma el valor $e^i(e_j) = \delta_{ij}$.

En el p. 3 se ha mostrado que toda clase de productos

$$e^{i_1}(\xi_1)e^{i_2}(\xi_2) \ldots e^{i_p}(\xi_p)$$

forman en $L_p(V)$ una base. Por cuanto $A_p(V) \subset L_p(V)$, cada p—forma de signo variable puede descomponerse de un modo único en una combinación lineal de productos mencionados. No obstante, estos productos no forman una base en $A_p(V)$, puesto que no son p-formas de signo variable, es decir, no pertenecen a $A_p(V)$. Sin embargo, podemos construir de ellos una base en $A_p(V)$ con ayuda de la multiplicación exterior.

Teorema 7.11. *Sea $\{e_i\}_{i=1}^n$ una base en el espacio V, y sea $\{e^i\}_{i=1}^n$ una base conjugada en el espacio $L(V)$. Toda p-forma de signo variable $\omega \in A_p(V)$ puede ser representada, y, además, de un modo único, en la forma*

$$\omega = \sum_{1 \leqslant i_1 < \ldots < i_p \leqslant n} \omega_{i_1 i_2 \ldots i_p}\, e^{i_1} \wedge e^{i_2} \wedge \ldots \wedge e^{i_p}. \tag{7.55}$$

Cada sumando de la suma en el segundo miembro de (7.55) representa un producto de la constante $\omega_{i_1 i_2 \ldots i_p}$ por la forma de signo variable $e^{i_1} \wedge e^{i_2} \wedge \ldots \wedge e^{i_p}$.

DEMOSTRACIÓN. En virtud de los resultados obtenidos en el p. 4, podemos escribir

$$\omega = \sum_{i_1=1}^{n} \ldots \sum_{i_p=1}^{n} \omega_{i_1 i_2 \ldots i_p} e^{i_1} e^{i_2} \ldots e^{i_p}, \tag{7.56}$$

donde los números $\omega_{i_1 i_2 \ldots i_p} = \omega(e^{i_1}, e^{i_2}, \ldots, e^{i_p})$ están definidos de un modo único.

Por cuanto la forma $\omega(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_p)$ es de signo variable, para cualquier permutación $\sigma \in \Sigma_p$ tenemos

$$\omega(\xi_{\sigma(1)}, \xi_{\sigma(2)}, \ldots, \xi_{\sigma(p)}) = (\operatorname{sgn} \sigma)\, \omega(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_p).$$

Por consiguiente,

$$\omega_{i_{\sigma(1)} i_{\sigma(2)} \ldots i_{\sigma(p)}} = (\operatorname{sgn} \sigma)\, \omega_{i_1 i_2 \ldots i_p}. \tag{7.57}$$

Agrupemos los sumandos en la suma (7.56) que difieren en permutación de los índices $i_1, i_2, \ldots, i_p$, y hagamos uso de la igualdad (7.57). Obtendremos

$$\omega = \sum_{i_1 < i_2 < \ldots < i_p} \sum_{\sigma} \omega_{i_{\sigma(1)} \ldots i_{\sigma(p)}} e^{i_{\sigma(1)}} \ldots e^{i_{\sigma(p)}} =$$

$$= \sum_{i_1 < i_2 < \ldots < i_p} \omega_{i_1 i_2 \ldots i_p} \Big[\sum_{\sigma} (\operatorname{sgn} \sigma)\, e^{i_{\sigma(1)}} \ldots e^{i_{\sigma(p)}} \Big]. \tag{7.58}$$

En virtud del ejemplo en el p. 6, la suma que figura entre corchetes es $e^{i_1} \wedge \wedge e^{i_2} \wedge \ldots \wedge e^{i_p}$. El teorema está demostrado.

Corolario 1. *Los elementos* $e^{i_1} \wedge e^{i_2} \wedge \ldots \wedge e^{i_p}$ $(1 \leqslant i_1 < i_2 < \ldots < i_p \leqslant n)$ *forman una base en el espacio* $A_p(V)$. *Dicha base es vacía para* $p > n$, *y se compone de un solo elemento, si* $p = n$.

Corolario 2. *La dimensión del espacio* $A_p(V)$ *es igual a* C_n^p.

En lo que sigue se considerará, por regla general, que la base elegida $e_1, e_2, \ldots, e_n$ es fija y que las formas lineales $e^i(\xi)$ están designadas por el símbolo $e^i(\xi) = \xi^i$. Entonces, cualquier forma $\omega \in A_p(V)$ tendrá por expresión

$$\omega(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_p) = \sum_{i_1 < \ldots < i_p} \omega_{i_1 \ldots i_p} \xi^{i_1} \wedge \ldots \wedge \xi^{i_p}. \tag{7.59}$$

EJEMPLO 1.

$$\xi^1 \wedge \xi^2 = (e^1 \wedge e^2)(\xi_1, \xi_2) = \sum_{\sigma} (\operatorname{sgn} \sigma)\, \sigma [e^1(\xi_1) e^2(\xi_2)] =$$

$$= e^1(\xi_1) e^2(\xi_2) - e^1(\xi_2) e^2(\xi_1) = \xi_1^1 \xi_2^2 - \xi_2^1 \xi_1^2,$$

donde ξ_i^j es el j-ésimo coeficiente en la descomposición del vector ξ_i respecto de la base $\{e_j\}$.

EJEMPLO 2.

$$\xi^1 \wedge \xi^2 \wedge \ldots \wedge \xi^n = \det\{\xi_i^j\},$$

donde $\xi_i = \sum_{j=1}^{n} \xi_i^j e_j$.

§ 2. Formas diferenciales

1. Definiciones. Examinemos un dominio arbitrario abierto G de un espacio euclídeo n-dimensional E^n. Los puntos del dominio G se denotarán con los símbolos $x = (x^1, x^2, \ldots, x^n)$, $y = (y^1, y^2, \ldots, y^n)$, etc.

Definición. *Se llama forma diferencial de grado p, definida en el dominio G, a una función* $\omega(x, \xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_p)$, *la cual representa, para todo* $x \in G$ *fijo, una p-forma de signo variable de* $A_p(E^n)$.

El conjunto de todas las p-formas diferenciales en el dominio G se denotará con $\Omega_p(G) = \Omega_p(G, E^n)$.

Convengamos en considerar que una p-forma ω representa, para $\xi_1, \ldots, \xi_p \in E^n$ fijos, una función infinitamente diferenciable en G. Aprovechando los resultados del § 1, podemos escribir cada p-forma ω del modo siguiente

$$\omega = \sum_{i_1 < \ldots < i_p} \omega_{i_1 \ldots i_p} \xi^{i_1} \wedge \ldots \wedge \xi^{i_p}. \tag{7.60}$$

En adelante el vector ξ se denotará siempre con el símbolo $dx = (dx^1, dx^2, \ldots, dx^n)$, y los vectores ξ_k, con los símbolos $d_k(x) = (d_k x^1, d_k x^2, \ldots, d_k x^n)$. A título de base en E^n elijamos los vectores $e_k = \{0, 0, \ldots, 1, 0, \ldots, 0\}$, donde la unidad ocupa el k-ésimo lugar. Como elementos de la base conjugada intervienen las funciones $e^k(\xi) = e^k(dx)$, definidas mediante las igualdades

$$e^k(dx) = dx^k.$$

Entonces, la forma diferencial (7.60) tendrá por expresión

$$\omega(x, d_1 x, \ldots, d_p x) = \sum_{i_1 < \ldots < i_p} \omega_{i_1 \ldots i_p}(x)\, dx^{i_1} \wedge \ldots \wedge dx^{i_p}.$$

EJEMPLO 1. La 0-forma diferencial es toda función definida en el dominio G (y, en virtud de nuestra suposición, continuamente diferenciable en G).

EJEMPLO 2. La 1-forma diferencial tiene por expresión

$$\omega(x, dx) = \sum_{k=1}^{n} \omega_k(x)\, dx^k.$$

En particular, cuando $n = 1$, $\omega(x, dx) = f(x)\, dx$. La forma diferencial de grado 1 se llama también forma diferencial lineal.

EJEMPLO 3. La 2-forma diferencial tiene por expresión

$$\omega(x, d_1x, d_2x) = \sum_{i<k} \omega_{ik}(x)\, dx^i \wedge dx^k.$$

Por definición,

$$dx^i \wedge dx^k = (e^i \wedge e^k)(d_1x, d_2(x) = e^i(d_1x)\, e^k(d_2x) - $$
$$- e^i(d_2x)\, e^k(d_1x) = d_1x^i d_2x^k - d_2x^i d_1x^k = \begin{vmatrix} d_1x^i & d_1x^k \\ d_2x^i & d_2x^k \end{vmatrix}.$$

En particular, cuando $n = 2$, obtenemos

$$\omega(x, d_1x, d_2x) = f(x) \begin{vmatrix} d_1x^1 & d_1x^2 \\ d_2x^1 & d_2x^2 \end{vmatrix}.$$

El determinante es igual al elemento de área correspondiente a los vectores d_1x y d_2x.

En el caso en que $n = 3$, obtenemos, al designar $\omega_{12} = R$, $\omega_{23} = P$, $\omega_{13} = -Q$:

$$\omega = P\, dx^2 \wedge dx^3 - Q\, dx^1 \wedge dx^3 + R\, dx^1\, dx^2 = \begin{vmatrix} P & Q & R \\ d_1x^1 & d_1x^2 & d_1x^3 \\ p_2x^1 & d_2x^2 & d_2x^3 \end{vmatrix}.$$

EJEMPLO 4. La 3-forma diferencial en un espacio tridimensional tiene por expresión

$$\omega(x, d_1x, d_2x, d_3x) = f(x)\, dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3 = f(x) \begin{vmatrix} d_1x^1 & d_1x^2 & d_1x^3 \\ d_2x^1 & d_2x^2 & d_2x^3 \\ d_3x^1 & d_3x^2 & d_3x^3 \end{vmatrix}.$$

El determinante es igual al elemento de volumen correspondiente a los vectores d_1x, d_2x, d_3x.

2. Diferencial exterior.

Definición. *Se llama diferencial exterior de una forma diferencial p-lineal* $\omega \in \Omega_p(G)$ *a una forma* $d\omega \in \Omega_{p+1}(G)$ *definida mediante la correlcción*

$$d\omega = \sum_{i_1 < \ldots < i_p} d\omega_{i_1 \ldots i_p} \wedge dx^{i_1} \wedge \ldots \wedge dx^{i_p},$$

donde

$$d\omega_{i_1 \ldots i_p} = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial \omega_{i_1 \ldots i_p}}{\partial x^k}\, dx^k.$$

De este modo, si

$$\omega = \sum_{i_1 < \ldots < i_p} \omega_{i_1 \ldots i_p}\, dx^{i_1} \wedge \ldots \wedge dx^{i_p}$$

se tiene

$$d\omega = \sum_{k=1}^{n} \sum_{i_1 < \ldots < i_p} \frac{\partial \omega_{i_1 \ldots i_p}}{\partial x^k}\, dx^k \wedge dx^{i_1} \wedge \ldots \wedge dx^{i_p}.$$

EJEMPLO 1. La diferencial de una forma de grado cero (es decir, de una función $f(x)$) tiene por expresión

$$df(x)=\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial f}{\partial x^k}\,dx^k.$$

EJEMPLO 2. Calculemos la diferencial de una forma lineal

$$\omega=\omega(x,\ dx)=\sum_{i=1}^{n}\omega_i(x)\,dx^i.$$

Obtendremos

$$d\omega=d\omega(x,\ d_1x,\ d_2x)=\sum_{k=1}^{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial\omega_i(x)}{\partial x^k}\,dx^k\wedge dx^i.$$

Por cuanto $dx^k\wedge dx^i=-dx^i\wedge dx^k$, y $dx^k\wedge dx^k=0$, resulta

$$d\omega=\sum_{k<i}\frac{\partial\omega_i}{\partial x^k}\,dx^k\wedge dx^i+\sum_{i<k}\frac{\partial\omega_i}{\partial x^k}\,dx^k\wedge dx^i=$$

$$=\sum_{k<i}\frac{\partial\omega_i}{\partial x^k}\,dx^k\wedge dx^i-\sum_{k<i}\frac{\partial\omega_k}{\partial x^i}\,dx^k\wedge dx^i=\sum_{k<i}\left(\frac{\partial\omega_i}{\partial x^k}-\frac{\partial\omega_k}{\partial x^i}\right)dx^k\wedge dx^i.$$

En particular, cuando $n=2$, obtendremos para $\omega=P\,dx^1+Q\,dx^2$:

$$d\omega=\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)dx^1\wedge dx^2.$$

3. Propiedades de la diferencial exterior. Directamente de la definición se deducen las siguientes propiedades:

1) si $\omega_1\in\Omega_p(G)$, $\omega_2\in\Omega_p(G)$, entonces $d(\omega_1+\omega_2)=d\omega_1+d\omega_2$,
2) si $\omega\in\Omega\ (G)$ y λ es un número real, entonces $d(\lambda\omega)=\lambda d\omega$,
3) si $\omega_1\in\Omega_p(G)$, $\omega_2\in\Omega_q(G)$, entonces

$$d(\omega_1\wedge\omega_2)=d\omega_1\wedge\omega_2+(-1)^p\omega_1\wedge d\omega_2.$$

Demostremos la propiedad 3). Sea

$$\omega=\sum_{i_1<\ldots<i_p}\omega_{i_1\ldots i_p}\,dx^{i_1}\wedge\ldots\wedge dx^{i_p}.$$

Introduzcamos una designación

$$\frac{\partial\omega}{\partial x^k}=\sum_{i_1<\ldots<i_p}\frac{\partial\omega_{i_1\ldots i_p}}{\partial x^k}\,dx^{i_1}\wedge\ldots\wedge dx^{i_p}.$$

Podemos escribir $d\omega$ en la forma

$$d\omega=\sum_{k=1}^{n}dx^k\wedge\frac{\partial\omega}{\partial x^k}.$$

Recordemos que

$$\omega=\omega_1\wedge\omega_2=(-1)^{pq}\omega_2\wedge\omega_1.$$

Luego,

$$\frac{\partial\omega}{\partial x^k}=\frac{\partial\omega_1}{\partial x^k}\wedge\omega_2+\omega_1\wedge\frac{\partial\omega^2}{\partial x^k}=\frac{\partial\omega_1}{\partial x^k}\wedge\omega_2+(-1)^{pq}\frac{\partial\omega_2}{\partial x^k}\wedge\omega_1.$$

Entonces,

$$d\omega=\sum_{k=1}^{n}dx^k\wedge\frac{\partial\omega}{\partial x^k}=\sum_{h=1}^{n}dx^h\wedge\frac{\partial\omega_1}{\partial x^h}\wedge\omega_2+$$

$$+(-1)^{pq}\sum_{k=1}^{n}dx^k\wedge\frac{\partial\omega_2}{\partial x^k}\wedge\omega_1=d\omega_1\wedge\omega_2+(-1)^{pq}d\omega_2\wedge\omega_1.$$

Por cuanto $d\omega_2$ es una $(q+1)$-forma, tenemos

$$d\omega_2\wedge\omega_1=(-1)^{p(q+1)}\omega_1\wedge d\omega_2.$$

De aquí, $d\omega=d\omega_1\wedge\omega_2+(-1)^p\omega_1\wedge d\omega_2$.

Es válida la siguiente propiedad *importante* de la diferencial.

Propiedad fundamental de la diferencial exterior:

$$d\,(d\omega)=0.$$

DEMOSTRACIÓN. Supongamos al principio que ω es una forma de grado 0, es decir, $\omega(x)=f(x)$. Entonces,

$$d\,(df)=d\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial f}{\partial x^i}\,dx^i=\sum_{k=1}^{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial^2 f}{\partial x^k\,\partial x^i}\,dx^k\wedge dx^i.$$

Por cuanto $dx^k\wedge dx^i=-dx^i\wedge dx^k$, esta igualdad puede escribirse en la forma

$$d\,(df)=\sum_{i<k}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^i\,\partial x^k}-\frac{\partial^2 f}{\partial x^k\,\partial x^i}\right)dx^i\wedge dx^k,$$

de donde proviene que $d\,(df)=0$.

Ahora, sea

$$\omega=\sum_{i_1<\ldots<i_p}\omega_{i_1\ldots i_p}\,dx^{i_1}\wedge\ldots\wedge dx^{i_p}.$$

Entonces,

$$d\omega=\sum_{k=1}^{n}\sum_{i_1<\ldots<i_p}d\omega_{i_1\ldots i_p}\wedge dx^{i_1}\wedge\ldots\wedge dx^{i_p}.$$

Observemos que cada término de la suma es un producto exterior de las diferenciales de las formas de grado 0, a saber, de las formas $\omega_{i_1\ldots i_p}(x)$, $e^{i_1}(dx),\ldots,e^{i_p}(dx)$. Resta por aplicar la propiedad 3 y aprovechar el hecho de que para la forma de grado 0 la propiedad fundamental queda demostrada.

§ 3. Aplicaciones diferenciables

1. Definición de las aplicaciones diferenciables. Examinemos un dominio arbitrario m-dimensional D del espacio euclídeo E^n y un dominio n-dimensional $G \subset E^n$. Los puntos del dominio D se denotarán con los símbolos $t = (t^1, t^2, \ldots, t^m)$, y los del dominio G, con los símbolos $x = (x^1, x^2, \ldots, x^n)$.

Diremos que φ aplica D en G, si

$$\varphi = \{\varphi^1, \varphi^2, \ldots, \varphi^n\},$$

donde $\varphi^k(t)$ están definidos en el dominio D, y los vectores con las coordenadas $x^k = \varphi^k(t)$ se disponen en el dominio G.

Definamos una aplicación φ^* que traslada $\Omega_p(G)$ en $\Omega_p(D)$, cualquiera que sea p, $0 \leqslant p \leqslant n$. En este caso consideramos que cada componente $\varphi^k(t)$ de la aplicación φ es infinitamente diferenciable.

Definición. *Sea φ una aplicación de $D \subset E^m$ en $G \subset E^n$. Denotemos con φ^* una aplicación que actúa, para todo $0 \leqslant p \leqslant n$, de $\Omega_p(G)$ en $\Omega_p(D)$ de conformidad con la siguiente regla: si*

$$\omega = \sum_{i_1 < \ldots < i_p} \omega_{i_1 \ldots i_p} \, dx^{i_1} \wedge \ldots \wedge dx^{i_p},$$

entonces

$$\varphi^*(\omega) = \sum_{i_1 < \ldots < i_p} \omega_{i_1 \ldots i_p}(\varphi(t)) \, \varphi^*(dx^{i_1}) \wedge \ldots \wedge \varphi^*(dx^{i_p}),$$

donde

$$\varphi^*(dx^i) = \sum_{k=1}^{m} \frac{\partial \varphi^i}{\partial t^k} \, dt^k.$$

EJEMPLO 1. Sea ω una forma de grado 0, es decir, $\omega = f(x)$. En este caso

$$\varphi^*(f) = f(\varphi(t)).$$

EJEMPLO 2. Supongamos que φ aplica un dominio n-dimensional $D \subset E^n$ en un dominio n-dimensional $G \subset E^n$ y que ω es una n-forma

$$\omega = dx^1 \wedge dx^2 \wedge \ldots \wedge dx^n.$$

Entonces,

$$\varphi^*(\omega) = \left(\sum_{k_1=1}^{n} \frac{\partial \varphi^1}{\partial t^{k_1}} \, dt^{k_1} \right) \wedge \ldots \wedge \left(\sum_{k_n=1}^{n} \frac{\partial \varphi^n}{\partial t^{k_n}} \, dt^{k_n} \right) =$$

$$= \sum_{k_1=1}^{n} \sum_{k_n=1}^{n} \frac{\partial \varphi^1}{\partial t^{k_1}} \cdots \frac{\partial \varphi^n}{\partial t^{k_n}} \, dt^{k_1} \wedge \ldots \wedge dt^{k_n} =$$

$$= dt^1 \wedge \ldots \wedge dt^n \sum_{\sigma} (\operatorname{sgn} \sigma) \frac{\partial \varphi^1}{\partial t^{\sigma(1)}} \cdots \frac{\partial \varphi^n}{\partial t^{\sigma(n)}} =$$

$$= dt^1 \wedge \ldots \wedge dt^n \det \left\{ \frac{\partial \varphi^i}{\partial t^j} \right\}.$$

De este modo,

$$\varphi^*(dx^1 \wedge dx^2 \wedge \ldots \wedge dx^n) = \frac{D(\varphi^1, \varphi^2, \ldots, \varphi^n)}{D(t^1, t^2, \ldots, t^n)} dt^1 \wedge dt^2 \wedge \ldots \wedge dt^n.$$

OBSERVACIÓN. Una forma $\varphi^*(\omega)$ se llama forma diferencial que se obtiene a partir de la forma ω por sustitución de las variables φ.

2. Propiedades de la aplicación φ^*. Son válidas las siguientes propiedades de la aplicación φ^*:

1) Si $\omega_1 \in \Omega_p(G)$, $\omega_2 \in \Omega_q(G)$, entonces,

$$\varphi^*(\omega_1 \wedge \omega_2) = \varphi^*(\omega_1) \wedge \varphi^*(\omega_2).$$

DEMOSTRACIÓN. Sea

$$\omega_1 = \sum_{i_1 < \ldots < i_p} a_{i_1 \ldots i_p}(x)\, dx^{i_1} \wedge \ldots \wedge dx^{i_p},$$

$$\omega_2 = \sum_{k_1 < \ldots < k_q} b_{k_1 \ldots k_q}(x)\, dx^{k_1} \wedge \ldots \wedge dx^{k_q}.$$

Entonces,

$$\omega_1 \wedge \omega_2 = \sum_{i_1 < \ldots < i_p} \sum_{k_1 < \ldots < k_q} a_{i_1 \ldots i_p}(x)\, b_{k_1 \ldots k_q}(x) \times$$

$$\times\, dx^{i_1} \wedge \ldots \wedge dx^{i_p} \wedge dx^{k_1} \wedge \ldots \wedge dx^{k_q}$$

y, por consiguiente,

$$\varphi^*(\omega_1 \wedge \omega_2) = \sum_i \sum_k a_i(\varphi(t))\, b_k(\varphi(t))\, \varphi^*(dx^{i_1}) \wedge \ldots \wedge \varphi^*(dx^{k_q}) =$$

$$= \sum_i a_i(\varphi)\, \varphi^*(dx^{i_1}) \wedge \ldots \wedge \varphi^*(dx^{i_p}) \wedge \left[\sum_k b_k(\varphi)\, \varphi^*(dx^{k_1}) \wedge \ldots \wedge \varphi^*(dx^{k_q})\right] =$$

$$= \varphi^*(\omega_1) \wedge \varphi^*(\omega_2).$$

2) Si $\omega \in \Omega_p(G)$, tenemos

$$\varphi^*(d\omega) = d\varphi^*(\omega).$$

DEMOSTRACIÓN. Al principio demostremos que esta igualdad se verifica para $p = 0$, es decir, para $\omega = f(x)$. Obtenemos

$$d\omega = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x^i} dx^i, \qquad \varphi^*(\omega) = f(\varphi(t)),$$

$$d\varphi^*(\omega) = \sum_{k=1}^{m} \frac{\partial}{\partial t^k} f(\varphi(t))\, dt^k = \sum_{k=1}^{m} \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x^i} \frac{\partial \varphi^i}{\partial t^k} dt^k =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x^i} \varphi^*(dx^i) = \varphi^*(d\omega).$$

Para un p arbitrario realicemos la demostración por inducción. Sea $\omega = f_{i_1 \ldots i_p}(x)\, dx^{i_1} \wedge \ldots \wedge dx^{i_p}$. Entonces, $d\omega = df_{i_1 \ldots i_p} \wedge dx^{i_1} \wedge \ldots dx^{i_p}$.

Con arreglo a la propiedad 1) y la relación que acabamos de demostrar,

$$\varphi^* (d\omega) = \varphi^* (df) \wedge \varphi^* (dx^{i_1}) \wedge \ldots \wedge \varphi^* (dx^{i_p}).$$

Por otra parte,

$$d\varphi^* (\omega) = d\varphi^* [(f\, dx^{i_1} \wedge \ldots \wedge dx^{i_{p-1}}) \wedge dx^{i_p}] =$$
$$= d\, [\varphi^* (f\, dx^{i_1} \wedge \ldots \wedge dx^{i_{p-1}} \wedge \varphi^* (dx^{i_p})].$$

Ahora, en virtud de la propiedad 3) de la diferencial exterior,

$$d\varphi^* (\omega) = d\varphi^* (f\, dx^{i_1} \wedge \ldots \wedge dx^{i_{p-1}}) \wedge \varphi^* (dx^{i_p}) +$$
$$+ (-1)^{p-1} \varphi^* (f\, dx^{i_1} \wedge \ldots \wedge dx^{i_{p-1}}) \wedge d\varphi^* (dx^{i_p}).$$

Notemos que $\varphi^* (dx^{i_p}) = d\varphi^* (x^{i_p})$ debido a lo que acabamos de demostrar, y, en tal caso, de acuerdo con la propiedad fundamental de la diferencial exterior, tenemos $d\varphi^* (dx^{i_p}) = 0$.

Por la suposición de inducción, legítima para $p - 1$,

$$d\varphi^* (f\, dx^{i_1} \wedge \ldots \wedge dx^{i_{p-1}}) = \varphi^* (df \wedge dx^{i_1} \wedge \ldots \wedge dx^{i_{p-1}}).$$

De resultas obtenemos

$$d\varphi^* (\omega) = \varphi^* (df \wedge dx^{i_1} \wedge \ldots \wedge dx^{i_{p-1}}) \wedge \varphi^* (dx^{i_p})$$

y, según la propiedad 1),

$$d\varphi^* (\omega) = \varphi^* (df \wedge dx^{i_1} \wedge \ldots \wedge dx^{i_p}).$$

Una propiedad que sigue abajo se llama *transitividad*.

3) Examinemos los dominios abiertos $U \subset E^l$, $V \subset E^m$, $W \subset E^n$, cuyos puntos son $u = (u^1, u^2, \ldots, u^l)$, $v = (v^1, v^2, \ldots, v^m)$, $w = (w^1, w^2, \ldots, w^n)$, respectivamente. Supongamos que φ aplica $V \to V$, y ψ aplica $V \to W$. Con $\psi \circ \varphi$ se designará una aplicación, llamada composición, que actúa según la regla

$$(\psi \circ \varphi)(u) = \psi [\varphi (u)].$$

De un modo semejante introduzcamos una composición $\varphi^* \circ \psi^*$, la cual traslada $\Omega_p (W)$ en $\Omega_p (U)$, cualquiera que sea p, es decir,

$$(\varphi^* \circ \psi^*) (\omega) = \varphi^* [\psi^* (\omega)].$$

Resulta válida la siguiente relación

$$(\psi \circ \varphi)^* = \varphi^* \circ \psi^*.$$

DEMOSTRACIÓN. Designamos $\beta = \psi \circ \varphi$. Esto significa que $\beta = (\beta^1, \beta^2, \ldots, \beta^n)$, donde

$$\beta^k = \psi^k (\varphi^1, \varphi^2, \ldots, \varphi^m).$$

Demos, primero, la demostración para una forma lineal $dw^k \subset \Omega_1 (W)$. Obtendremos

$$\beta^* (dw^k) = d\beta^* (w^k) = d\beta^k (u) = \sum_{i=1}^{l} \frac{\partial \beta^k}{\partial u^i} du^i = \sum_{i=1}^{l} \sum_{j=1}^{m} \frac{\partial \psi^k}{\partial v^j} \frac{\partial \varphi^j}{\partial u^i} du^i.$$

Luego,

$$(\varphi^*\circ\psi^*)(dw^k)=\varphi^*[\psi^*(dw^k)]=\varphi^*[d\psi^*(w^k)]=\varphi^*(d\psi^k)=$$
$$=\varphi^*\left(\sum_{j=1}^{m}\frac{\partial\psi^k}{\partial v^j}dv^j\right)=\sum_{j=1}^{m}\frac{\partial\psi^k}{\partial v^j}\varphi^*(dv^j).$$

Pero,

$$\varphi^*(dv^j)=d\varphi^*(v^j)=d\varphi^j=\sum_{i=1}^{l}\frac{\partial\varphi^j}{\partial u^i}du^i,$$

y, por lo tanto,

$$(\varphi^*\circ\psi^*)(dw^k)=\sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{l}\frac{\partial\psi^k}{\partial v^j}\frac{\partial\varphi^j}{\partial u^i}du^i$$

y la igualdad queda, pues, demostrada. De aquí se deduce la validez de la propiedad 3) para cualquier forma lineal. Ahora realicemos la demostración por inducción. Sea

$$\omega=f(w)\,dw^{i_1}\wedge\ldots\wedge dw^{i_p}\in\Omega_p(W).$$

Entonces,

$$\begin{aligned}\beta^*(w)&=\beta^*(f\,dw^{i_1}\wedge\ldots\wedge dw^{i_{p-1}})\wedge\beta^*(dw^{i_p})=\\&=(\varphi^*\circ\psi^*)(f\,dw^{i_1}\wedge\ldots\wedge dw^{i_{p-1}})\wedge(\varphi^*\circ\psi^*)\times\\&\times(dw^{i_p})=(\varphi^*\circ\psi^*)(f\,dw^{i_1}\wedge\ldots\wedge dw^{i_p})=\\&=(\varphi^*\circ\psi^*)(\omega).\end{aligned}$$

§ 4. Integración de las formas diferenciales

1. Definiciones. Denotemos con I^m un cubo unidad en el espacio euclídeo E^m:

$$I^m=\{t\in E^m,\ 0\leqslant t^i\leqslant 1,\ i=1,2,\ldots,m\}.$$

Por aplicación φ del cubo I^m en un dominio n-dimensional $G\subset E^n$ se entenderá la aplicación en G de cierto dominio $D\subset E^m$, dentro del cual se contiene I^m. Análogamente, llamemos p-forma diferencial ω, definida en I^m, a una p-forma definida en cierto dominio $D\subset E^m$ que contiene I^m.

Definición 1. *Se denomina integral, extendida al cubo I^p, de una p-forma*

$$\omega=f(t)\,dt^1\wedge dt^2\wedge\ldots\wedge dt^p,$$

definida en el cubo I^p a una magnitud

$$\int_{I^p}\omega=\int_0^1\ldots\int_0^1 f(t)\,dt^1\,dt^2\ldots dt^p.$$

Nuestro objetivo inmediato consiste en determinar la integral de una forma diferencial extendida a una superficie cualquiera. Es natural que el grado de la forma coincidirá con la dimensión de la superficie. Por superficie se entenderá la aplicación de un cubo unidad de la misma dimensión (recordemos que la noción de aplicación incluye tanto el dominio de valores, como también la ley de concordancia). Por otra parte, a veces llamaremos superficie sólo una imagen del cubo.

Definición 2. *Se denominará cubo singular m-dimensional en un espacio E^n ($m \leqslant n$) a una aplicación diferenciable del cubo I^m en E^n. De este modo, denotando el cubo singular con C, podemos escribir*

$$C = \varphi \colon I^m \to E^n.$$

Diremos que el cubo singular C está contenido en $G \subset E^n$, si $\varphi(I^m) \subset C$.

Ahora podemos determinar la integral de cualquier p-forma $\omega \in \Omega_p(G)$ extendida a cualquier cubo singular p-dimensional $C \subset G$.

Definición 3. *Se denomina integral de la forma $\omega \subset \Omega_p(G)$, extendida al cubo singular $C = \varphi\colon I^p \to E^n$ contenido en G, a una magnitud*

$$\int_C \omega = \int_{I^p} \varphi^*(\omega).$$

Cerciorémonos de que la integral de una p-forma, extendida al cubo singular p-dimensional C, depende sólo de la imagen $\varphi(I^p)$, y no de la ley de concordancia φ.

Analicemos, ante todo, más detalladamente la definición de integral de ω extendida al cubo singular C.

Supongamos que $\omega \in \Omega_p(G)$ tiene por expresión $\omega = f(x)\, dx^{i_1} \wedge \ldots \wedge dx^{i_p}$, y, en este caso, $\varphi^*(\omega) = f[\varphi(t)]\, \varphi^*(dx^{i_1} \wedge \ldots \wedge dx^{i_p})$. En virtud del ejemplo 2 en el p. 1, § 3,

$$\varphi^*(\omega) = f[\varphi(t)] \frac{D(\varphi^{i_1}, \varphi^{i_2}, \ldots, \varphi^{i_p})}{D(t^1, t^2, \ldots, t^p)}\, dt^1 \wedge dt^2 \wedge \ldots \wedge dt^p.$$

Por consiguiente,

$$\int_C \omega = \int_{I^p} f[\varphi(t)] \frac{D(\varphi^{i_1}, \ldots, \varphi^{i_p})}{D(t^1, \ldots, t^p)}\, dt^1 \wedge \ldots \wedge dt^p.$$

Definición 4. *Sean $C_1 = \varphi_1\colon I^p \to E^n$ y $C_2 = \varphi_2\colon I^p \to E^n$ dos cubos singulares. Diremos que $C_1 = C_2$, si existe una aplicación biunívoca τ del cubo I^p sobre sí mismo de tal género que*

1) $$\varphi_1(t) = \varphi_2[\tau(t)].$$

2) $$\frac{D(\tau^1, \tau^2, \ldots, \tau^p)}{D(t^1, t^2, \ldots, t^p)} > 0.$$

Está claro que si $C_1 = C_2$, se verifica la igualdad $C_2 = C_1$, puesto que la aplicación inversa τ^{-1} satisface las exigencias necesarias.

Suele decirse que $C_1 = -C_2$, si en la condición 2) el determinante funcional es siempre inferior a cero (es evidente que en este caso $C_2 = -C_1$). Se dice, entonces, que C_1 y C_2 se diferencian en orientación.

Es válida la siguiente afirmación: *si $C_1 = C_2$, se tiene*

$$\int_{C_1} \omega = \int_{C_2} \omega.$$

DEMOSTRACIÓN. Demos la demostración para el caso en que

$$\omega = f(x)\, dx^1 \wedge dx^2 \wedge \ldots \wedge dx^p.$$

Por definición,

$$\int_{C_2} \omega = \int_{I^p} f[\varphi_2(t)] \frac{D(\varphi_2^1, \varphi_2^2, \ldots, \varphi_2^p)}{D(t^1, t^2, \ldots, t^p)} dt^1 \wedge \ldots \wedge dt^p.$$

Por hipótesis, existe una aplicación τ del cubo I^p sobre sí mismo que satisface las condiciones 1) y 2).

Realicemos en la integral el cambio de la variable $t = \tau(s)$, $s \in I^p$. Obtendremos $\varphi_2(t) = \varphi_2[\tau(s)] = \varphi_1(s)$,

$$\int_{C_2} \omega = \int_{I^p} f[\varphi_1(s)] \frac{D(\varphi_2^1, \varphi_2^2, \ldots, \varphi_2^p)}{D(t^1, t^2, \ldots, t^p)} \frac{D(\tau^1, \tau^2, \ldots, \tau^p)}{D(s^1, s^2, \ldots, s^p)} ds^1 \wedge ds^2 \wedge \ldots \wedge ds^p =$$

$$= \int_{I^p} f[\varphi_1(s)] \frac{D(\varphi_2^1, \ldots, \varphi_2^p)}{D(s^1, \ldots, s^p)} ds^1 \wedge \ldots \wedge ds^p = \int_{C_1} \omega.$$

De un modo análogo podemos probar que si $C_1 = -C_2$, entonces

$$\int_{C_1} \omega = -\int_{C_2} \omega.$$

2. Cadenas diferenciables. Nos harán falta unas superficies que se descomponen en varios pedazos, cada uno de los cuales es una imagen de cierto cubo m-dimensional. Como ejemplo de tal superficie pueden servir dos circunferencias de la frontera de un anillo que se dispone en un plano bidimensional. En este caso distinguiremos las orientaciones de dichas circunferencias. Con este motivo resulta útil introducir las combinaciones lineales de los cubos singulares con coeficientes reales.

Definición 1. *Llamemos cadena p-dimensional C a un juego arbitrario*

$$\{\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k, C_1, C_2, \ldots, C_k\},$$

donde λ_i *son números reales, y* C_i, *cubos singulares p-dimensionales. Se emplearán las siguientes designaciones*

$$C = \lambda_1 C_1 + \ldots + \lambda_k C_k.$$

Diremos que C pertenece a G, si todos los C_i pertenecen a G.

El conjunto de cadenas p-dimensionales forma un espacio lineal, si introducimos de un modo natural las operaciones de sumación y multiplicación por unos números reales.

Definición 2. *Se llama integral de la forma* ω, *extendida a la cadena p-dimensional C contenida en C, a una magnitud*

$$\int_C \omega = \lambda_1 \int_{C_1} \omega + \lambda_2 \int_{C_2} \omega + \ldots + \lambda_k \int_{C_k} \omega.$$

Podemos determinar, ahora, la frontera de un cubo singular arbitrario. Con este fin hallemos, al principio, la frontera de un cubo unidad.

Definición 3. *Se llama frontera del cubo* I^p *a una cadena* $(p-1)$*-dimensional*

$$\partial I^p = \sum_{i=1}^{p} (-1)^i [I_0^p(i) - I_1^p(i)],$$

donde $I_\alpha^p(i)$ *es la intersección del cubo* I^p *con un hiperplano* $x^i = \alpha$, $(\alpha = 0, 1)$.

Para que la definición aducida sea correcta, es necesario explicar qué sentido tiene la afirmación de lo que $I^p_\alpha(i)$ es un cubo singular $(p-1)$-dimensional.

Construyemos una aplicación *canónica* $\tilde{\varphi} = \tilde{\varphi}^{\alpha,p}_i$ del cubo I^{p-1} sobre $I^p_\alpha(i)$. Sea $s = (s^1, s^2, \ldots, s^{p-1}) \in I^{p-1}$. Pongamos

$$\tilde{\varphi}^k(s) = \begin{cases} s^k, & \text{si } 1 \leqslant k < i, \\ \alpha, & \text{si } k = i, \\ s^{k-1}, & \text{si } i < k \leqslant p. \end{cases}$$

Es evidente que $\tilde{\varphi} = (\tilde{\varphi}^1, \tilde{\varphi}^2, \ldots, \tilde{\varphi}^p)$ aplica biunívocamente I^{p-1} sobre $I^p_\alpha(i)$. En particular, cuando $\alpha = 0$ e $i = p$, la aplicación φ es una restricción en $I^p_0(p-1)$ de la aplicación idéntica del espacio E^p sobre sí mismo.

Definición 4. *Se llama frontera del cubo singular p-dimensional $C = \varphi: I^p \to E^n$ a una cadena $(p-1)$-dimensional*

$$\partial C = \sum_{i=1}^{p} (-1)^i [\varphi(I^p_0(i)) - \varphi(I^p_1(i))].$$

Así pues, la frontera de la imagen del cubo I^p es la imagen de la frontera de I^p con orientación natural.

EJEMPLO 1. Examinemos en el plano un cuadrado I^2. Es evidente que este cuadrado puede considerarse como un cubo singular, al tomar a título de φ una

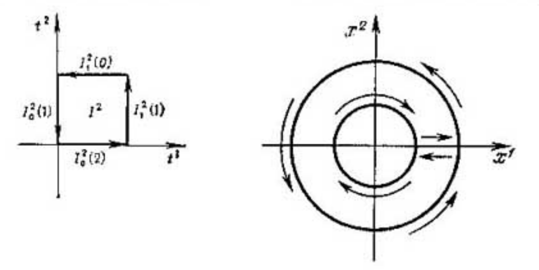


Fig. 7.11. Fig. 7.12.

aplicación idéntica. En la fig. 7.11 se señala la frontera de este cuadrado, con la particularidad de que el sentido de las flechas coincide con la dirección de crecimiento del parámetro t^k, respecto del cual se realiza la integración, en el caso en que el lado dado del cuadrado integra la cadena ∂I^2 con el signo $+$, y la dirección de las flechas es contraria, si el lado se toma con el signo $-$. Vemos que nuestro convenio de los signos conduce al recorrido ordinario de la frontera en el sentido contrahorario.

Ejemplo 2. Veamos un cubo singular $C = \varphi: I^2 \to R^2$, donde φ tiene por expresión

$$\varphi^1 = (a + Rt^1)\cos 2\pi t^2,$$
$$\varphi^2 = (a + Rt^1)\operatorname{sen} 2\pi t^2.$$

Es fácil ver que $\varphi(I^2)$ es un anillo cuya frontera está formada por las circunferencias de radios a y $a + R$. Aclaremos qué constituye la frontera del cubo

singular C. Es obvio que $\varphi(I_0^2(1))$ es una circunferencia

$$\varphi^1 = a\cos 2\pi t^2,$$
$$\varphi^2 = a\,\mathrm{sen}\, 2\pi t^2.$$

Luego, $\varphi(I_1^2(1))$ es una circunferencia de radio $a+R$. Por fin, $\varphi(I_0^2(2))$ y $\varphi(I_1^2(2))$ es un segmento $x^2=0$, $a\leqslant x^1\leqslant a+R$.

En la fig. 7.12 las flechas señalan la dirección del recorrido de la frontera ∂C, si el recorrido se realiza en el sentido contrahorario.

Por cuanto $\varphi(I_0^2(2)) - \varphi(I_1^2(2)) = 0$, podemos considerar que

$$\partial C = \varphi(I_1^2(1)) - \varphi(I_0^2(1)),$$

lo que coincide con la interpretación ordinaria de la frontera de un anillo.

Aclaremos de qué modo están ligadas entre sí la integral de la forma ω a lo largo de la frontera del cubo C y la de la forma $\varphi^*(\omega)$ a lo largo de la frontera de I^p.

Afirmación. *Sea $C=\varphi\colon I^p\to E^n$ un cubo singular arbitrario contenido en G, y sea $\omega\in\Omega_{p-1}(G)$. Resulta válida una igualdad*

$$\int_{\partial C}\omega = \int_{\partial I^p}\varphi^*(\omega).$$

DEMOSTRACION Es evidente que, tomando en consideración la definición de la integral por una cadena, basta demostrar la igualdad

$$\int_{\varphi(I_\alpha^p(i))}\omega = \int_{I_\alpha^p(i)}\varphi^*(\omega).$$

Veamos una aplicación canónica $\widetilde{\varphi}=\widetilde{\varphi}_i^{\alpha,p}\colon I^{p-1}\to I_\alpha^p(i)$. Por definición,

$$\int_{I_\alpha^p(i)}\varphi^*(\omega) = \int_{I^{p-1}}\widetilde{\varphi}^*[\varphi^*(\omega)].$$

En virtud de la propiedad 3) de las aplicaciones diferenciables (véase p. 2, § 3),

$$\widetilde{\varphi}^*\circ\varphi^* = (\varphi\circ\widetilde{\varphi})^*.$$

De este modo,

$$\int_{I_\alpha^p(i)}\varphi^*(\omega) = \int_{I^{p-1}}(\varphi\circ\widetilde{\varphi})^*(\omega) = \int_{(\varphi\circ\widetilde{\varphi})(I^{p-1})}\omega = \int_{\varphi(I_\alpha^p(i))}\omega,$$

puesto que $(\varphi\circ\widetilde{\varphi})(I^{p-1}) = \varphi(I_\alpha^p(i))$.

3. Fórmula de Stokes.

Teorema fundamental. *Sea $C=\varphi\colon I^p\to E^n$ un cubo singular arbitrario contenido en G, y sea $\omega\in\Omega_{p-1}(G)$. Es válida la fórmula de Stokes*

$$\int_C d\omega = \int_{\partial C}\omega.$$

Demostremos, al principio, la fórmula de Stokes en el siguiente caso particular.

Sea ω una forma diferencial de grado $p-1$, definida en I^p. Se verificará una igualdad

$$\int\limits_{I^p} d\omega = \int\limits_{\partial I^p} \omega. \tag{7.61}$$

DEMOSTRACIÓN. Sea $\omega = f(t)\, dt^2 \wedge \ldots \wedge dt^p$. Por definición,

$$\int\limits_{\partial I^p} \omega = \sum_{i=1}^{p} (-1)^i \Big(\int\limits_{I_0^p(i)} \omega - \int\limits_{I_1^p(i)} \omega \Big).$$

Calculemos la siguiente integral:

$$\int\limits_{I_\alpha^p(i)} \omega, \text{ donde } i = 1, 2, \ldots, p,\ \alpha = 0, 1.$$

Veamos una aplicación canónica $\widetilde{\varphi}$: $I^{p-1} \to I_\alpha^p(i)$. Teniendo presentes los resultados de este párrafo, resulta

$$\int\limits_{I_\alpha^p(i)} \omega = \int\limits_{I^{p-1}} f[\widetilde{\varphi}(s)] \frac{D(\widetilde{\varphi}^2, \ldots, \widetilde{\varphi}^p)}{D(s^1, \ldots, s^{p-1})} ds^1 \wedge \ldots \wedge ds^{p-1}.$$

Por definición de la aplicación canónica $\widetilde{\varphi}_i^{\alpha, p}$, el jacobiano tiene por expresión

$$J = \frac{D(s^2, \ldots, s^{i-1}, \alpha, s^i, \ldots, s^{p-1})}{D(s^1, s^2, \ldots, s^{p-1})} = 0,$$

si $i \neq 1$, y

$$J = \frac{D(s^1, s^2, \ldots, s^{p-1})}{D(s^1, s^2, \ldots, s^{p-1})} = 1, \text{ si } i = 1.$$

De este modo, sólo las integrales extendidas a $I_\alpha^p(1)$ pueden ser distintas de cero, y, por eso, obtenemos

$$\int\limits_{\partial I^p} \omega = (-1) \Big(\int\limits_{I_0^p(1)} \omega - \int\limits_{I_1^p(1)} \omega \Big) = \int\limits_{I^{p-1}} f(1, s^1, s^2, \ldots, s^{p-1})\, ds^1 \wedge \ldots$$

$$\ldots \wedge ds^{p-1} - \int\limits_{I^{p-1}} f(0, s^1, \ldots, s^{p-1})\, ds^1 \wedge \ldots \wedge ds^{p-1}.$$

Por definición de integral extendida a un cubo I^{p-1},

$$\int\limits_{\partial I^p} \omega = \int_0^1 \ldots \int_0^1 [f(1, s^1, \ldots, s^{p-1}) - f(0, s^1, \ldots, s^{p-1})]\, ds^1\, ds^2 \ldots ds^{p-1} =$$

$$= \int_0^1 \int_0^1 \ldots \int_0^1 \frac{\partial f}{\partial s^0} ds^0\, ds^1 \ldots ds^{p-1} = \int\limits_{I^p} \frac{\partial f}{\partial s^0} ds^0 \wedge \ldots \wedge ds^{p-1}.$$

Por otro lado,

$$d\omega = \frac{\partial f}{\partial t^1} dt^1 \wedge dt^2 \wedge \ldots \wedge dt^p.$$

Por consiguiente,

$$\int_{I^p} d\omega = \int_{I^p} \frac{\partial f}{\partial t^1} dt^1 \wedge \ldots \wedge dt^p.$$

La igualdad (7.61) queda demostrada.

DEMOSTRACIÓN DEL TEOREMA DE STOKES. Por definición de la integral extendida a un cubo singular, tenemos

$$\int_C d\omega = \int_{I^p} \varphi^* (d\omega).$$

En virtud de la propiedad 2) de las aplicaciones diferenciables (véase p. 2, § 3),

$$\int_{I^p} \varphi^* (d\omega) = \int_{I^p} d\varphi^* (\omega).$$

Ahora aprovechamos la fórmula de Stokes, ya demostrada, para el cubo I^p:

$$\int_{I^p} d\varphi^* (\omega) = \int_{\partial I^p} \varphi^* (\omega).$$

Resta por observar que según la propiedad de las integrales a lo largo de la frontera de un cubo singular (véase el fin del p. 2 del párrafo presente)

$$\int_{\partial I^p} \varphi^* (\omega) = \int_{\partial C} \omega.$$

El teorema está completamente demostrado.

4. Ejemplos. 1) Examinemos un caso de $p = 1$. Un cubo singular unidimensional C en E^n representa una curva cuyos extremos se denotarán con a y b. La fórmula de Stokes adquiere la forma

$$\int_C df = \int_{\partial C} f = f(b) - f(a).$$

En particular, cuando $n = 1$, obtenemos la fórmula de Newton—Leibniz

$$\int_a^b f'(x)\, dx = f(b) - f(a).$$

2) Sea, ahora, $p = 2$. Un cubo singular bidimensional C representa una superficie bidimensional, la forma $\omega \in \Omega_1$ tiene por expresión

$$\omega = \sum_{k=1}^{n} \omega_k \, dx^k.$$

Sirviéndonos de ejemplo 2, p. 2, § 2, obtenemos

$$\int_C \sum_{k<i} \left(\frac{\partial \omega^i}{\partial x^k} - \frac{\partial \omega^k}{\partial x^i} \right) dx^k \wedge dx^i = \int_{\partial C} \sum_{k=1}^{n} \omega_k \, dx^k.$$

Si $n = 2$, obtendremos, al designar $\omega = P\,dx^1 + Q\,dx^2$, la fórmula de Green

$$\int_C \left(\frac{\partial Q}{\partial x^1} - \frac{\partial P}{\partial x^2} \right) dx^1 \wedge dx^2 = \int_{\partial C} P\,dx^1 + Q\,dx^2.$$

Si $n = 3$, obtendremos la fórmula corriente de Stokes.

3) Sea $p = n$. Entonces, $\omega \in \Omega_{n-1}$ tiene por expresión

$$\omega = \sum_{k=1}^{n} \omega_k \, dx^1 \wedge \ldots \wedge dx^{k-1} \wedge dx^{k+1} \wedge \ldots \wedge dx^n.$$

Luego,

$$d\omega = \sum_{h=1}^{n} \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \omega_h}{\partial x^i} dx^i \wedge dx^1 \wedge \ldots \wedge dx^n = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \frac{\partial \omega^k}{\partial x^k} dx^1 \wedge dx^2 \wedge \ldots dx^n.$$

En particular, cuando $n = 3$, tenemos

$$\omega = P\,dx^2 \wedge dx^3 - Q\,dx^1 \wedge dx^3 + R\,dx^1 \wedge dx^2,$$

$$d\omega = \left(\frac{\partial P}{\partial x^1} + \frac{\partial Q}{\partial x^2} + \frac{\partial R}{\partial x^3} \right) dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3,$$

y obtenemos la fórmula de Ostrogradski.

Capítulo 8

MEDIDA E INTEGRAL DE LEBESGUE

En el capítulo 1 (v. II) y en el capítulo 2 de este volumen se estudiaba la integral de Riemann de la función de una y de n variables, respectivamente. El concepto de integral de Riemann abarcaba una clase de funciones o bien estrictamente continuas en un dominio que se consideraba, o bien próximas a las continuas (el conjunto de puntos de discontinuidad de tales funciones tiene un volumen n-dimensional igual a cero). Dicho concepto resulta ser insuficiente en una serie de apartados fundamentales de las matemáticas modernas (en la teoría de las funciones generalizadas, en la teoría moderna de las ecuaciones con derivadas parciales, y en otros).

En el presente capítulo se expone la teoría de una integral más general, a saber, de la llamada *integral de Lebesgue* [1]), para lo cual se desarrolla preliminarmente la teoría de la medida y de las así llamadas *funciones medibles* (que representan una amplia generalización de las funciones continuas).

La idea fundamental de la integral de Lebesgue, que lo hace diferente de la integral de Riemann, consiste en que, al componer la suma integral lebesguiana, los puntos se reúnen en sumandos separados no según la proximidad de dichos puntos en un dominio de integración (como se hacía en la suma integral de Riemann), sino a base de la proximidad en estos puntos de los valores de la función integrable. Esta idea permite precisamente extender el concepto de integral a una clase muy amplia de funciones.

Conviene notar que varias teorías matemáticas que admiten el entendimiento de una integral en el sentido de Riemann adquieren un carácter más acabado cuando se usa la integral de Lebesgue. Como ejemplo de tal teoría sirve la teoría de las series de Fourier que se expone con el empleo de la integral en el sentido de Riemann en el cap. 1, y de la integral de Lebesgue, en el cap. 2.

En este capítulo la exposición se realiza para el caso de una sola variable, aunque puede ser aplicada sin dificultades algunas al caso de cualquier número n de variables (la observación correspondiente se aduce al final del capítulo).

---

[1]) A. Lebesgue (1875—1941), matemático francés.

§ 1. Sobre la estructura de los conjuntos abiertos y cerrados

Examinemos un conjunto arbitrario E de puntos de una recta infinita $(-\infty, \infty)$.

Llamemos *complemento del conjunto* E a un conjunto denotado con el símbolo CE e igual a una totalidad de aquellos puntos de la recta infinita $(-\infty, \infty)$ que no pertenecen al conjunto E.

Si llamamos *diferencia* de los conjuntos A y B una totalidad de aquellos puntos del conjunto A que no pertenecen al conjunto B, y si denotamos la diferencia de los conjuntos A y B con el símbolo $A \setminus B$, el complemento CE del conjunto E puede ser representado en la forma

$$CE = (-\infty, \infty) \setminus E.$$

Recordemos algunas definiciones introducidas en el v. I.

1°. Un punto x se denomina *punto interior* del conjunto E, si existe un entorno del punto x (es decir, un intervalo que contiene dicho punto) íntegramente perteneciente al conjunto E.

En adelante un entorno arbitrario del punto x se denotará con el símbolo $v(x)$.

2°. Un punto x se llama *punto límite* del conjunto E, si en todo entorno $v(x)$ del punto x existe por lo menos un solo punto x^1 del conjunto E que sea distinto de x.

3°. Un conjunto G se llama *abierto*, si todos los puntos de este conjunto son interiores.

4°. Un conjunto F se llama *cerrado*, si contiene todos los puntos límites suyos [1]).

Una totalidad de todos los puntos límites de un conjunto arbitrario E se denotará con el símbolo E', y *la suma* o *unión* de dos conjuntos A y B, con el símbolo $A + B$, o bien $A \cup B$ [2]). Convengamos en llamar *clausura* de un conjunto arbitrario E a un conjunto que se designa por el símbolo $\bar{E}$ y que es igual a la suma $E + E'$.

Es evidente que para cualquier conjunto cerrado F se verifica la igualdad $\bar{F} = F$.

Una totalidad de todos los puntos interiores de un conjunto arbitrario E se designará por el símbolo $\operatorname{int} E$ [3]).

Es evidente que para cualquier conjunto abierto F se verifica la igualdad $\operatorname{int} G = G$.

---

[1]) En particular, un conjunto privado de puntos límites es cerrado (pues, el conjunto vacío está contenido en cualquier conjunto).

[2]) Se llama *suma* o *unión* de los conjuntos A y B a un conjunto C que se compone de los puntos pertenecientes por lo menos a uno de los conjuntos A o B.

[3]) Int, tres primeras letras de la palabra francés «intérieur» (parte interior).

Para un conjunto sumamente arbitrario E el conjunto int E es abierto, mientras que el conjunto $\overline{E}$ es cerrado.

OBSERVACIÓN. Se puede mostrar que int E es una suma de todos los conjuntos abiertos contenidos en E, y $\overline{E}$ es intersección [1]) de todos los conjuntos cerrados que contienen E. De este modo, int E representa un conjunto abierto *más grande* de los que están contenidos en E, y $\overline{E}$ es un conjunto cerrado *más pequeño* de los que contienen E.

Detengámonos en las propiedades más simples de los conjuntos abiertos y cerrados.

1°. *Si un conjunto F es cerrado, su complemento CF será abierto.*

DEMOSTRACIÓN. Un punto cualquiera x del conjunto CF no pertenece a F y (en virtud del carácter cerrado de F) no pertenece al conjunto F' de puntos límites de F. Mas, esto es indicio de que cierto entorno $v(x)$ del punto x no pertenece a F, y, por eso, pertenece a CF.

2°. *Si un conjunto G es abierto, su complemento CG será cerrado.*

DEMOSTRACIÓN. Cualquier punto límite x del conjunto CG pertenece a ciencia cierta a este conjunto, pues, en el caso contrario, x perteneciera a G, y por cuanto G es un conjunto abierto, entonces un entorno $v(x)$ del punto x también perteneciera a G, y no a CG, es decir, el punto x no fuera punto límite de CG.

3°. *La suma de cualquier número de conjuntos abiertos es un conjunto abierto.*

DEMOSTRACIÓN. Sea E una suma de cualquier número de conjuntos abiertos G_α (el índice α no es, en el caso general, un número) y sea x un punto arbitrario de E. Entonces (por definición de la suma de conjunjos) x pertenece por lo menos a uno de los conjuntos G_α, y por cuanto cada conjunto de G_α es abierto, se encontrará cierto entorno $v(x)$ del punto x que también pertenece al conjunto citado de G_α, y, por tanto, al conjunto E también.

4°. *Una intersección de cualquier número finito de conjuntos abiertos será un conjunto abierto.*

DEMOSTRACIÓN. Supongamos que el conjunto E es una intersección de los conjuntos abiertos $G_1, G_2, \ldots, G_n$, y que x es un punto cualquiera de E. Entonces, el punto x pertenece a G_k, cualquiera que sea k ($k = 1, 2, \ldots, n$), por lo cual existe un entorno $v_k(x) = (x - \varepsilon_k, x + \varepsilon_k)$, $\varepsilon_k > 0$, del punto x que también pertenece a G_k. Si $\varepsilon = \min\{\varepsilon_k, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n\}$, el entorno $v(x) = (x - \varepsilon, x + \varepsilon)$ del punto x pertenece a todos los G_k, a consecuencia de lo cual pertenece también a E.

5°. *La intersección de cualquier número de conjuntos cerrados es un conjunto cerrado.*

---

[1]) Se llama *intersección* de A y B un conjunto de puntos que pertenecen tanto a A, como a B.

DEMOSTRACIÓN. Supongamos que el conjunto E representa una intersección de cualquier número de conjuntos cerrados F_α (el índice α, no es, en el caso general, un número). Notemos que el complemento CE representa una suma de todos los complementos CF_α, cada uno de los cuales es, de acuerdo con 1°, un conjunto abierto.

Según 3°, el conjunto CE es abierto, razón por la cual, en virtud de 2°, el conjunto E es cerrado.

6°. *La suma de un número finito de conjuntos cerrados es un conjunto cerrado.*

DEMOSTRACIÓN. Sea E una suma de conjuntos cerrados $F_1, F_2, \ldots$ $\ldots, F_n$. Entonces, CE representa una intersección de los conjuntos $CF_1, CF_2, \ldots, CF_n$, cada uno de los cuales es, en virtud de 1°, abierto. De acuerdo con 4°, el conjunto CE es abierto, y, por eso, en virtud de 2°, el conjunto E es cerrado.

7°. *Si el conjunto F es cerrado y el conjunto G, abierto, el conjunto $F \setminus G$ será cerrado y el $G \setminus F$, abierto.*

DEMOSTRACIÓN. Es suficiente notar que el conjunto $F \setminus G$ es una intersección de los conjuntos cerrados F y CG, mientras que el conjunto $G \setminus F$ es intersección de los conjuntos abiertos G y CF.

Sirviéndonos de las propiedades establecidas, demostremos un teorema sobre la estructura de un conjunto abierto arbitrario de puntos de una recta infinita.

Convengamos en denominar (aquí y en adelante en este capítulo) intervalo a cualquier conjunto abierto conexo de puntos de una recta infinita (no forzosamente acotado). Dicho de otro modo, un intervalo representa o bien un segmento abierto $a < x < b$, o bien una de las semirrectas abiertas $a < x < \infty$, o $-\infty < x < b$, o bien toda la recta infinita $-\infty < x < \infty$.

Teorema 8.1. *Todo conjunto abierto de puntos de una recta infinita representa una suma de un número finito o numerable*[1]) *de intervalos disjuntos dos a dos.*

DEMOSTRACIÓN. Sea G un conjunto abierto cualquiera y sea x, cualquier punto fijo en G. Por cuanto G es abierto, se encontrará un entorno $v(x)$, contenido en G, del punto x. La suma de todos los entornos $v(x)$ del punto fijo dado x contenidos en G se denotará con $I(x)$. Demostremos que $I(x)$ es un *intervalo*.

Denotemos con a la cota inferior exacta del conjunto de todos los punto de $I(x)$ (en el caso en que el conjunto de todos los puntos de $I(x)$ no está acotado inferiormente, pongamos $a = -\infty$), y con b la cota superior exacta del conjunto de todos los puntos de $I(x)$ (en el caso en que el conjunto de todos los puntos de $I(x)$ no está acotado superiormente, pongamos $b = \infty$). Basta probar que un punto arbitrario y del intervalo (a, b) pertenece a $I(x)$. Sea y un

[1]) Recordemos que *numerable* se denomina un conjunto infinito cuyos elementos pueden ser numerados, es decir, puestos en una correspondencia biunívoca con la serie natural de números 1, 2, 3, . . . (véase v. I, cap 3, § 4, p. 6).

punto arbitrario del intervalo (a, b). Convengamos en considerar, para concretar, que $a < y < x$ (el caso en que $x < y < b$ se estudia de una manera sumamente análoga). Por definición de la cota inferior exacta, existe un punto y' que pertenece a $I(x)$ y que es de tal índole que $a \leqslant y' < y$. Mas, esto significa que se encontrará un entorno $v(x)$ del punto fijo x que contiene el punto y'. En virtud de las desigualdades $y' < y < x$, resulta que el mismo entorno $v(x)$ contiene también el punto y. De aquí se deduce que también $I(x)$ contiene y, con lo que queda demostrada la afirmación de que $I(x)$ es un intervalo. Puede decirse que $I(x)$ es el intervalo *más grande* contenido en G que contiene el punto x.

Ahora, cerciorémonos de que si los intervalos $I(x_1)$ e $I(x_2)$ están construidos para dos puntos diferentes fijos x_1 y x_2 del conjunto G, dichos intervalos *o bien no tienen puntos comunes, o bien coinciden*. Efectivamente, si los intervalos $I(x_1)$ e $I(x_2)$ contuvieran un punto común x, se contendrían ambos en $I(x)$ y, por eso, coincidirían.

Al construir para cada punto x su propio intervalo $I(x)$, elijamos ahora los intervalos que no contienen puntos comunes (es decir, disjuntos dos a dos). Cada uno de estos intervalos contiene por lo menos un solo punto racional (lo que se conoce del cap. 2, v. I). Por cuanto el conjunto de todos los puntos racionales es numerable (véase v. 1, cap. 3, § 4, p. 6), el número de todos los intervalos $I(x)$ disjuntos dos a dos, es a lo sumo numerable. Ya que la suma de todos los intervalos de esta índole constituye el conjunto G, el teorema queda demostrado.

Corolario. *Todo conjunto cerrado de puntos de una recta infinita se obtiene suprimiendo en la recta finita un número finito o numerable de intervalos disjuntos dos a dos.*

§ 2. Conjuntos medibles

1. Medida exterior de un conjunto y sus propiedades. Toda la teoría que se expone en este párrafo se debe a A. Lebesgue. De punto de partida en dicha teoría sirve el empleo, a título del conjunto principal (original), de un intervalo $\Delta = (a, b)$, cuya longitud o medida se considera conocida e igual al número $|\Delta| = b - a > 0$.

Sea E un conjunto arbitrario sobre una recta numérica. Se denomina *recubrimiento* $S = S(E)$ de un conjunto E a todo sistema finito o numerable de intervalos $\{\Delta_n\}$, la suma de los cuales contiene el conjunto E. La suma de longitudes de todos los intervalos $\{\Delta_n\}$ que integran el recubrimiento $S = S(E)$ se denotará con el símbolo $\sigma(S)$.

Así pues,

$$\sigma(S) = \sum_n |\Delta_n| \leqslant \infty .$$

Definición. *Se llama medida exterior del conjunto E a una cota inferior exacta de $\sigma(S)$ sobre el conjunto de todos los recubrimientos $S = S(E)$ del conjunto E.*

La medida exterior del conjunto E se denotará con el símbolo $|E|^*$. Así pues, por definición

$$|E|^* = \inf_{S(E)} \sigma(S).$$

Evidentemente, la medida exterior de cualquier intervalo coincide con la longitud de este intervalo.

Pongamos en claro las propiedades de la medida exterior.

1°. *Si el conjunto E_1 está contenido en E_2* [1]*, tendremos* $|E_1|^* \leqslant |E_2|^*$. Para demostrar, basta notar que cualquier recubrimiento de E_2 es simultáneamente el recubrimiento de E_1.

2°. *Si un conjunto E representa una suma de un número finito o numerable de conjuntos $\{E_k\}$ (simbólicamente $E = \bigcup_{k=1}^{\infty} E_k$), entonces*

$$|E|^* \leqslant \sum_{k=1}^{\infty} |E_k|^*. \tag{8.1}$$

DEMOSTRACIÓN. Fijemos un $\varepsilon > 0$ arbitrario. Por definición de una medida $|E_k|^*$ como cota inferior exacta, para cada número k existe tal recubrimiento $S_k(E_k)$ del conjunto E_k por un sistema de intervalos $\{\Delta_n^k\}$ $(n = 1, 2, \ldots)$ que

$$\sum_{n=1}^{\infty} |\Delta_n^k| \leqslant |E_k|^* + \frac{\varepsilon}{2^k}. \tag{8.2}$$

Designemos con S un recubrimiento de todo el conjunto E que reúne todos los recubrimientos S_k $(k = 1, 2, \ldots)$ y que se compone de todos los intervalos $\{\Delta_n^k\}$ $(k = 1, 2, \ldots; n = 1, 2, \ldots)$. Por cuanto S es un recubrimiento de E, entonces $|E|^* \leqslant \sigma(S)$, pero $\sigma(S) = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} |\Delta_n^k|$.

De las dos últimas relaciones y de (8.2) obtenemos

$$|E|^* \leqslant \sum_{k=1}^{\infty} \left(|E_k|^* + \frac{\varepsilon}{2^k}\right) = \sum_{k=1}^{\infty} |E_k|^* + \varepsilon.$$

La desigualdad (8.1) está demostrada.

Convengamos en llamar distancia entre los conjuntos E_1 y E_2 la cota inferior exacta de las distancias entre dos puntos de los conjuntos E_1 y E_2, respectivamente.

---

[1] El hecho de que el conjunto E_1 está contenido en E_2 se designa simbólicamente así: $E_1 \subset E_2$.

Designaremos la distancia entre los conjuntos E_1 y E_2 por el símbolo $\rho(E_1, E_2)$.

3°. *Si* $\rho(E_1, E_2) > 0$, *tenemos* $|E_1 \cup E_2|^* = |E_1|^* + |E_2|^*$.

DEMOSTRACIÓN. Pongamos $\delta = \frac{1}{2}\rho(E_1, E_2)$. Para un $\varepsilon > 0$ arbitrario y para $\delta > 0$ elegido existe tal recubrimiento $S(E)$ del conjunto $E = E_1 \cup E_2$, que $\sigma(S) \leqslant |E|^* + \varepsilon$, y la longitud de cada intervalo del recubrimiento $|\Delta_n|$ es inferior a δ [1]). Evidentemente, los intervalos Δ_n que recubren los puntos de E_1 no contienen puntos de E_2, y, viceversa, los intervalos que recubren los puntos de E_2 no contienen puntos de E_1. De otras palabras, el recubrimiento tomado $S(E)$ se desintegra en una suma de dos recubrimientos: $S(E) = S_1(E_1) + S_2(E_2)$, el primero de los cuales S_1 recubre E_1, y el segundo recubrimiento S_2 recubre E_2. Llegamos, pues, a que

$$S_1(E_1) + S_2(E_2) \leqslant |E|^* + \varepsilon.$$

De aquí proviene que $|E_1|^* + |E_2|^* \leqslant |E|^* + \varepsilon$, y, por tanto (en virtud de que ε es arbitrario), $|E_1|^* + |E_2|^* \leqslant |E|^*$. Por cuanto, según la propiedad 2°, se verifica también la desigualdad inversa $|E|^* \leqslant |E_1|^* + |E_2|^*$, resulta que $|E|^* = |E_1|^* + |E_2|^*$. La propiedad 3° está demostrada.

En particular, la propiedad 3° queda válida, si E_1 y E_2 son acotados, cerrados y no contienen puntos comunes.

4°. *Para un conjunto arbitrario E y un número arbitrario $\varepsilon > 0$ existe un conjunto abierto G que contiene E y es de tal índole que* $|G|^* \leqslant |E|^* + \varepsilon$.

DEMOSTRACIÓN. Basta tomar a título de G la suma de todos los intervalos que componen el recubrimiento $S(E)$ del conjunto E, para el cual $\sigma(S) \leqslant |E|^* + \varepsilon$.

2. Conjuntos medibles y sus propiedades.

Definición 1. *Un conjunto E se llama medible, si para cualquier número positivo ε existe un conjunto abierto G que contiene E y es de tal índole que la medida exterior de la diferencia $G \setminus E$ es inferior a ε.*

La medida exterior del conjunto medible E se llamará medida de dicho conjunto y se denotará con el símbolo $|E|$.

De esta definición se deduce que la medida del conjunto E es igual a cero cuando, y sólo cuando, es nula la medida exterior de este conjunto.

---

[1]) Esto se deduce de lo que para $\varepsilon > 0$ y $\delta > 0$ *arbitrarios* existe un recubrimiento $S(E)$ del conjunto E tal que $\sigma(S) < |E|^* + \varepsilon$, y $\Delta_n < \delta$ (para todo intervalo Δ_n del recubrimiento S). Para cerciorarse de ello, basta, al tomar un recubrimiento S', para el cual $\sigma(S') < |E|^* + \frac{\varepsilon}{2}$, dividir cada intervalo del recubrimiento S' en intervalos de longitud inferior a δ, y, después, recubrir los extremos de estos últimos intervalos con los intervalos, cuyas longitudes sumadas constituyen en total una magnitud inferior a $\varepsilon/2$.

Demostremos una serie de afirmaciones que aclaran las propiedades principales de los conjuntos medibles.

Teorema 8.2. *Todo conjunto abierto es medible, con la particularidad de que su medida es igual a la suma de intervalos disjuntos dos a dos que lo componen.*

La demostración es obvia (basta tomar $G = E$ en la definición de mensurabilidad y constatar que la cota inferior exacta de $\sigma(S)$ se logra sobre el recubrimiento S coincidente con la partición de E en una suma de intervalos disjuntos dos a dos).

Teorema 8.3. *Una suma de un número finito o numerable de conjuntos medibles es un conjunto medible.*

DEMOSTRACIÓN. Sea $E = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$, siendo cada E_n medible. Fijamos arbitrariamente $\varepsilon > 0$. Para todo conjunto E_n existe un conjunto abierto G_n que contiene E_n y que es de tal índole que

$$|G_n \setminus E_n|^* < \varepsilon \cdot 2^{-n}. \tag{8.3}$$

Al poner $G = \bigcup_{n=1}^{\infty} G_n$, notemos que el conjunto E está contenido en G y que la diferencia $G \setminus E$ está contenida en la suma $\bigcup_{n=1}^{\infty} (G_n \setminus E_n)$. Mas, en este caso, de la propiedad 2° de la medida exterior (véase el punto antecedente) y de la desigualdad (8.3) obtenemos

$$|G \setminus E|^* \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} |G_n \setminus E_n|^* < \varepsilon \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} = \varepsilon.$$

El teorema está demostrado.

Teorema 8.4. *Todo conjunto cerrado F es medible.*

DEMOSTRACIÓN. Realicemos la demostración en dos etapas.

1°. Supongamos al principio que el conjunto F *está acotado*. Fijamos arbitrariamente $\varepsilon > 0$. De acuerdo con la propiedad 4° de la medida exterior (véase el punto antecedente), existe un conjunto abierto G que contiene F y que es de tal índole que

$$|G|^* \leqslant |F|^* + \varepsilon. \tag{8.4}$$

Según la propiedad 7° del § 1, el conjunto $G \setminus F$ es abierto. Por eso, de acuerdo con el teorema 8.1, el conjunto $G \setminus F$ puede representarse en forma de una suma $G \setminus F = \bigcup_{n=1}^{\infty} \Delta_n$ de intervalos disjuntos dos a dos. El teorema quedará demostrado, si establecemos que

$$|G \setminus F|^* = \sum_{n=1}^{\infty} |\Delta_n| \leqslant \varepsilon. \tag{8.5}$$

Convengamos en denotar (para cada intervalo $\Delta = (a, b)$ y todo número α del intervalo $0 < \alpha < \frac{b-a}{2}$) con el símbolo Δ^α un intervalo $\Delta^\alpha = (a + \alpha, b - \alpha)$, y con el símbolo $\overline{\Delta}^\alpha$ un segmento $\overline{\Delta}^\alpha = [a + \alpha, b - \alpha]$. En cambio, si $\alpha \geqslant \frac{b-a}{2}$, con Δ^α se designará un conjunto vacío, para el cual $|\Delta^\alpha| = 0$. Para todo número n pongamos $\overline{E}_n^\alpha = \bigcup_{k=1}^{n} \Delta_k^\alpha$. Es evidente que $|\overline{E}_n^\alpha|^* = \sum_{k=1}^{n} |\Delta_k^\alpha|$. El conjunto $\overline{E}_n^\alpha$ es, de acuerdo con la propiedad 6° del § 1, cerrado. Por cuanto este conjunto no tiene puntos comunes con el conjunto cerrado F, entonces (en virtud de la propiedad 3° de la medida exterior)

$$|\overline{E}_n^\alpha + F|^* = |\overline{E}_n^\alpha|^* + |F|^*. \tag{8.6}$$

Por otra parte, ya que el conjunto $\overline{E}_n^\alpha + F$ (para todo $\alpha > 0$ y para todos los números n) está contenido en G, tendremos (en virtud de la propiedad 1° de la medida exterior)

$$|\overline{E}_n^\alpha + F|^* \leqslant |G|^*. \tag{8.7}$$

De (8.5), (8.6) y (8.7) obtenemos

$$|\overline{E}_n^\alpha|^* + |F|^* \leqslant |F|^* + \varepsilon \tag{8.8}$$

(para todo $\alpha > 0$ y todo número n). Por cuanto el conjunto F es acotado y su medida exterior $|F|^* < \infty$, de (8.8) resulta que

$$|\overline{E}^\alpha|^* < \varepsilon \tag{8.9}$$

(para todo $\alpha > 0$ y todo número n). Pasando en (8.9) al límite primero para $\alpha \to 0 + 0$, y, luego, para $n \to \infty$, obtendremos la desigualdad (8.5). Con esto queda demostrado el teorema para el caso del conjunto acotado F.

2°. Si el conjunto cerrado F no es, como regla general, acotado, representemos F en forma de una suma $F = \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n$, donde F_n es una intersección de los conjuntos cerrados F y $[-n, n]$. De acuerdo con lo demostrado en la primera etapa, cada F_n es medible (pues está cerrado y acotado), a consecuencia de lo cual es medible también, en virtud del teorema 8.3, el conjunto F. El teorema está completamente demostrado.

Teorema 8.5. *Si un conjunto E es medible, su complemento CE también será medible.*

DEMOSTRACIÓN. Por definición de mensurabilidad del conjunto E, existe para todo número n un conjunto abierto G_n que contiene E,

para el cual

$$|G_n \setminus E|^* < \frac{1}{n}. \qquad (8.10)$$

Sea $F_n = CG_n$. Por cuanto $CE_1 \setminus CE_2 = E_2 \setminus E_1$ para cualesquiera conjuntos E_1 y E_2 (que el lector mismo lo compruebe), entonces $CE \setminus CG_n = G_n \setminus E$, y por, consiguiente, $CE \setminus F_n = G_n \setminus E$. De la última igualdad se deduce que para todo número n

$$CE \setminus \bigcup_{k=1}^{\infty} F_k \subset G_n \setminus E. \qquad (8.11)$$

(Recordemos que la notación $E_1 \subset E_2$ significa que E_1 pertenece a E_2).

De (8.11) y de la propiedad 1° de la medida exterior proviene que para todo número n

$$|CE \setminus \bigcup_{k=1}^{\infty} F_k|^* \leqslant |G_n \setminus E|^*,$$

y de la última desigualdad y de (8.10) resulta que

$$|CE \setminus \bigcup_{k=1}^{\infty} F_k|^* < \frac{1}{n}$$

(para todo número n). Mas, esto es indicio de que la medida exterior y, por consiguiente, también la medida del conjunto $E_0 = CE \setminus \bigcup_{k=1}^{\infty} F_k$ es igual a cero, es decir, el conjunto CE es igual a la suma de conjuntos medibles E_0 y $\bigcup_{k=1}^{\infty} F_k$ (el último conjunto es medible en virtud de los teoremas 8.4 y 8.3). El teorema está demostrado.

Corolario. *Para que un conjunto E sea medible, es necesario y suficiente que para cualquier número positivo ε exista un conjunto cerrado F que se contenga en E y que sea de tal índole que la medida exterior de la diferencia $E \setminus F$ sea inferior a ε.*

DEMOSTRACIÓN. La mensurabilidad del conjunto E es equivalente a la de CE (teorema 8.5), es decir, equivalente a la exigencia de que para todo $\varepsilon > 0$ se encuentra un conjunto abierto G que contenga CE y que sea de tal índole que $|G \setminus CE|^* < \varepsilon$. Mas, la exigencia mencionada (en virtud de la identidad $CE_1 \setminus CE_2 = E_2 \setminus E_1$) es equivalente al requisito de que para todo $\varepsilon > 0$ exista un conjunto cerrado $F = CG$ que se contenga en E y sea tal que $|E \setminus F|^* = |CF \setminus CE|^* = |G \setminus CE|^* < \varepsilon$. El corolario está demostrado.

OBSERVACIÓN 1. La condición de mensurabilidad que se contiene en el corolario recién demostrado, puede tomarse por la nueva definición de mensurabilidad que es equivalente a la enunciada al principio de este punto.

Teorema 8.6. *La intersección de un número finito o numerable de conjuntos medibles es un conjunto medible.*

DEMOSTRACIÓN. La intersección de los conjuntos $E_1, E_2, \ldots$ designemos por el símbolo $\bigcap_{n=1}^{\infty} E_n$. En virutd de la identidad $\bigcap_{n=1}^{\infty} E_n \equiv$ $\equiv C\left[\bigcap_{n=1}^{\infty} CE_n\right]$ (que el lector mismo compruebe esta identidad), el teorema se deduce inmediatamente de los teoremas 8.3 y 8.5.

Teorema 8.7. *La diferencia de dos conjuntos medibles es un conjunto medible.*

DEMOSTRACIÓN se deduce de la identidad $A \setminus B \equiv A \cap (CB)$ y de los teoremas 8.5 y 8.6.

Procedamos, ahora, con la demostración del teorema fundamental de la teoría de la medida.

Teorema 8.8. *La medida de una suma de un número finito o numerable de conjuntos medibles disjuntos dos a dos es igual a la suma de medidas de dichos conjuntos.*

DEMOSTRACIÓN. Sea $E = \bigcap_{n=1}^{\infty} E_n$, con la particularidad de que los conjuntos E_n son medibles y disjuntos de dos en dos. Examinemos separadamente *dos casos.*

1) Supongamos primero que todos los E_n *son acotados.* Observemos que para un caso en que todos los E_n son cerrados y hay un número finito de ellos, la demostración del teorema se deduce inmediatamente de la propiedad 3° de la medida exterior (véase el p. 1 de este párrafo).

Sean, ahora, E_n unos conjuntos acotados disjuntos dos a dos.

En virtud del corolario del teorema 8.5, para cualquier $\varepsilon > 0$ y para todo número n existe un conjunto cerrado F_n que está contenido en E_n y es de tal índole que [1] $|E_n \setminus F_n| < \frac{\varepsilon}{2^n}$. Por cuanto todos los conjuntos F_n son acotados, cerrados y disjuntos dos a dos, para cualquier número finito m tenemos, en virtud de la observación aducida más arriba:

$$\left|\bigcup_{n=1}^{m} F_n\right| = \sum_{n=1}^{m} |F_n|. \tag{8.12}$$

Por otra parte, de la igualdad $E_n = (E_n \setminus F_n) \cup F_n$ se deduce (en virtud de la propiedad 2° de la medida exterior) que $|E_n| \leqslant$ $\leqslant |E_n \setminus F_n| + |F_n| < |F_n| + \frac{\varepsilon}{2^n}$, de suerte que

$$\sum_{n=1}^{m} |E_n| \leqslant \sum_{n=1}^{m} |F_n| + \varepsilon \tag{8.13}$$

[1]) Por cuanto la mensurabilidad de todos los conjuntos que figura en la demostración ya está establecida, podemos escribir siempre simplemente medida en lugar de la medida superior.

(para todo m finito). De (8.12) y (8.13) concluimos que para cualquier m finito

$$\sum_{n=1}^{m} |E_n| \leqslant \left| \bigcup_{n=1}^{m} F_n \right| + \varepsilon. \qquad (8.14)$$

Ahora tendremos en cuenta que la suma de todos los conjuntos F_n está contenida en E. De aquí proviene que para cualquier número m

$$\left| \bigcup_{n=1}^{m} F_n \right| \leqslant |E|,$$

de suerte que (en virtud de (8.14)) para cualquier número m

$$\sum_{n=1}^{m} |E_n| \leqslant |E| + \varepsilon. \qquad (8.15)$$

Pasando en (8.15) al límite para $m \to \infty$, llegamos a que

$$\sum_{n=1}^{\infty} |E_n| \leqslant |E| + \varepsilon$$

y, por consiguiente, en virtud de que $\varepsilon > 0$ es arbitrario,

$$\sum_{n=1}^{\infty} |E_n| \leqslant |E|. \qquad (8.16)$$

Resta por notar que del hecho de que la suma $\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$ es igual al conjunto E y de la propiedad 2° de la medida exterior se deduce una desigualdad inversa

$$|E| \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} |E_n|. \qquad (8.17)$$

De las desigualdades (8.16) y (8.17) se desprende la afirmación del teorema (para el caso de los conjuntos acotados E_n).

2) Supongamos, ahora, que los conjuntos E_n *no son, en general, acotados*. Denotemos con el símbolo E_n^k el conjunto acotado $E_n^k = E_n \cap (k-1 \leqslant |x| < k)$ (recordemos que el signo $\cap$ significa una intersección).

De la igualdad $E = \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=1}^{\infty} E_n^k$ y del caso examinado más arriba se deduce que

$$|E| = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} |E_n^k| = \sum_{n=1}^{\infty} |E_n|.$$

El teorema queda completamente demostrado.

OBSERVACIÓN 2. La propiedad fundamental de la medida que se establece por el teorema 8.8 recibe el nombre de *σ-aditividad* de la medida.

Con el fin de enunciar una propiedad más de la medida, introduzcamos un concepto nuevo.

Definición 2. *Diremos que un conjunto E es del tipo G_δ, si E puede ser representado en forma de una intersección de un número numerable de conjuntos abiertos G_n, y conjunto del tipo F_σ, si E puede ser representado en forma de una suma de un número numerable de conjuntos cerrados F_n.*

Teorema 8.9. *Si un conjunto E es medible, existen un conjunto E_1 del tipo F_σ contenido en E, y un conjunto E_2 del tipo G_δ que contiene E, para los cuales $|E_1| = |E| = |E_2|$.*

DEMOSTRACIÓN. Debido a la mensurabilidad de E y al corolario del teorema 8.5, para cualquier número n existen un conjunto abierto G_n, en el que está contenido E, y un conjunto cerrado F_n que se contiene en E de tal índole que

$$|E - F_n| < \frac{1}{n}, \quad |G_n \setminus E| < \frac{1}{n}. \tag{8.18}$$

Pongamos $E_1 = \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n$, $E_2 = \bigcap_{n+1}^{\infty} G_n$. Por cuanto para cualquier número n

$$E \setminus E_1 \subset E \setminus F_n, \quad E_2 \setminus E \subset G_n \setminus E,$$

resulta, en virtud de (8.18) y de la propiedad 1° de la medida exterior:

$$|E \setminus E_1| < \frac{1}{n}, \quad |E_2 \setminus E| < \frac{1}{n}.$$

Por ser arbitrario el número n, de aquí se deduce que $|E \setminus E_1| = 0$ y $|E_2 \setminus E| = 0$. El teorema está demostrado.

OBSERVACIÓN 3. Notemos que existen conjuntos *no medibles*. Para construirlos es suficiente tomar en consideración que en una circunferencia unidad existe un número numerable de conjuntos disjuntos de dos en dos y congruentes [1]) uno respecto de otro, cuya unión es igual al conjunto de todos los puntos de la citada circunferencia. A título de tales conjuntos interviene, por ejemplo, un conjunto E_0 de todos los puntos de la circunferencia, de los cuales dos puntos cualesquiera no se puede coincidir uno con el otro mediante un giro al ángulo $n \cdot \alpha$, donde n es un número entero cualquiera y α, un número *irracional* fijo, como también todos los conjuntos E_n que se obtienen a partir de E_0 mediante un giro al ángulo $n \cdot \alpha$. Si E_0 fuera medible serían medibles también todos los conjuntos E_n, con la particularidad de que $|E_n| = |E_0|$ para todo n entero. Mas, en

[1]) Por término «congruentes» se deben entender en el caso dado los conjuntos, uno de los cuales puede coincidirse con el otro girando la circunferencia en el plano a cierto ángulo.

este caso obtendríamos, en virtud de teorema 8.8, que $2\pi \sum_{n=-\infty}^{\infty} |E_n|$, lo que es imposible, cualquiera que sea el valor de $|E_n|$.

§ 3. Funciones medibles

1. Concepto de función medible. Convengamos en llamar recta numérica *extendida* a una recta numérica ordinaria $-\infty < x < \infty$ con dos elementos nuevos, $-\infty$ y $+\infty$, añadidos. Para poder aplicar operaciones aritméticas en la recta numérica extendida, se considerará que $a + (+\infty) = +\infty$, $a + (-\infty) = -\infty$ (para cualquier a finito); $(+\infty) + (+\infty) = +\infty$, $-\infty + (-\infty) = -\infty$; $(+\infty) - a = +\infty$, $(-\infty) - a = -\infty$ (para cualquier a finito); $(+\infty) - (-\infty) = +\infty$, $-\infty - (+\infty) = -\infty$; $a\cdot(+\infty) = +\infty$ cuando $a > 0$, $0\cdot(+\infty) = 0$, $a\cdot(+\infty) = -\infty$ cuando $a < 0$; $(+\infty)(+\infty) = +\infty$, $(+\infty)\cdot(-\infty) = -\infty$, $(-\infty) \times (-\infty) = +\infty$, $0\cdot(-\infty) = 0$, $a\cdot(-\infty) = -\infty$ cuando $a > 0$, $a\cdot(-\infty) = +\infty$ cuando $a < 0$; $\frac{\pm\infty}{a} = (\pm\infty)\cdot\frac{1}{a}$ para cualquier $a \neq 0$ finito, $\frac{a}{\pm\infty} = 0$ para cualquier a finito.

Quedan indefinidas sólo las siguientes operaciones: $(+\infty) + (-\infty)$, $(+\infty) - (+\infty)$, $(-\infty) - (-\infty)$, $\frac{\pm\infty}{\pm\infty}$.

En lo que sigue adelante en este capítulo se examinarán siempre las funciones que están definidas en los conjuntos *medibles* de la recta numérica *ordinaria* y que toman valores pertenecientes a la recta numérica *extendida*.

Como ejemplo de tal función puede servir

$$f(x) = \begin{cases} -\infty & \text{para } x < -1, \\ 0 & \text{para } -1 \leqslant x \leqslant 1, \\ +\infty & \text{para } x > 1. \end{cases}$$

Convengamos en denotar, aquí y en adelante, con el símbolo E [f satisface la condición A] un conjunto de todos los valores de x en E, para los cuales $f(x)$ satisface la condición A.

Por ejemplo, $E[f \geqslant a]$ es un conjunto de aquellos valores de x en E, para los cuales $f(x) \geqslant a$.

Definición. *Una función $f(x)$ definida en un conjunto E se denomina medible en este conjunto, si para cualquier número real a el conjunto $E[f \geqslant a]$ es medible.*

Teorema 8.10. *Para que una función $f(x)$ sea medible en el conjunto E, es necesario y suficiente que uno de los siguientes tres conjuntos:*

$$E[f > a], \quad E[f < a], \quad E[f \leqslant a] \tag{8.19}$$

sea medible para cualquier a real.

DEMOSTRACIÓN. 1) Teniendo presente la mensurabilidad de la función $f(x)$ de las relaciones elementales

$$E[f > a] = \bigcup_{n=1}^{\infty} E\left[f \geqslant a + \frac{1}{n}\right],$$

$$E[f \geqslant a] = \bigcap_{n=1}^{\infty} E\left[f > a - \frac{1}{n}\right]$$

y de los teoremas 8.3 y 8.6 deducimos que la mensurabilidad (para cualquier a real) del conjunto $E[f > a]$ es una condición necesaria y suficiente de mensurabilidad de la función $f(x)$ sobre el conjunto E.

2) De las relaciones $E[f < a] = E \setminus E[f \geqslant a]$ y de los teoremas 8.3 y 8.7 se deduce que la mensurabilidad (para cualquier a real) del conjunto $E[f < a]$ es una condición necesaria y suficiente de mensurabilidad de la función $f(x)$ sobre el conjunto E.

3) Por fin, de la relación $E[f \leqslant a] = E \setminus E[f \leqslant a]$, de los mismos teoremas 8.3 y 8.7 y de lo demostrado en 1) se deduce que la mensurabilidad (para cualquier a real) del conjunto $E[f \leqslant a]$ es una condición necesaria y suficiente de mensurabilidad de la función $f(x)$ sobre el conjunto E. El teorema está demostrado.

OBSERVACIÓN. En virtud del teorema 8.10. la mensurabilidad (para todo a real) de cualquiera de los tres conjuntos (8.19) puede tomarse por la nueva definición de mensurabilidad de la función $f(x)$ sobre el conjunto E equivalente a la enunciada más arriba.

2. Propiedades de las funciones medibles.

1°. *Si la función $f(x)$ es medible sobre el conjunto E, será medible en cualquier parte medible E_1 del conjunto E.*

La demostración se deduce inmediatamente de la identidad $E_1[f \geqslant a] \equiv E_1 \cap E[f \geqslant a]$ y del teorema 8.6.

2°. *Si el conjunto E es una suma finita o numerable de conjuntos medibles E_n, y si una función $f(x)$ es medible en cada conjunto E_n, será también medible sobre el conjunto E.*

La demostración se deduce inmediatamente de la identidad $E[f \geqslant a] = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n[f \geqslant a]$ y del teorema 8.3.

3°. *Toda función $f(x)$ es medible sobre el conjunto E de medida cero.*

En efecto, cualquier subconjunto de un conjunto de medida cero es medible y tiene medida cero.

Definición 1. *Dos funciones $f(x)$ y $g(x)$, definidas sobre un conjunto medible E, se denominan equivalentes en dicho conjunto, si el conjunto $E[f \neq g]$ es de medida cero.*

Para denotar funciones equivalentes (en el conjunto E) $f(x)$ y $g(x)$ se usa frecuentemente el símbolo $f \approx g$.

4°. *Si las funciones $f(x)$ y $g(x)$ son equivalentes en el conjunto E y si $f(x)$ es medible en E, será también medible en E la función $g(x)$.*

DEMOSTRACIÓN. Pongamos $E_0 = E[f \neq g]$, $E_1 = E \setminus E_0$. Por cuanto la función $g(x)$ coincide en E_1 con $f(x)$, $g(x)$ será medible en E_1 en virtud de la propiedad 1°. De acuerdo con la propiedad 3°, $g(x)$ es también medible sobre E_0 y, por eso, según la propiedad 2°, $g(x)$ es medible en E.

Definición 2. *Suele decirse que cierta propiedad A es válida casi en todo punto sobre el conjunto E, si un conjunto de puntos de E, sobre el cual dicha propiedad falla de ser válida, es de medida cero.*

Corolario de la propiedad 4°. *Si una función $f(x)$ es continua casi en todo punto sobre el conjunto medible E, será medible sobre E.*

DEMOSTRACIÓN. Notemos al principio que si una función $f(x)$ es continua sobre un conjunto cerrado F, ella será medible en F, pues el conjunto $F[f \geqslant a]$ es cerrado, cualquiera que sea a, y, por consiguiente, es medible. Supongamos que $f(x)$ es continua sobre un conjunto medible arbitrario E casi en todo punto y denotemos con R un subconjunto de todos los puntos de discontinuidad de $f(x)$ que tiene medida cero.

En virtud de las propiedades 2° y 3°, basta mostrar la mensurabilidad de $f(x)$ sobre el conjunto $E_1 = E \setminus R$. Con arreglo al teorema 8.9, existe un conjunto E_2 del tipo F_σ (véase p. 2, § 2) que se contiene en E_1 y es de tal índole que $|E_2| = |E_1| = |E|$. En virtud de las mismas propiedades 2° y 3°, basta mostrar que $f(x)$ es medible sobre el conjunto E_2. Mas, E_2 (siendo un conjunto del tipo F_σ) puede representarse en forma de una suma numerable de conjuntos cerrados F_n, en cada uno de los cuales $f(x)$ es continua y, por consiguiente (en virtud de la observación aducida más arriba) medible. Entonces, de acuerdo con la propiedad 2°, la función $f(x)$ es medible en E_2.

OBSERVACIÓN. Subrayemos que la continuidad de la función $f(x)$ casi en todo punto del conjunto E conviene diferirla de la equivalencia de $f(x)$ sobre E a una función continua. Así, por ejemplo, la función de Dirichlet $f(x) = 1$, si x es racional, y $f(x) = 0$, si x es irracional, no es continua en ningún punto del segmento $[0, 1]$ (véase cap. 4, v. I), no obstante dicha función es equivalente en $[0, 1]$ a una función $g(x) \equiv 0$, pues, $f(x) \neq g(x)$ sólo en el conjunto de todos los puntos racionales del segmento $[0, 1]$, el cual es numerable y tiene, por eso, medida cero [1]).

3. Operaciones aritméticas con las funciones medibles. Demostremos, ante todo, un lema siguiente.

Lema 1. *1) Si una función $f(x)$ es medible sobre un conjunto E, la función $|f(x)|$ también será medible en dicho conjunto. 2) Si $f(x)$ es medible sobre un conjunto E, y C es una constante cualquiera, cada una de las funciones $f(x) + C$ y $C \cdot f(x)$ es medible sobre el conjunto E.*

---

[1]) El hecho de que un conjunto numerable de puntos es de medida cero se deduce del teorema 8.8 y de lo que la medida de un conjunto compuesto por un solo punto es igual a cero.

3) *Si $f(x)$ y $g(x)$ son medibles sobre un conjunto E, el conjunto $E[f > g]$ será medible.*

DEMOSTRACIÓN. 1) Basta tomar en consideración que para todo a no negativo

$$E[|f| \geqslant a] = E[f \geqslant a] \cup E[f \leqslant -a]$$

y emplear el teorema 8.3. Si $a < 0$, resulta que $E[|f| > a]$ coincide con E y es también medible.

2) Basta aprovechar, para cualquier a real, las relaciones

$$E[f + C \geqslant a] = E[f \geqslant a - C],$$

$$E[C \cdot f \geqslant a] = \begin{cases} E\left[f \geqslant \frac{a}{C}\right] \text{ para } C > 0, \\ E\left[f \leqslant \frac{a}{C}\right] \text{ para } C < 0. \end{cases}$$

Si $C = 0$, tenemos $C \cdot f(x) \equiv 0$, y, por eso, es medible.

3) Sea $\{r_k\}$ todos los puntos racionales de la recta infinita $(-\infty, \infty)$. Basta tomar en consideración que

$$E[f > g] = \bigcap_{k=1}^{\infty} (E[f > r_k] \cap E[g < r_k]).$$

Apoyándonos en el lema 1, demostremos el siguiente teorema.

Teorema 8.11. *Si las funciones $f(x)$ y $g(x)$ toman sobre un conjunto E valores finitos y son medibles en dicho conjunto, cada una de las funciones $f(x) - g(x)$, $f(x) + g(x)$, $f(x) \cdot g(x)$ y $f(x)/g(x)$ (para el cociente $f(x)/g(x)$ se necesita adicionalmente que todos los valores de $g(x)$ sean distintos de cero) será medible sobre el conjunto E.*

DEMOSTRACIÓN. 1) Para demostrar la mensurabilidad de la diferencia $f(x) - g(x)$, basta notar que para cualquier a real un conjunto $E[f - g > a]$ coincide con el conjunto medible (en virtud del lema 1) $E[f > g + a]$.

2) Para demostrar la mensurabilidad de la suma $f(x) + g(x)$, basta tener presente que $f + g = f - (-g)$ y que la función $-g(x)$ es medible segun el lema 1.

3) Para demostrar la mensurabilidad de un producto de dos funciones medibles, cerciorémonos primero que el cuadrado de una función medible es función medible. Efectivamente, si $a < 0$, el conjunto $E[f^2 > a]$ coincide con E y es, por ello, medible. En cambio, si $a \geqslant 0$, el conjunto $E[f^2 > a]$ coincide con un conjunto medible (con arreglo al lema 1) $E[|f| > \sqrt{a}]$. La mensurabilidad del cuadrado de una función medible y la mensurabilidad de una suma y de una diferencia de las funciones medibles predeterminan (en virtud de la relación $f \cdot g = \frac{1}{4}(f + g)^2 - \frac{1}{4}(f - g)^2$) la mensurabilidad del producto $f(x)\, g(x)$.

4) Por ser medible el producto de dos funciones medibles, para demostrar la mensurabilidad de un cociente f/g, basta probar que $1/g$ es medible, y la mensurabilidad de ésta se deduce de los teoremas 8.3 y 8.6, y de las relaciones

$$E\left[\frac{1}{g}>a\right]=\begin{cases} E\,[g>0]\cap E\left[g<\frac{1}{a}\right] & \text{para } a>0,\\ E\,[g>0] & \text{para } a=0,\\ E\,[g>0]\cup E\left[g<\frac{1}{a}\right] & \text{para } a<0.\end{cases}$$

El teorema está completamente demostrado.

4. Sucesiones de funciones medibles. Demostremos algunas afirmaciones importantes concernientes a la sucesión de funciones medibles.

Teorema 8.12. *Si $\{f_n(x)\}$ es una sucesión de funciones medibles en el conjunto E, tanto el límite inferior, como el superior de dicha sucesión* [1]) *serán funciones medibles sobre el conjunto E.*

DEMOSTRACIÓN. Cerciorémonos primero de que si una sucesión $\{g_n(x)\}$ se compone de las funciones medibles sobre el conjunto E, cada una de las funciones [2]) $\varphi(x)=\inf\limits_n g_n(x)$ y $\psi(x)=\sup\limits_n g_n(x)$ será medible sobre el conjunto E. Basta tomar en consideración las relaciones

$$E\,[\varphi<a]=\bigcup_{n=1}^{\infty} E\,[g_n<a],$$

$$E\,[\psi>a]=\bigcup_{n=1}^{\infty} E\,[g_n>a]$$

y aprovechar el teorema 8.3.

Denotemos, ahora, los límites inferior y superior de la sucesión $\{f_n(x)\}$ con $\underline{f}(x)$ y $\overline{f}(x)$, respectivamente. Para demostrar la mensurabilidad de $\underline{f}(x)$ y $\overline{f}(x)$ sobre el conjunto E, basta notar que

$$\underline{f}(x)=\sup_{n\geqslant 1}\left\{\inf_{k\geqslant n} f_k(x)\right\},$$

$$\overline{f}(x)=\inf_{n\geqslant 1}\left\{\sup_{k\geqslant n} f_k(x)\right\},$$

[1]) En el capítulo 3, v. I se ha demostrado que cualquier sucesión acotada cuenta con los límites inferior y superior. Aquí convenimos en considerar que si una sucesión no es acotada inferiormente (superiormente), su límite inferior (superior) es igual a $-\infty$ $(+\infty)$.

[2]) La notación $\varphi(x)=\inf\limits_n g_n(x)$ significa que en todo punto x el valor de $\varphi(x)$ es la cota inferior exacta de los valores en este punto de $g_1(x)$, $g_2(x)$, ... Un sentido análogo tiene la notación $\psi(x)=\sup\limits_n g_n(x)$

y hacer uso de la afirmación demostrada más arriba. El teorema está demostrado.

Teorema 8.13. *Si una sucesión de funciones $\{f_n(x)\}$, medibles sobre el conjunto E, converge casi en todo punto en E hacia una función $f(x)$, la función $f(x)$ será medible en E.*

DEMOSTRACIÓN. En el caso en que la sucesión $\{f_n(x)\}$ converge hacia $f(x)$ no casi en todo punto, sino *siempre* en E, la afirmación del teorema sobre mensurabilidad de $f(x)$ se deduce inmediatamente del teorema 8.12. En cambio, si $\{f_n(x)\}$ converge hacia $f(x)$ en todo punto sobre E, a excepción de un conjunto E_0 de medida cero, $f(x)$ es medible en $E\setminus E_0$ en virtud del teorema 8.12, y medible en E_0, siendo este último conjunto de medida cero (propiedad 3° del p. 2) y, por eso, medible sobre el conjunto $E=(E\setminus E_0)\cup E_0$ (en virtud de la propiedad 2° del p. 2). El teorema está demostrado.

Introduzcamos, ahora, el concepto importante de convergencia *en medida* de una sucesión sobre un conjunto dado.

Definición. *Supongamos que las funciones $f_n(x)$ $(n=1, 2, \ldots)$ y $f(x)$ son medibles en un conjunto E y toman casi en todo punto de E valores finitos. Se dice que la sucesión $\{f_n(x)\}$ converge hacia $f(x)$ en medida sobre el conjunto E, si para cualquier número positivo ε se verifica una igualdad*

$$\lim_{n\to\infty} |E[|f-f_n|\geqslant\varepsilon]|=0, \tag{8.20}$$

es decir, si para cualesquiera ε y δ positivos existe un número N tal que con $n\geqslant N$ se verifique la desigualdad $|E[|f-f_n|\geqslant\varepsilon]|<\delta$.

A. Lebesgue demostró el siguiente teorema.

Teorema 8.14. *Sea E un conjunto medible de medida finita y supongamos que las funciones $f_n(x)$ $(n=1, 2, \ldots)$ y $f(x)$ son medibles sobre el conjunto E y toman casi en todo punto de E valores finitos. Entonces, la convergencia de la sucesión $\{f_n(x)\}$ hacia $f(x)$ casi en todo punto de E predetermina también la convergencia de $\{f_n(x)\}$ hacia $f(x)$ en medida sobre el conjunto E.*

DEMOSTRACIÓN. Pongamos $A=E[|f|=+\infty]$, $A_n=E[|f_n|=$ $=+\infty]$, $B=E\setminus E[\lim\limits_{n\to\infty} fn=f]$, $C=A+B+\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}A_n$.

Entonces, por hipótesis del teorema, $|C|=0$, y en todo punto fuera del conjunto C la sucesión $\{f_n(x)\}$ converge hacia $f(x)$, mientras que todas las funciones $f_n(x)$ y $f(x)$ tienen valores finitos.

Para un $\varepsilon>0$ arbitrario pongamos $E_n=E[|f-f_n|\geqslant\varepsilon]$, $R_n=\bigcup\limits_{k=n}^{\infty}E_k$. Entonces, por cuanto E_n está contenido en R_n, se verifica la desigualdad $|E_n|\leqslant|R_n|$, y para demostrar (8.20), *basta probar que* $|R_n|\to 0$, *cuando* $n\to\infty$.

Denotemos con R una intersección de todos los conjuntos R_1, $R_2, \ldots$ y cerciorémonos de que $|R_n|\to|R|$, cuando $n\to\infty$. Por

construcción, R_{n+1} está contenido en R_n para cada número n, y, por tanto, para cada número n tenemos

$$R_n \setminus R = \bigcup_{k=n}^{\infty} (R_k \setminus R_{k+1}),$$

con la particularidad de que los conjuntos bajo el signo de la suma son disjuntos dos a dos. Mas, en virtud del teorema 8.8, para cada número n

$$|R_n \setminus R| = \sum_{k=n}^{\infty} |R_k \setminus R_{k+1}|, \tag{8.21}$$

y, por ser convergente la serie

$$|R_1 \setminus R| = \sum_{k=1}^{\infty} |R_k \setminus R_{k+1}|,$$

el resto de la serie (8.21) tiende a cero cuando $n \to \infty$. Así pues, $|R_n \setminus R| \to 0$, cuando $n \to \infty$. En virtud de la relación $|R_n| = |R_n \setminus R| + |R|$, esto es indicio de que $|R_n| \to |R|$, cuando $n \to \infty$.

Ahora, para demostrar (8.20), nos resta probar que $|R| = 0$. Con este fin *es suficiente mostrar que R está contenido en C.*

Sea x_0 un punto cualquiera que no pertenece a C. Entonces, para un $\varepsilon > 0$ arbitrario fijo existe un número $N(x_0, \varepsilon)$ tal que $|f_n(x_0) - f(x_0)| < \varepsilon$, cuando $n \geqslant N(x_0, \varepsilon)$. Esto significa que para $n \geqslant N(x_0, \varepsilon)$, el punto x_0 no pertenece a E_n y menos aún pertenece a R_n y al conjunto R, el cual es intersección de todos los R_n. Así pues, todo punto x_0 que no pertenece a C tampoco pertenece a R. Mas, esto significa precisamente que R está contenido en C. El teorema está demostrado.

OBSERVACIÓN. Subrayemos que la convergencia de la sucesión $\{f_n(x)\}$ hacia la función $f(x)$ en medida sobre el conjunto E no predetermina ni mucho menos no sólo la convergencia de $\{f_n(x)\}$ hacia $f(x)$ casi en todo punto en E, sino tampoco la covergencia de $\{f_n(x)\}$ hacia $f(x)$ *por lo menos en un solo punto* del conjunto E. Basta examinar un ejemplo construido en el p. 3, § 2, cap. 1. Una sucesión $\{f_n(x)\}$, construida en el citado ejemplo, es divergente en todo punto del segmento $[0, 1]$, pero, por cuanto cada función $f_n(x)$ es distinta de cero sólo en el segmento I_n, cuya longitud tiende a cero cuando $n \to \infty$, la sucesión $\{f_n(x)\}$ converge hacia la función $f(x) \equiv 0$ en medida sobre el segmento $[0, 1]$.

Sin embargo, F. Riezs [1]) demostró el siguiente teorema.

Teorema 8.15. *Sea E un conjunto medible de medida finita y supongamos que las funciones $f_n(x)$ $(n = 1, 2, \ldots)$ y $f(x)$ son medibles sobre el conjunto E y toman casi en todo punto de E los valores finitos.*

[1]) F. Riezs (1880—1956), matemático húngaro.

Entonces, si una sucesión $\{f_n(x)\}$ converge hacia $f(x)$ en medida sobre el conjunto E, en dicha sucesión puede elegirse una subsucesión que sea convergente hacia $f(x)$ casi en todo punto de E.

DEMOSTRACIÓN. Podemos suponer, sin limitar la generalidad de nuestros razonamientos, que las funciones $f_n(x)$ y $f(x)$ toman valores finitos no casi en todo punto, sino siempre sobre E (de lo contrario, se introducirían los mismos conjuntos A y A_n que figuraban en la demostración del teorema antecedente y se repetirían todos los razonamientos para el conjunto $E \setminus A \setminus \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$). De la convergencia de $\{f_n(x)\}$ hacia $f(x)$ en medida sobre el conjunto E se deduce que para cualquier número k existe tal número n_k que para la medida del conjunto $E_k = E[|f - f_{n_k}| \geqslant 1/k]$ se verifique la desigualdad $|E_k| \leqslant 1/2^k$. Pongamos, al igual que en la demostración del teorema antecedente, $R_n = \bigcup_{k=n}^{\infty} E_k$, $R = \bigcap_{n=1}^{\infty} R_n$. Entonces, en virtud de la propiedad de la medida exterior (véase p. 1, § 2), $|R_n| \leqslant$
$\leqslant \sum_{k=n}^{\infty} |E_k|$, de suerte que $|R_n| \leqslant \sum_{k=n}^{\infty} 1/2^k = 1/2^{n-1}$.
De este modo, $|R_n| \to 0$ cuando $n \to \infty$. De un modo sumamente análogo al empleado en el teorema antecedente se demuestra que $|R_n| \to |R|$, cuando $n \to \infty$. Llegamos, pues, a que $|R| = 0$.

Resta por demostrar que fuera de R la subsucesión $\{f_{n_k}(x)\}$ siempre converge hacia $f(x)$. Sea x un punto arbitrario de $E \setminus R$. En este caso x no pertenece al conjunto R_N para cierto $N = N(x)$. Pero, esto quiere decir que x no pertenece a E_k, cuando $k \geqslant N(x)$. Dicho de otro modo, $|f(x) - f_{n_k}(x)| < 1/k$ para $k \geqslant N(x)$. El teorema está demostrado.

§ 4. Integral de Lebesgue

1. Concepto de integral de Lebesgue de una función acotada. Llamemos *partición* de un conjunto medible E a toda familia T de un número finito de subconjuntos medibles y disjuntos dos a dos $E_1, E_2, \ldots, E_n$ del conjunto E que en suma integran el conjunto E.

Para denotar la partición del conjunto E se empleará el símbolo $T = \{E_k\}_{k=1}^{n}$, o bien un símbolo más breve $T = \{E_k\}$.

Examinemos en el conjunto E de medida finita una función acotada $f(x)$. Para una partición arbitraria $T = \{E_k\}$ del conjunto E, designemos por los símbolos M_k y m_k las cotas exactas superior e inferior, respectivamente, de la función $f(x)$ sobre un conjunto parcial E_k e introduzcamos en el análisis dos sumas

$$S_T = \sum_{k=1}^{n} M_k |E_k| \quad \text{y} \quad s_T = \sum_{k=1}^{n} m_k |E_k|$$

que se denominan sumas *superior* e *inferior*, respectivamente, de la partición T.

Notemos en seguida que para toda partición $T = \{E_k\}$

$$s_T \leqslant S_T. \tag{8.22}$$

Para cualquier función $f(x)$, acotada sobre el conjunto de medida finita E, tanto el conjunto de todas las sumas superiores $\{S_T\}$, como también el de todas las sumas inferiores $\{s_T\}$ (correspondientes a toda clase de particiones $T = \{E_k\}$ del conjunto E) están ambos acotados. Por eso, existe una cota inferior exacta del conjunto $\{S_T\}$, que se denotará con el símbolo $\overline{I}$ y se llamará *integral superior de Lebesgue*, y una cota superior exacta del conjunto $\{s_T\}$ que se denotará con $\underline{I}$ y se llamará *integral inferior de Lebesgue*.

Definición. *Una función $f(x)$, acotada sobre conjunto de medida finita E, se denomina integrable según Lebesgue en dicho conjunto, si $\underline{I} = \overline{I}$, es decir, si las integrales de Lebesgue superior e inferior de dicha función coinciden.*

En este caso el número $\underline{I} = \overline{I}$ se llama integral de Lebesgue, extendida a E, respecto de la función $f(x)$ y se denota con el símbolo

$$\int_E f(x)\,dx.$$

Detengámonos en algunas propiedades de las sumas superiores e inferiores y de las integrales superiores e inferiores de Lebesgue.

Convengamos en llamar la partición $T^* = \{E_i^*\}_{i=1}^m$ *refino* de la partición $T = \{E_k\}_{k=1}^n$, si para cualquier número i $(i = 1, 2, \ldots, m)$ existe un número $\nu(i)$ que satisface las desigualdades $1 \leqslant \nu(i) \leqslant n$, y que es de tal índole que E_i^* esté contenido en $E_{\nu(i)}$.

El número $\nu(i)$ puede resultar un mismo para diferentes números i, con la particularidad de que la suma de conjuntos E_i^* tomada respecto de todos los números i, para los cuales $\nu(i)$ es igual a un mismo número k, equivale, obviamente, al conjunto E_k, es decir,

$$\bigcup_{\nu(i)=k} E_i^* = E_k. \tag{8.23}$$

Además, pongámonos de acuerdo llamar la partición $\hat{T} = \{E_i\}$ *producto* de las particiones $T_1 = \{E_p^{(1)}\}$ y $T_2 = \{E_q^{(2)}\}$, si $\hat{T}$ se compone de los conjuntos E_i que representan las intersecciones de toda clase de pares de conjuntos $E_p^{(1)}$ y $E_q^{(2)}$, es decir, si cada E_i es igual a $E_p^{(1)} \cap E_q^{(2)}$, siendo agotadas todas las combinaciones posibles de los números p y q.

Es evidente que el producto $\hat{T}$ de dos particiones T_1 y T_2 es un refino de cada una de las particiones T_1 y T_2 (con la particularidad de que cualquier otra partición de T que fuera un refino tanto de T_1, como de T_2, es, a su vez, refino de $\hat{T}$).

Son válidas las siguientes propiedades de las sumas superiores e inferiores y de las integrales superiores e inferiores.

1°. *Si la partición T^* es un refino de la partición T, se tiene* $s_T \leqslant s_{T^*}$, $S_{T^*} \leqslant S_T$

DEMOSTRACIÓN. Demos la demostración para las sumas superiores (para las sumas inferiores la demostración es sumamente análoga). Sea $T^* = \{E_i^*\}_{i=1}^m$ un refino de la partición $T = \{E_k\}_{k=1}^n$, y sean M_i^* la cota superior exacta de $f(x)$ sobre el conjunto E_i^* $(i = 1, 2, \ldots, m)$ y M_k, la cota superior exacta de $f(x)$ sobre el conjunto E_k $(k = 1, 2, \ldots, n)$.

Por definición de refino, existe, para cada número i $(i = 1, 2, \ldots, m)$, un número correspondiente $\nu(i)$ que satisface las desigualdades $1 \leqslant \nu(i) \leqslant n$, y que es de tal índole que E_i^* esté contenido en $E_{\nu(i)}$, con la particularidad de que la suma de conjuntos E_i^* tomada respecto de todos los números i, para los cuales $\nu(i)$ es igual a un mismo número k, satisface la igualdad (8.23). Diremos en adición que para todos los números, i, para los cuales $\nu(i)$ equivale a un mismo número k, resulta válida una desigualdad

$$M_i^* \leqslant M_k \tag{8.24}$$

(pues, la cota superior exacta sobre un subconjunto no sobrepasa la cota superior exacta en todo el conjunto)

De la definición de la suma superior y de las relaciones (8.23) y (8.24) llegamos a que [1])

$$S_{T^*} = \sum_{i=1}^{m} M_i^* |E_i^*| = \sum_{k=1}^{n} \left[\sum_{\nu(i)=k} M_i^* |E_i^*| \right] \leqslant$$
$$\leqslant \sum_{k=1}^{n} M_k \left[\sum_{\nu(i)=k} |E_i^*| \right] = \sum_{k=1}^{n} M_k |E_k| = S_T.$$

2°. *Para dos particiones sumamente arbitrarias T_1 y T_2 se verifica la desigualdad* $s_{T_1} \leqslant S_{T_2}$.

DEMOSTRACIÓN. Sea $\hat{T}$ un producto de las particiones T_1 y T_2. Por cuanto $\hat{T}$ es un refino de cada una de las particiones T_1 y T_2, se verifican, en virtud de la propiedad 1°, las desigualdades

$$s_{T_1} \leqslant s_{\hat{T}}, \quad S_{\hat{T}} \leqslant S_{T_2}. \tag{8.25}$$

De las desigualdades (8.25) y (8.22) se deduce que $s_{T_1} \leqslant S_{T_2}$.

3°. *Las integrales superior e inferior de Lebesgue están entrelazadas mediante una relación* $\underline{I} \leqslant \overline{I}$.

DEMOSTRACIÓN. Fijemos una partición *arbitraria* T_2. Ya que para cualquier partición T_1 es válida, en virtud de la propiedad 2°,

[1]) Aquí se tiene en cuenta que de (8.23) y de lo que los conjuntos E_i^* son disjuntos dos a dos, se deduce, en virtud del teorema 8.8, que $\sum\limits_{\nu(i)=k} |E_i^*| = |E_k|$

la desigualdad $s_{T_1} \leqslant S_{T_2}$, el número S_{T_2} será *una* de las cotas superiores del conjunto $\{s_{T_1}\}$ de todas las sumas inferiores, y, por tanto, la cota superior *exacta* $\underline{I}$ del conjunto citado satisface la desigualdad $\underline{I} \leqslant S_{T_2}$. Siendo válida la última desigualdad para la partición arbitraria T_2, el número $\underline{I}$ será *una* de las cotas inferiores del conjunto $\{S_{T_2}\}$ de todas las sumas superiores, y, por tanto, la cota inferior exacta $\overline{I}$ del conjunto citado satisface la condición $\underline{I} \leqslant \overline{I}$.

Corolario. *Toda función integrable según Riemann es integrable según Lebesgue, con la particularidad de que las integrales de Lebesgue y de Riemann respecto de tal función coinciden.*

DEMOSTRACIÓN. Supongamos que $f(x)$ es integrable en $E = [a, b]$ según Riemann (y, por consiguiente, es acotada en este segmento). Al designar, para esta función, por los símbolos $\underline{I}$ e $\overline{I}$ las integrales inferior y superior de Lebesgue y por los símbolos $\underline{I}_R$ e $\overline{I}_R$, las integrales inferior y superior de Darboux (véase cap. 1, v. II) obtendremos las siguientes desigualdades[1])

$$\underline{I}_R \leqslant \underline{I} \leqslant \overline{I} \leqslant \overline{I}_R. \tag{8.26}$$

Si una función es integrable según Riemann, para ella $\underline{I}_R = \overline{I}_R$, y por tanto, en virtud de (8.26), $\underline{I} = \overline{I}$, es decir, dicha función es integrable según Lebesgue. Más aún, cuando $\underline{I}_R = \overline{I}_R$, de (8.26) se deducen las igualdades $\underline{I}_R = \underline{I} = \overline{I} = \overline{I}_R$, es decir, se deduce la coincidencia de las integrales de Riemann y de Lebesgue, pues, la primera de estas integrales es igual al número $\underline{I}_R = \overline{I}_R$, y la segunda, al número $\underline{I} = \overline{I}$.

En el punto siguiente demostraremos que la clase de funciones integrables según Lebesgue es más amplia que la de funciones integrables según Riemann. Se aclara, además, que resulta conveniente introducir funciones medibles.

2. Clase de funciones acotadas integrables según Lebesgue. Demostremos el siguiente teorema *fundamental*.

Teorema 8.16. *Cualquiera que sea un conjunto medible de medida finita E, toda función $f(x)$, acotada y medible sobre E, es integrable en dicho conjunto.*

DEMOSTRACIÓN. Construyamos una partición especial del conjunto E, llamada *lebesguiana*. Al denotar con M y m las cotas exactas de $f(x)$ sobre el conjunto E, dividamos un segmento $[m, M]$, con ayuda de los puntos $m = y_0 < y_1 < y_2 < \ldots < y_n = M$, en los segmentos parciales $[y_{k-1}, y_k]$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$ y denotemos con δ la longi-

[1]) Pues, cualquier partición de $E = [a, b]$ en segmentos parciales se incluye en la clase de particiones del conjunto E en el sentido de Lebesgue.

tud del máximo de estos segmentos, es decir, pongamos

$$\delta = \max_{k=1, 2, \ldots, n} (y_k - y_{k-1}).$$

Llamemos partición *lebesguiana* del conjunto E a una partición $T = \{E_k\}_{k=1}^n$, en la cual $E_1 = E[y_0 \leqslant f \leqslant y_1]$, $E_k = E[y_{k-1} < f \leqslant y_k]$ para $k = 2, 3, \ldots, n$.

Sean S_T y s_T las sumas superior e inferior, correspondientes a la partición lebesguiana, que se denominan *sumas lebesguianas superior e inferior*. Notemos que para todo número k $(k = 1, 2, \ldots, n)$ son válidas las desigualdades

$$y_{k-1} \leqslant m_k \leqslant M_k \leqslant y_k, \tag{8.27}$$

en las cuales con M_k y m_k están designadas las cotas exactas de $f(x)$ sobre un conjunto parcial E_k. Multiplicando las desigualdades (8.27) por la medida $|E_k|$ del conjunto E_k y al sumarlas, después, respecto de todos los números $k = 1, 2, \ldots, n$, tendremos

$$\sum_{k=1}^{n} y_{k-1} |E_k| \leqslant s_T \leqslant S_T \leqslant \sum_{k=1}^{n} y_k |E_k|.$$

De las desigualdades obtenidas concluimos que

$$0 \leqslant S_T - s_T \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{k=1}^{n} y_k |E_k| - \sum_{k=1}^{n} y_{k-1} |E_k| = \sum_{k=1}^{n} (y_k - y_{k-1}) |E_k| < \delta |E|. \tag{8.28}$$

Por cuanto las desigualdades $s_T \leqslant \underline{I} \leqslant \overline{I} \leqslant S_T$ se verifican para cualquier partición T, de (8.28) obtendremos

$$0 \leqslant \overline{I} - \underline{I} < \delta |E|. \tag{8.29}$$

Ya que $\delta > 0$ puede elegirse arbitrariamente pequeño, de (8.29) proviene que $\underline{I} = \overline{I}$. El teorema está demostrado.

OBSERVACIÓN 1 En el complemento 2 a este capítulo se demostrará que la mensurabilidad de una función $f(x)$, acotada sobre un conjunto medible E, es no sólo una condición suficiente, sino también necesaria, de integrabilidad de esta función según Lebesgue en el conjunto E.

OBSERVACIÓN 2 Sea ξ_k $(k = 1, 2, \ldots, n)$ un elemento arbitrario de un conjunto parcial E_k de la partición lebesguiana T. Una suma $\sigma_T(\xi_k, f) = \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k) \cdot |E_k|$ se denominará *suma integral lebesguiana* de la función $f(x)$. Por cuanto, siendo arbitraria la elección de los puntos ξ_k sobre los conjuntos E_k, dicha suma está encerrada entre las sumas inferior y superior de la correspondiente partición lebesguiana T, de la desigualdad (8.28) proviene que $\sigma_T(\xi_k, f)$ (junto con S_T y s_T) tiende, para $\delta \to 0$, hacia la integral de Lebesgue $\underline{I} = \overline{I} = \int_E f(x)\, dx$.

3. Propiedades de la integral de Lebesgue de una función acotada

1°. $\int\limits_E 1\,dx = |E|$.

Para demostrar, es suficiente notar que para una función $f(x) \equiv 1$ tanto la suma superior, como la interior de cualquier partición T del conjunto E es igual a $|E|$.

2°. *Si una función $f(x)$ es acotada e integrable sobre un conjunto E de medida finita y α es un número real, la función $[\alpha \cdot f(x)]$ también será integrable sobre el conjunto E, con la particularidad de que*

$$\int\limits_E [\alpha \cdot f(x)]\,dx = \alpha \cdot \int\limits_E f(x)\,dx. \tag{8.30}$$

DEMOSTRACIÓN. Denotemos, para una partición arbitraria $T = \{E_k\}$ del conjunto E, las sumas superior e inferior de la función $f(x)$ con los símbolos S_T y s_T; las sumas superior e inferior de la función $[\alpha \cdot f(x)]$ denotemos con los símbolos $S_T^{(\alpha)}$ y $s_T^{(\alpha)}$. Entonces, es evidente que

$$S_T^{(\alpha)} = \begin{cases} \alpha S_T & \text{para } \alpha \geqslant 0, \\ \alpha s_T & \text{para } \alpha < 0, \end{cases} \quad s_T^{(\alpha)} = \begin{cases} \alpha \cdot s_T & \text{para } \alpha \geqslant 0 \\ \alpha \cdot S_T & \text{para } \alpha < 0. \end{cases} \tag{8.31}$$

Si designamos por $\overline{I}$ e $\underline{I}$ las integrales superior e inferior de la función $f(x)$, y con $\overline{I}^{(\alpha)}$ e $\underline{I}^{(\alpha)}$, las integrales superior e inferior de la función $[\alpha \cdot f(x)]$, entonces, de (8.31) proviene que

$$\overline{I}^{(\alpha)} = \begin{cases} \alpha \cdot \overline{I} & \text{para } \alpha \geqslant 0, \\ \alpha \cdot \underline{I} & \text{para } \alpha < 0, \end{cases} \quad \underline{I}^{(\alpha)} = \begin{cases} \alpha \cdot \underline{I} & \text{para } \geqslant 0 \\ \alpha \cdot \overline{I} & \text{para } \alpha < 0. \end{cases} \tag{8.32}$$

Por ser $f(x)$ integrable, se verifica la desigualdad

$$\underline{I} = \overline{I} = \int\limits_E f(x)\,dx,$$

y por eso, de las desigualdades (8.32) se deduce que para α cualquiera

$$\overline{I}^{(\alpha)} = \underline{I}^{(\alpha)} = \alpha \cdot \int\limits_E f(x)\,dx.$$

Esto significa precisamente que la integral en el primer miembro de (8.30) existe y que se verifica la igualdad (8.30).

3°. *Si cada una de las funciones $f_1(x)$ y $f_2(x)$ es acotada e integrable sobre un conjunto de medida finita E, la suma de estas funciones $[f_1(x) + f_2(x)]$ es también integrable en el conjunto E, con la particularidad de que*

$$\int\limits_E [f_1(x) + f_2(x)]\,dx = \int\limits_E f_1(x)\,dx + \int\limits_E f_2(x)\,dx. \tag{8.33}$$

DEMOSTRACIÓN. Pongamos $f(x) = f_1(x) + f_2(x)$, y sea $T = \{E_k\}$ una partición arbitraria del conjunto E. Denotemos para la función $f(x)$ las cotas exactas sobre un conjunto parcial E_k con M_k y m_k; las sumas superior e inferior de la partición T, con S_T y s_T; las integrales superior e inferior de Lebesgue, mediante $\overline{I}$ e $\underline{I}$. Las magnitudes análogas para las funciones $f_1(x)$ y $f_2(x)$ se denotarán con los mismos símbolos que se han usado para $f(x)$, mas con los índices (1) y (2), respectivamente.

Notemos que *la cota superior exacta (inferior exacta) de la suma no es superior (no es inferior) a la suma de cotas superiores exactas (inferiores exactas) de los sumandos.* De aquí se deduce que para cualquier número k

$$m_k^{(1)} + m_k^{(2)} \leqslant m_k \leqslant M_k \leqslant M_k^{(1)} + M_k^{(2)},$$

y, por consiguiente, para cualquier partición T

$$s_T^{(1)} + s_T^{(2)} \leqslant s_T \leqslant S_T \leqslant S_T^{(1)} + S_T^{(2)}.$$

De las últimas desigualdades proviene, a su vez, que

$$\underline{I}^{(1)} + \underline{I}^{(2)} \leqslant \underline{I} \leqslant \overline{I} \leqslant \overline{I}^{(1)} + \overline{I}^{(2)}. \tag{8.34}$$

Por cuanto (en virtud de que $f_1(x)$ y $f_2(x)$ son integrables)

$$\underline{I}^{(1)} = \overline{I}^{(1)} = \int_E f_1(x)\,dx, \quad \underline{I}^{(2)} = \overline{I}^{(2)} = \int_E f_2(x)\,dx,$$

de (8.34) resulta que

$$\underline{I} = \overline{I} = \int_E f_1(x)\,dx + \int_E f_2(x)\,dx.$$

Esto significa precisamente que la integral en el primer miembro de (8.33) existe y que se verifica la igualdad (8.33).

Corolario. Inmediatamente de 2° y 3° se deduce *la propiedad lineal de la integral: si cada una de las funciones $f_1(x)$ y $f_2(x)$ es acotada e integrable sobre un conjunto de medida finita E, y si α y β son unos números reales arbitrarios, la función $\alpha\cdot f_1(x) + \beta\cdot f_2(x)$ será integrable en E, con la particularidad de que*

$$\int_E [\alpha f_1(x) + \beta f_2(x)]\,dx = \alpha\cdot\int_E f_1(x)\,dx + \beta\cdot\int_E f_2(x)\,dx.$$

4°. *Si una función $f(x)$ es acotada e integrable sobre cada uno de los conjuntos disjuntos E_1 y E_2 de medida finita, la función $f(x)$ será integrable también sobre la suma E de los conjuntos E_1 y E_2, con la particularidad de que*

$$\int_E f(x)\,dx = \int_{E_1} f(x)\,dx + \int_{E_2} f(x)\,dx. \tag{8.35}$$

Esta propiedad se llama, de ordinario, *aditividad* de la integral.

DEMOSTRACIÓN. Notemos que la unión de una partición arbitraria T_1 del conjunto E_1 y de una partición arbitraria T_2 del conjunto E_2 forma una partición T del conjunto $E = E_1 \cup E_2$. Denotemos las sumas superiores de $f(x)$, correspondientes a las particiones T_1, T_2 y T, con S_{T_1}, S_{T_2} y S_T, respectivamente, y las sumas inferiores de $f(x)$, correspondientes a las particiones T_1, T_2, y T, con s_{T_1}, s_{T_2}, y s_T, respectivamente. Entonces, evidentemente.

$$S_T = S_{T_1} + S_{T_2}, \quad s_T = s_{T_1} + s_{T_2}. \tag{8.36}$$

Denotemos las integrales superior e inferior de la función $f(x)$ sobre el conjunto E_1 con $\overline{I}^{(1)}$ y $\underline{I}^{(1)}$; sobre el conjunto E_2, con $\overline{I}^{(2)}$ e $\underline{I}^{(2)}$, y sobre el conjunto E, con $\overline{I}$ e $\underline{I}$.

A partir de las igualdades (8.36) y de lo que la cota superior exacta (inferior exacta) de la suma no es superior (no es inferior) a la suma de cotas superiores exactas (inferiores exactas) de los sumandos concluimos que

$$\underline{I}^{(1)} + \underline{I}^{(2)} \leqslant \underline{I} \leqslant \overline{I} \leqslant \overline{I}^{(1)} + \overline{I}^{(2)}. \tag{8.37}$$

Por cuanto (debido a que $f(x)$ es integrable sobre E_1 y E_2) $\underline{I}^{(1)} = \overline{I}^{(1)} = \int\limits_{E_1} f(x)\,dx$, $\underline{I}^{(2)} = \overline{I}^{(2)} = \int\limits_{E_2} f(x)\,dx$, de (8.37) obtenemos

$$\underline{I} = \overline{I} = \int\limits_{E_1} f(x)\,dx + \int\limits_{E_2} f(x)\,dx.$$

Esto significa precisamente que la integral en el primer miembro de (8.35) existe y que se verifica la igualdad (8.35).

5°. *Si cada una de las funciones $f_1(x)$ y $f_2(x)$ es acotada e integrable sobre un conjunto de medida finita E, y si en cada punto de dicho conjunto $f_1(x) \geqslant f_2(x)$, entonces*

$$\int\limits_E f_1(x)\,dx \geqslant \int\limits_E f_2(x)\,dx. \tag{8.38}$$

DEMOSTRACIÓN. Por cuanto todas las sumas inferiores de la función $F(x) = f_1(x) - f_2(x)$ son no negativas, resulta que $\underline{I} \geqslant 0$. De aquí se deduce que $\int\limits_E F(x)\,dx = \int\limits_E f_1(x)\,dx - \int\limits_E f_2(x)\,dx \geqslant 0$ (la existencia de esta integral y la igualdad escrita se deducen de la propiedad lineal ya demostrada). Con ello queda demostrada (8.38).

4. Integral de Lebesgue de una función no acotada y no negativa. Sus propiedades. Ahora pasamos a la definición de integral de Lebesgue para el caso en que una función medible $f(x)$ no es acotada. *Convengamos en considerar, al principio, que $f(x) \geqslant 0$ en todo punto del conjunto de medida finita E.*

Pongamos para cualquier $N > 0$:

$$(f)_N(x) = \text{mín}\{N,\ f(x)\}, \tag{8.39}$$

$$I_N(f) = \int_E (f)_N(x)\,dx. \tag{8.40}$$

Notemos que para cualquier función $f(x)$, medible sobre un conjunto E, la función (8.39) será también medible [1]) y, por eso, la integral (8.40) existe. Indiquemos, además, que de (8.39) y (8.40) se deduce que *$I_N(f)$ va creciendo cuando N aumenta.*

Definición. *Si existe un límite finito $I_N(f)$ para $N \to \infty$, la función $f(x)$ recibe el nombre de función sumable (según Lebesgue) sobre un conjunto E, y el límite mencionado se llama integral de la función $f(x)$ extendida al conjunto E y se designa por el símbolo* $\int_E f(x)\,dx$.

Así pues, por definición

$$\int_E f(x)\,dx = \lim_{N\to\infty} I_N(f).$$

Cerciorémonos de que *si una función $f(x)$, no negativa sobre el conjunto E, es sumable en dicho conjunto, la función $f(x)$ puede tender a $+\infty$ sólo en un subconjunto de E de medida cero.* En efecto, pongamos $E_0 = E[f = +\infty]$ y tengamos en cuenta que de (8.40) y (8.39) se deduce (en virtud de las propiedades 4° y 5° del punto anterior) una cadena de desigualdades

$$I_N(f) = \int_E (f)_N(x)\,dx \geqslant \int_{E_0} (f)_N(x)\,dx \geqslant \int_{E_0} N\,dx \geqslant N\,|E_0|$$

Pero, de la desigualdad $I_N(f) \geqslant N\,|E_0|$ proviene que la suposición de $|E_0| > 0$ llevaría a lo que $\lim\limits_{N\to\infty} I_N(f)$ sea igual a $+\infty$.

Añadamos que *toda función $f(x)$ es sumable sobre un conjunto de medida cero* (esto es evidente).

Al tratar de aclarar las propiedades generales de las funciones sumables, notemos, ante todo, que *para las funciones sumables no negativas quedan vigentes las propiedades 2°—5° establecidas en el punto antecedente para las funciones integrables acotadas* [2]).

Demos a conocer, a título de ejemplo, la demostración de la propiedad 3°. De (8.39) se deducen inmediatamente las siguientes desi-

[1]) Pues, para todo a real será medible el conjunto $E[(f)_N > a] = \begin{cases} E[f > a] \text{ para } a < N, \\ \text{conjunto vacío para } a \geqslant N. \end{cases}$

[2]) La constante α en la propiedad 2° debe ser en este caso no negativa.

gualdades:

$$(f_1)_{N/2}(x) + (f_2)_{N/2}(x) \leqslant (f_1+f_2)_N(x) \leqslant (f_1)_N(x) + (f_2)_N(x)$$

que se cumplen para cualquier $N > 0$ en todo punto x del conjunto E. Integrando estas desigualdades en el conjunto E [1]), llegaremos a establecer la propiedad 3° para las funciones sumables no negativas arbitrariamente elegidas f_1 y f_2.

La demostración de las demás propiedades 2°—5° para tales funciones dejamos al cargo del lector.

Aclaremos, ahora, dos propiedades fundamentales más de las funciones sumables no negativas arbitrariamente elegidas.

***Teorema 8.17*. (*aditividad completa*).** *Supongamos que un conjunto E es una suma de un número numerable de conjuntos medibles disjuntos de dos en dos E_k, es decir, $E = \bigcup_{k=1}^{\infty} E_k$. En tal caso serán válidas dos afirmaciones.*

I. *Si una función no negativa $f(x)$ es sumable sobre el conjunto E, será sumable también sobre cada uno de los conjuntos E_k, con la particularidad de que se verifica la igualdad*

$$\int_E f(x)\,dx = \sum_{k=1}^{\infty} \int_{E_k} f(x)\,dx. \tag{8.41}$$

II. *Si una función $f(x)$, no negativa sobre el conjunto E, es sumable en cada conjunto E_k y si la serie en el segundo miembro de (8.41) es convergente, la función $f(x)$ será sumable también sobre E, y para ella se verifica la igualdad* (8.41).

DEMOSTRACIÓN. 1) Demostremos, primero, los teoremas I y II para una función integrable $f(x)$ no negativa y *acotada*. Supongamos que existe una constante M tal que $f(x) \leqslant M$ en todo punto de E. Pongamos $R_n = \sum_{k=n+1}^{\infty} E_k$ y notemos que, en virtud del teorema 8.8, $|R_n| = \sum_{k=n+1}^{\infty} |E_k| \to 0$ (para $n \to \infty$). Pero, en este caso, en virtud de las propiedades 4°, 5° y 1°,

$$\int_E f(x)\,dx - \sum_{k=1}^{n} \int_{E_k} f(x)\,dx = \int_{R_n} f(x)\,dx \leqslant$$

$$\leqslant M \int_{R_n} dx = M\,|R_n| \to 0$$

(para $n \to \infty$). La última relación demuestra los teoremas I y II para el caso de una función integrable acotada.

[1]) Aprovechamos las propiedades 5° y 3° para las funciones acotadas integrables.

2) Ahora demostremos el teorema I para una función sumable e integrable arbitrariamente elegida. La sumabilidad de $f(x)$ en cada E_k se deduce directamente de la desigualdad $\int_{E_k} (f)_N(x)\,dx \leqslant \int_E (f)_N(x)\,dx$ y de lo que la integral en el primer miembro de ésta no decrece respecto de N. Resta por probar la igualdad (8.41). Con ayuda de lo demostrado en el p. 1) y de la desigualdad $(f)_N(x) \leqslant f(x)$ obtenemos

$$\int_E (f)_N(x)\,dx = \sum_{k=1}^{\infty} \int_{E_k} (f)_N(x)\,dx \leqslant \sum_{k=1}^{\infty} \int_{E_k} f(x)\,dx. \qquad (8.42)$$

Al pasar en la última igualdad al límite para $N \to \infty$, tendremos

$$\int_E f(x)\,dx \leqslant \sum_{k=1}^{\infty} \int_{E_k} f(x)\,dx. \qquad (8.43)$$

Por otra parte, en virtud de las propiedades demostradas en el punto anterior, para cualquier número m

$$\int_E (f)_N(x)\,dx = \sum_{k=1}^{\infty} \int_{E_k} (f)_N(x)\,dx \geqslant \sum_{k=1}^{m} \int_{E_k} (f)_N(x)\,dx,$$

y haciendo tender en la última desigualdad, primero, N a ∞, y, luego, m a ∞, obtendremos una desigualdad

$$\int_E f(x)\,dx \geqslant \sum_{k=1}^{\infty} \int_{E_k} f(x)\,dx,$$

la cual demuestra, junto con (8.43), la igualdad (8.41).

3) Por fin, demostremos el teorema II para una función sumable no negativa arbitrariamente elegida. Notemos que resulta suficiente demostrar sólo la sumabilidad de $f(x)$ sobre un conjunto E (pues, la igualdad (8.41) se deducirá en este caso del teorema I ya demostrado).

Mas, la sumabilidad de $f(x)$ en E se deduce inmediatamente de la desigualdad (8.42) y de lo que la serie en el segundo miembro de esta desigualdad es convergente. El teorema está completamente demostrado.

***Teorema 8.18.* (continuidad absoluta de una integral).** *Si una función $f(x)$ es no negativa y sumable sobre un conjunto E, existe, para cualquier ε positivo, un número positivo δ tal que, cualquiera que sea un subconjunto sumable e del conjunto E con la medida $|e|$ inferior*

a δ, se verifique la desigualdad

$$\int_e f(x)\,dx < \varepsilon.$$

DEMOSTRACION. 1) Supongamos al principio que la función no negativa $f(x)$ *es acotada*, es decir, existe tal M que $f(x) \leqslant M$. Entonces (en virtud de las propiedades establecidas en el punto antecedente)

$$\int_e f(x)\,dx \leqslant M \int_e dx = M\,|e| < M\delta < \varepsilon, \text{ para } \delta < \frac{\varepsilon}{M}.$$

2) Demostremos, ahora, el teorema para una función arbitraria $f(x)$, no negativa y sumable. Al fijar arbitrariamente $\varepsilon > 0$, podemos elegir (en virtud de la definición de sumabilidad) $N = N(\varepsilon)$ tal que

$$\int_E [f(x) - (f_N(x)]\,dx < \frac{\varepsilon}{2}. \tag{8.44}$$

Con ayuda de (8.44) y de la desigualdad $(f_N)(x) \leqslant N$ obtendremos

$$\int_e f(x)\,dx = \int_e [f(x) - (f)_N(x)]\,dx + \int_e (f)_N(x) < \frac{\varepsilon}{2} + N \int_e dx =$$

$$\frac{\varepsilon}{2} + N \cdot |e| < \frac{\varepsilon}{2} + N\delta < \varepsilon,$$

siempre que $\delta < \varepsilon/2N(\varepsilon)$. El teorema está demostrado.

Indiquemos en adición dos propiedades más que son válidas exclusivamente para las funciones sumables no negativas.

Condición bajo la cual una función sumable no negativa es equivalente a cero. Si una función $f(x)$ es no negativa, medible y sumable sobre un conjunto E, y si una integral $\int_E f(x)\,dx$ es nula, la función $f(x)$ será equivalente a cero idéntico sobre el conjunto E.

DEMOSTRACION. Basta probar que la medida del conjunto $E[f > 0]$ es igual a cero. Primero, cerciorémonos de que para todo $a > 0$ es igual a cero la medida del conjunto $E_a = E[f > a]$. En efecto, si la medida $|E_a|$ fuera positiva, se obtendría una desigualdad

$\int_E f(x)\,dx \geqslant \int_{E_a} f(x)\,dx \geqslant aE_a > 0$, que contradice la condición de que sea $\int_E f(x)\,dx = 0$. Ahora resta notar que se verifica la igualdad $E[f > 0] = \bigcup_{k=1}^{\infty} E[f > 1/k]$, de la cual proviene que $|E[f > 0]| \leqslant$

$\leqslant \sum_{k=1}^{\infty} |E[f > 1/k]| = 0.$

Criterio mayorante de sumabilidad de una función medible no negativa. Si una función $f_1(x)$ es no negativa y sumable sobre un conjunto E, y la función $f_2(x)$ es sumable en E, y si en todo punto de E se verifica la desigualdad $f_1(x) \leqslant f_2(x)$, entonces la función $f_1(x)$ es también sumable sobre E.

DEMOSTRACIÓN Basta notar que

$$\int_E (f_1)_N(x)\,dx \leqslant \int_E (f_2)_N(x)\,dx \leqslant \int_E f_2(x)\,dx$$

y tomar en consideración que la integral en el primer miembro de la última desigualdad es una función no decreciente de N.

5. Integral de Lebesgue de una función no acotada de signo arbitrario. Supongamos que una función medible $f(x)$ no es, en el caso general, acotada sobre un conjunto E y toma en dicho conjunto los valores de signos cualesquiera.

Introduzcamos en el análisis dos funciones *no negativas*

$$f^+(x) = \frac{1}{2}(|f(x)| + f(x)) \text{ y } f^-(x) = \frac{1}{2}(|f(x)| - f(x)),$$

la primera de las cuales, $f^+(x)$, coincide con $f(x)$ sobre el conjunto $E[f \geqslant 0]$ y es nula sobre el conjunto $E[f < 0]$, mientras que la segunda función, $f^-(x)$, coincide con $-f(x)$ sobre el conjunto $E[f < 0]$ y es nula sobre el conjunto $E[f \geqslant 0]$. Es evidente que $f^+(x) + f^-(x) = |f(x)|$, $f^+(x) - f^-(x) = f(x)$.

Definición. *Una función $f(x)$ se denomina sumable sobre el conjunto E, si en dicho conjunto es sumable cada una de las funciones no negativas $f^+(x)$ y $f^-(x)$. En este caso la diferencia entre las integrales $\int_E f^+(x)\,dx - \int_E f^-(x)\,dx$ se denomina integral de Lebesgue de la función $f(x)$ en el conjunto E y se designa por el símbolo $\int_E f(x)\,dx$.*

Así pues, por definición

$$\int_E f(x)\,dx = \int_E f^+(x)\,dx - \int_E f^-(x)\,dx. \tag{8.45}$$

En lugar del término «función sumable» se usa frecuentemente el término «función integrable».

Una colección de todas las funciones sumables sobre el conjunto E se denota, corrientemente, por el símbolo $L(E)$ o $L^1(E)$. La notación $f(x) \in L(E)$ significa que $f(x)$ pertenece a la clase $L(E)$, es decir, es medible y sumable sobre el conjunto E.

Subrayemos que *una función $f(x)$, sumable sobre el conjunto E, es sumable en E cuando, y sólo cuando, es sumable en E la función $|f(x)|$.*

En efecto, si $f(x)$ es sumable en E, entonces, por definición, cada una de las funciones $f^+(x)$ y $f^-(x)$ es sumable en E, y, por consiguiente, la suma de las funciones mencionadas $f^+(x)$ y $f^-(x)$, que es igual a $|f(x)|$, será sumable en E. En cambio, si la función $|f(x)|$ es sumable en el conjunto E, la mensurabilidad en E de cada una de las funciones $f^+(x)$ y $f^-(x)$, como también las desigualdades $f^+(x) \leqslant |f(x)|$, $f^-(x) \leqslant |f(x)|$ predeterminan (en virtud del criterio mayorante de sumabilidad de una función medible no negativa (véase el fin del punto antecedente), que tanto $f^+(x)$, como $f^-(x)$, son sumables en E, y esto deja constancia de que la función $f(x)$ es sumable en el conjunto E.

De este modo, para la integral de Lebesgue (a diferencia de la integral de Riemann), la integrabilidad de una función $f(x)$ es equivalente a la de $|f(x)|$.

Pasemos a la cuestión *de propiedades* de las funciones sumables arbitrarias.

Notemos en seguida que *para las funciones sumables arbitrarias son válidas las propiedades* $2°-5°$, establecidas en el p. 3 para las funciones acotadas integrables, y en el p. 4, para funciones sumables no negativas. La validez de las propiedades citadas para las funciones sumables arbitrarias se deduce inmediatamente de la igualdad (8.45) y de la validez de las propiedades mencionadas para las funciones sumables no negativas.

Por fin, para las funciones sumables arbitrarias quedan en vigor las propiedades de aditividad completa y continuidad absoluta de la integral de Lebesgue (la demostración de estas propiedades para las funciones sumables no negativas ha constituido el contenido de los teoremas 8.17 y 8.18 del punto anterior). Aduzcamos la formulación y breves indicaciones referentes a la demostración de las propiedades mencionadas.

Teorema 8.17* **(*propiedad de aditividad completa*).** *Supongamos que un conjunto E es una suma de un número numerable de conjuntos medibles disjuntos de dos en dos E_k, es decir, $E = \bigcup_{k=1}^{\infty} E_k$. Entonces, son válidas las siguientes dos afirmaciones.*

I. *Si una función $f(x)$ es sumable sobre un conjunto E, será también sumable en cada conjunto E_k, con la particularidad de que se verifica la igualdad* (8.41).

II. *Si una función $f(x)$ es medible y sumable en cada conjunto E_k, y si converge una serie*

$$\sum_{k=1}^{\infty} \int_{E_k} |f(x)|\, dx,$$

$f(x)$ será sumable en el conjunto E y se verifica la igualdad (8.41).

Con el fin de demostrar el teorema I, basta aplicar el teorema 8.17, I a las funciones no negativas $f^+(x)$ y $f^-(x)$ y aprovechar la igualdad (8.45).

Con el fin de demostrar el teorema II, basta tomar en consideración que la función $f(x)$ es sumable en E, debido al teorema 8.17, II. Mas, en este caso $f(x)$ es también sumable en E' y, en virtud del teorema I ya demostrado, se verifica la igualdad (8.41).

Teorema 8.18* (propiedad de continuidad absoluta de la integral). *Si una función $f(x)$ es sumable sobre un conjunto E, existe, para cualquier ε positivo, un número positivo δ tal que, cualquiera que sea un subconjunto e del conjunto E cuya medida $|e|$ sea inferior a δ se verifica una desigualdad* $\left|\int_e f(x)\,dx\right| < \varepsilon$.

Para la demostración basta aplicar el teorema 8.18 a una función no negativa $|f(x)|$ y aprovechar la desigualdad $\left|\int_e f(x)\,dx\right| \leqslant \int_e |f(x)|\,dx$.

6. Paso límite bajo el signo de la integral de Lebesgue.

Definición. *Diremos que una sucesión de funciones $\{f_n(x)\}$, sumables sobre un conjunto E, converge hacia una función $f(x)$ en $L(E)$, sumable sobre el mismo conjunto, si*

$$\lim_{n\to\infty}\int_E |f_n(x)-f(x)|\,dx = 0. \tag{8.46}$$

La convergencia de la sucesión $\{f_n(x)\}$ en $L(E)$ asegura la posibilidad de integrar término a término la sucesión $\{f_n(x)\}$ sobre el conjunto E, pues, de (8.46) se desprende que $\lim\limits_{n\to\infty}\int_E f_n(x)\,dx = \int_E f(x)\,dx$.

Observemos que *si una subsucesión de funciones $\{f_n(x)\}$, medibles y sumables sobre el conjunto E, converge hacia una función $f(x)$ en $L(E)$, medible y sumable en E, entonces $\{f_n(x)\}$ es convergente también en medida hacia $f(x)$ sobre E.*

Efectivamente, al fijar un $\varepsilon > 0$ arbitrario y al denotar con E_n un conjunto $E[|f-f_n|>\varepsilon]$, tendremos

$$\int_E |f_n(x)-f(x)|\,dx \geqslant \int_{E_n} |f_n(x)-f(x)|\,dx \geqslant \varepsilon\,|E_n|,$$

de suerte que de (8.46) proviene que $|E_n| \to 0$, cuando $n\to\infty$.

Así pues, la convergencia en medida sobre E es más débil que la convergencia en $L(E)$ (y, según lo demostrado más arriba, más débil que la convergencia casi en todo punto de E).

Demostremos, no obstante, admitidas unas suposiciones adicionales que, de la convergencia en medida sobre E se deducirá la convergencia en $L(E)$.

***Teorema 8.19* (*de Lebesgue*).** *Si una sucesión de funciones $f_n(x)$, medibles sobre un conjunto E, converge en medida en E hacia una función $f(x)$ medible sobre E, y si existe una función $F(x)$, sumable sobre el conjunto E, tal que para todos los números n y casi todos p los puntos de E se cumple la desigualdad $|f_n(x)| \leqslant F(x)$, entonces la sucesión $\{f_n(x)\}$ converge hacia $f(x)$ en $L(E)$.*

DEMOSTRACIÓN. Cerciorémonos, primero, de que la función límite $f(x)$ satisface casi en todo punto de E la desigualdad $|f(x)| \leqslant F(x)$. Del teorema 8.15 se deduce que en la sucesión $\{f_n(x)\}$ puede elegirse una subsucesión $\{f_{n_k}(x)\}$ $(k = 1, 2, \ldots)$ que sea convergente hacia $f(x)$ casi en todo punto de E. Pasando en la desigualdad $|f_{n_k}(x)| \leqslant F(x)$ al límite para $k \to \infty$, llegaremos a que $|f(x)| \leqslant F(x)$ para casi todos los puntos de E. De la desigualdad demostrada y del criterio mayorante de sumabilidad de una función medible no negativa (véase el fin del p. 4) proviene que $f(x)$ *es sumable* en E.

Al fijar un $\varepsilon > 0$ arbitrario y al designar con E_n un conjunto $E[|f - f_n| > \varepsilon]$, tendremos [1])

$$\int_E |f(x)-f_n(x)|\,dx = \int_{E_n} |f(x)-f_n(x)|\,dx + \int_{E \setminus E_n} |f(x)-f_n(x)|\,dx \leqslant$$

$$\leqslant 2\int_{E_n} F(x)\,dx + \varepsilon|E|.$$

Esta desigualdad y la arbitrariedad de $\varepsilon > 0$ permiten constatar que para establecer la convergencia de $\{f_n(x)\}$ hacia $f(x)$ en $L(E)$, basta demostrar que $\lim\limits_{n\to\infty} \int_{E_n} F(x)\,dx = 0$, pero esto se deduce inmediatamente del teorema 8.18* sobre la continuidad absoluta de la integral y de lo que, por hipótesis $|E_n| \to 0$, cuando $n \to \infty$. El teorema está demostrado.

***Corolario* (*teorema de Lebesgue sobre el paso límite bajo el signo de integral*).** *Si una sucesión de funciones $\{f_n(x)\}$, medibles sobre el conjunto E, converge casi en todo punto de E hacia una función límite $f(x)$, y si existe una función $F(x)$, sumable en el conjunto E, tal que para todos los números n y casi todos los puntos de E se cumple la*

[1]) Tenemos presente en este caso que $|f_n(x) - f(x)| \leqslant 2F(x)$ casi en todo punto en E.

desigualdad $|f_n(x)| \leqslant F(x)$, *entonces* $f(x)$ *es sumable sobre* E *y*

$$\lim_{n\to\infty} \int_E f_n(x)\,dx = \int_E f(x)\,dx. \tag{8.47}$$

DEMOSTRACION. Del teorema 8.13 se deduce la mensurabilidad de $f(x)$ sobre el conjunto E. Ahora basta notar que de la convergencia casi en todo punto de E proviene (en virtud del teorema 8.14) convergencia en medida sobre E, y, además, aplicar el teorema 8.19.

***Teorema 8.20* (*teorema de B. Levi*).** *Supongamos que cada función* $f_n(x)$ *es medible y sumable sobre el conjunto* E, *y que para todos los números* n *y para casi todos los puntos del conjunto* E *se cumple una desigualdad* $f_n(x) \leqslant f_{n+1}(x)$. *Supongamos, además, que existe una constante* M *tal que para todos los números* n *se cumple la desigualdad* $\left|\int_E f_n(x)\,dx\right| \leqslant M$. *Entonces, para casi todos los puntos* x *del conjunto* E *existe un límite finito* $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$, *con la particularidad de que la función límite* $f(x)$ *es sumable sobre el conjunto* E *y se verifica la igualdad* (8.47).

DEMOSTRACIÓN. Sin perder la generalidad de los razonamientos, podemos considerar que todas las $f_n(x)$ son *no negativas* en casi todo punto de E (de lo contrario, en lugar de $f_n(x)$ tomaríamos funciones no negativas $g_n(x) = f_n(x) - f_1(x)$). Por cuanto la sucesión $\{f_n(x)\}$ no decrece casi en todo punto de E, queda definida casi en todos los puntos de E la función $f(x)$ que toma en estos puntos o bien valores finitos, o bien valores iguales a $+\infty$. Si demostramos que dicha función límite es sumable sobre el conjunto E, esto será un indicio de que $f(x)$ tiene casi en todo punto de E valores *finitos*, es decir, un indicio de que la sucesión $\{f_n(x)\}$ es convergente hacia $f(x)$ *casi en todo punto* de E. De aquí y de la desigualdad $f_n(x) \leqslant f(x)$ (casi en todo punto de E) se deducirá, en virtud del corolario en el teorema antecedente, la igualdad (8.47).

Así pues, para demostrar el teorema, basta establecer la sumabilidad de la función límite $f(x)$ sobre el conjunto E.

Observemos que para cualquier $N > 0$ una sucesión [1] $\{(f_n)_N(x)\}$ converge hacia $(f)_N(x)$ casi en todo punto de E, con la particularidad de que la función acotada $(f)_N(x)$ es sumable en E y la desigualdad $(f_n)_N(x) \leqslant (f)_N(x)$ queda válida para todos los números n y para casi todos los puntos de E.

---

[1] Recordemos que para todo $N > 0$ y para cada función $F(x)$ suponemos $(F)_N(x) = \min\{N, F(x)\}$.

Esto asegura la aplicación a la sucesión $\{(f_n)_N(x)\}$ del corolario del teorema antecedente, en virtud del cual

$$\lim_{n\to\infty} \int_E (f_n)_N(x)\,dx = \int_E (f)_N(x)\,dx.$$

De esta relación y de la desigualdad [1])

$$\int_E f_n(x)\,dx \geqslant \int_E (f_n)_N(x)\,dx$$

concluimos que

$$\lim_{n\to\infty} \int_E f_n(x)\,dx \geqslant \int_E (f)_N(x)\,dx,$$

y, por cuanto $\int_E f_n(x)\,dx \leqslant M$ para todos los números n, resulta que también

$$\int_E (f)_N(x)\,dx \leqslant M. \tag{8.48}$$

De la desigualdad (8.48) y del hecho de que la integral en el primer miembro de esta igualdad no decrece por N se deduce la existencia de un límite

$$\lim_{N\to\infty} \int_E (f)_N(x)\,dx,$$

lo cual significa precisamente que $f(x)$ es sumable sobre el conjunto E. El teorema está demostrado.

Enunciemos, ahora, el teorema 8.20 en términos de una serie funcional (en esta forma el teorema citado es de amplio uso).

Si toda función $u_n(x)$ es no negativa casi en todo punto de E, sumable y medible en dicho conjunto, y si converge una serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \int_E u_n(x)\,dx$$

será convergente casi en todo punto de E la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x), \tag{8.49}$$

[1]) Esta desigualdad proviene de lo que $(f_n)_N(x) = \min\{N, f_n(x)\}$.

con la particularidad de que la suma $S(x)$ de la serie (8.49) *es sumable sobre el conjunto E y satisface la condición*

$$\int_E S(x)\,dx = \sum_{n=1}^{\infty} \int_E u_n(x)\,dx.$$

Teorema 8.21 (teorema de Fatou). *Si una subsucesión de funciones $\{f_n(x)\}$, medibles y sumables sobre el conjunto E, converge en casi todo punto de E hacia una función límite $f(x)$, y si existe una constante A tal que para todos los números n se verifica una desigualdad $\int_E |f_n(x)|\,dx \leqslant A$, la función límite $f(x)$ será sumable sobre el conjunto E y para ella se cumple la desigualdad $\int_E |f(x)|\,dx \leqslant A$.*

DEMOSTRACIÓN. Introduzcamos en el análisis las funciones $g_n(x) = \inf\limits_{k \geqslant n} |f_k(x)|$[1] y notemos que cada función $g_n(x)$ es no negativa y medible [2]) sobre el conjunto E y que la sucesión $\{g_n(x)\}$ no decrece sobre el conjunto E y para casi todos los puntos de E converge hacia $|f(x)|$. Además, en todo punto del conjunto E se cumple, para cualquier número n, una desigualdad

$$g_n(x) \leqslant |f_n(x)|, \tag{8.50}$$

de la cual se deduce (en virtud del criterio mayorante de sumabilidad de una función medible no negativa, véase el fin del p. 4) la sumabilidad de $g_n(x)$ sobre el conjunto E. Aplicando a la sucesión $\{g_n(x)\}$ el teorema 8.20, llegamos a que

$$\lim_{n\to\infty} \int_E g_n(x)\,dx = \int_E |f(x)\,dx. \tag{8.51}$$

Por cuanto para todo número n, en virtud de (8.50), $\int_E g_n(x)\,dx \leqslant$
$\leqslant \int_E |f_n(x)|\,dx \leqslant A$, de (8.51) obtenemos $\int_E |f(x)|\,dx \leqslant A$. El teorema está demostrado.

7. *Clases de Lebesgue* $L^p(E)$. Recordemos que un espacio lineal R se llama *normado*, si se cumplen las siguientes dos exigencias: 1) se conoce una regla, por cuyo intermedio a todo elemento f del espacio R se le pone en correspondencia un número real llamado

---

[1]) Esta notación significa que para todo x el valor de $g_n(x)$ es la cota superior exacta de los valores $|f_n(x)|, |f_{n+1}(x)|, \ldots$

[2]) La mensurabilidad de $g_n(x)$ en E se deduce del teorema 8.12 del párrafo anterior.

norma de dicho elemento y denotado con el símbolo $\| f \|_R$, 2) la citada regla satisface los siguientes tres axiomas:

1°. $\| f \|_R > 0$, si $f \neq 0$ [1]). $\| f \|_R = 0$, si $f = 0$.

2°. $\| \lambda f \|_R = | \lambda | \cdot \| f \|_R$ para todo elemento f y todo número real λ.

3°. Para cualesquiera dos elementos f y g se verifica la así llamada *desigualdad triangular* $\| f + g \|_R \leqslant \| f \|_R + \| g \|_R$.

Examinemos en el espacio normado lineal R una sucesión arbitraria de elementos $\{f_n\}$.

Definición 1. *Una sucesión $\{f_n\}$ de elementos de un espacio normado lineal R se llama fundamental, si*

$$\lim_{\substack{m \geqslant n \\ n \to \infty}} \| f_m - f_n \|_R = 0.$$

Definición 2. *Suele decirse que una sucesión $\{f_n\}$ de elementos de un espacio normado lineal R converge en R hacia un elemento de este espacio f, si*

$$\lim_{n \to \infty} \| f_n - f \|_R = 0.$$

La convergencia de esta índole se denomina también *convergencia en norma*, o *convergencia fuerte* en R.

Es fácil demostrar que *toda sucesión de elementos $\{f_n\}$ convergente en R es siempre fundamental*. En efecto, si existe un elemento f tal que $\| f_n - f \|_R \to 0$ para $n \to \infty$, de la desigualdad triangular

$$\| f_m - f_n \|_R \leqslant \| f_m - f \|_R + \| f - f_n \|_R$$

se deduce inmediatamente que

$$\lim_{\substack{m \geqslant n \\ n \to \infty}} \| f_m - f_n \|_R = 0.$$

Surge, naturalmente, una cuestión de si es convergente en R hacia cierto elemento f del espacio R toda sucesión fundamental de elementos $\{f_n\}$.

Definición 3. *Un espacio normado lineal R se llama completo, si toda sucesión fundamental de elementos $\{f_n\}$ del espacio R converge en R hacia cierto elemento f de este espacio.*

En este punto analicemos una clase importante de espacios normados lineales introducidos por Lebesgue y demostremos la completitud de estos espacios.

Supongamos que un número real p satisface la condición de que $p \geqslant 1$.

[1]) 0 significa elemento nulo del espacio lineal R.

Definición 4. *Diremos que una función $f(x)$ pertenece a la clase (o espacio) $L^p(E)$, si la función $f(x)$ es medible sobre el conjunto E, y la función $|f(x)|^p$, sumable en dicho conjunto* [1].

Es fácil convencerse de que la clase $L^p(E)$ es, para $p \geqslant 1$ cualquiera, un espacio normado lineal, si introducimos en él una norma con ayuda de la relación

$$\|f\|_{L^p(E)} = \|f\|_p = \left(\int_E |f(x)|^p \, dx \right)^{1/p}.$$

La linealidad de tal espacio es obvia. No es difícil comprobar la validez de los axiomas 1°—3° de la definición de espacio normado. El axioma 1° se deduce inmediatamente de la hipótesis de equivalencia a cero de la función sumable (véase el fin del p. 4). El axioma 2° es perfectamente evidente. El axioma 3° es evidente para $p = 1$, y, cuando $p > 1$, proviene de la desigualdad de Minkowski establecida en el complemento al capítulo 1, v. II [2]):

$$\left(\int_E |f(x)+g(x)|^p \, dx \right)^{1/p} \leqslant \left(\int_E |f(x)|^p \, dx \right)^{1/p} + \left(\int_E |g(x)|^p \, dx \right)^{1/p}.$$

Demostremos, ahora, el siguiente teorema *fundamental* [3]).

Teorema 8.22. *Para todo* $p \geqslant 1$ *el espacio* $L^p(E)$ *es completo.*

DEMOSTRACIÓN. Sea $\{f_n(x)\}$ una sucesión fundamental arbitraria de elementos del espacio $L^p(E)$. Pongamos

$$\varepsilon_n = \sup_{m \geqslant n} \|f_m - f_n\|_p$$

(la cota superior exacta de la magnitud $\|f_m - f_n\|_p$ se toma por el conjunto de todos los m que satisfacen la desigualdad $m \geqslant n$). Por ser $\{f_n\}$ una sucesión fundamental, resulta que $\varepsilon_n \to 0$, cuando $n \to \infty$. De aquí se deduce que puede elegirse una subsucesión n_k $(k = 1, 2, \ldots)$ tal que sea convergente una serie [4])

$$\sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon_{n_k}. \tag{8.52}$$

---

[1]) No se distinguirán en este caso funciones equivalentes sobre el conjunto E, considerándolas como un solo elemento de $L^p(E)$.

[2]) En el complemento aducido la desigualdad de Minkowski se establece para el caso de la integral de Riemann. Al tratar la integral de Lebesgue, basta establecer esta desigualdad sólo para las funciones acotadas $f(x)$ y $g(x)$, lo que se hace según el mismo esquema que se aplicó en el caso de la integral de Riemann (es suficiente examinar *la partición lebesguiana* del conjunto E).

[3]) En una forma especial (referente al así llamado sistema trigonométrico) este teorema fue demostrado en 1907 por Riezs e (independientemente de Riezs) por Fisher. En 1909 Hermann Weyl estableció que la conexión con el sistema trigonométrico no era esencial y dio la formulación más general (para $p = 2$) que aquí presentamos.

[4]) Basta tomar tal n_k que se verifique la desigualdad $\varepsilon_{n_k} \leqslant 2^{-k}$.

De la desigualdad de Hölder [1]) establecida en el complemento 1 del cap. 1, v. II, tenemos

$$\int_E |f(x)\cdot g(x)|\,dx \leqslant \left(\int_E |f(x)|^p\,dx\right)^{1/p}\cdot\left(\int_E |g(x)|^q\,dx\right)^{1/q}$$

$\left(p>1,\ q=\frac{p}{p-1}\right)$, se deduce que, cuando $p>1$, resulta

$$\int_E |f_{n_{k+1}}(x)-f_{n_k}(x)|\,dx \leqslant \|f_{n_{k+1}}(x)-$$

$$-f_{n_k}(x)\|_p\cdot\left(\int_E 1^q\,dx\right)^{1/q} \leqslant \varepsilon_{n_k}\cdot|E|^{\frac{p-1}{p}}.$$

De la última desigualdad y de lo que la serie (8.52) es convergente se deduce la convergencia de la serie [2])

$$\sum_{k=1}^{\infty}\int_E |f_{n_{k+1}}(x)-f_{n_k}(x)|\,dx. \tag{8.53}$$

Teniendo presentes la convergencia de la serie (8.53) y el teorema 8.20 (véase la formulación de este teorema en términos de una serie), concluimos que casi en todo punto de E converge una serie

$$\sum_{k=1}^{\infty} |f_{n_{k+1}}(x)-f_{n_k}(x)|,$$

y, por consiguiente, también una serie

$$f_{n_1}(x)+\sum_{k=1}^{\infty}[f_{n_{k+1}}(x)-f_{n_k}(x)].$$

Pero, esto es testimonio de que la k-ésima suma parcial de la serie citada, que es igual a $f_{n_{k+1}}(x)$, converge casi en todo punto de E hacia cierta función $f(x)$. Ahora, por cuanto $\|f_m(x)-f_{n_k}(x)\|_p\leqslant \leqslant\varepsilon_m$ para cualquier número m y cualquier $n_k\geqslant m$, y puesto que, para $k\to\infty$, $[f_m(x)-f_{n_k}(x)]\to[f_m(x)-f(x)]$ casi en todo punto de E, entonces, de acuerdo con el teorema de Fatou 8.21, $\|f_m(x)-f(x)\|_p\leqslant\varepsilon_m$ (para cualquier número m), y esto significa que la sucesión $\{f_m(x)\}$ converge en $L^p(E)$ hacia $f(x)$. El teorema está demostrado.

[1]) En el complemento aducido la desigualdad de Hölder se establece para la integral de Riemann. Al tratar la integral de Lebesgue, basta establecer esta desigualdad sólo para las funciones acotadas $f(x)$ y $g(x)$, lo que se hace según el mismo esquema que se aplicó para la integral de Riemann (es suficiente examinar la *partición lebesguiana* del conjunto E).

[2]) Cuando $p=1$, no se debe aplicar la desigualdad de Hölder, pues la serie (8.53) coincide con la (8.52).

8. Observaciones conclusivas. El punto central de la teoría de Lebesgue consiste en su *carácter cerrado respecto de la operación de paso límite* tanto en la teoría de los conjuntos medibles (teoremas 8.3 y 8.8), como en la de funciones medibles (teorema 8.13) y, también, de la teoría de integral (teorema 8.22).

Toda la exposición se realizaba para el caso de una sola variable. En el caso de n variables, el esquema de construcción de la teoría queda el mismo, mas por un conjunto de partida (principal) debe tomarse, el lugar del intervalo (a, b), un paralelepípedo n-dimensional abierto $\prod_{k=1}^{n} (a_k < x_k < b_k)$ (para los números a_k se admiten valores $-\infty$, y para los números b_k, valores $+\infty$). En el caso n-dimensional de momento cualitativamente nuevo de la teoría sirve el así llamado teorema de Fubini sobre la reducción de una integral de Lebesgue n-múltiple a una integral reiterada de multiplicidad menor. No nos detendremos aquí en este teorema.

Complemento 1 al capítulo 8

CONDICIÓN NECESARIA Y SUFICIENTE DE INTEGRABILIDAD SEGÚN RIEMANN

Sin perder la generalidad de nuestros razonamientos, examinemos las funciones definidas sobre el segmento $[0, 1]$. Para cada función $f(x)$ de esta índole introduzcamos las así llamadas *funciones de Baire* $m(x)$ y $M(x)$, que en cada punto x representan límites superior e inferior, respectivamente, en este punto de la función en consideración $f(x)$ [1]. Así pues, por definición

$$m(x) = \underline{\lim}_{y\to x} f(y), \quad M(x) = \overline{\lim}_{y\to x} f(y).$$

Observemos que las funciones de Baire pueden definirse también de un modo diferente:

$$m(x) = \lim_{\delta\to 0+0} \left[\inf_{v_\delta(x)} f(y)\right], \quad M(x) = \lim_{\delta\to 0+0} \left[\sup_{v_\delta(x)} f(y)\right],$$

donde $v_\delta(x)$ es un δ-entorno del punto x (en el caso de que x sea un punto límite de $[0, 1]$, se deben tomar en lugar de δ-entornos los δ-semientornos del punto x, derecho o izquierdo, respectivamente).

Evidentemente, *la función $f(x)$ es continua en el punto x_0 cuando, y sólo cuando*, $f(x_0) = m(x_0) = M(x_0)$.

Teorema 8.23. *Para que una función $f(x)$ acotada sobre el segmento* $[0, 1]$

[1]) En el caso en que dentro de un entorno arbitrariamente pequeño del punto x la función $f(x)$ no sea acotada inferiormente (superiormente), suponemos que el límite inferior (superior) de $f(x)$ en este punto es igual a $-\infty$ $(+\infty)$.

sea integrable según Riemann en dicho segmento, es necesario y suficiente que dicha función sea continua casi en todo punto de [0, 1].

DEMOSTRACIÓN. Dividamos un segmento [0, 1], para cualquier número n, en 2^n intervalos $\Delta_k^{(n)} = \left(\frac{k-1}{2^n}, \frac{k}{2^n}\right)$ $(k = 1, 2, 3, \ldots, 2^n)$ e introduzcamos en el análisis con funciones escalonadas $\varphi_n(x)$ y $\Phi_n(x)$, suponiendo que en cada intervalo $\Delta_k^{(n)}$ las funciones $\varphi_n(x)$ y $\Phi_n(x)$ son iguales a $\inf\limits_{\Delta_k^{(n)}} f(y)$ y a $\sup\limits_{\Delta_k^{(n)}} f(y)$, respectivamente, y en los puntos $k/2^n$ $(k = 0, 1, \ldots, 2^n)$ ambas funciones $\varphi_n(x)$ y $\Phi_n(x)$ son nulas. Entonces, al tomar una sucesión de intervalos $\Delta_k^{(n)}$ que se encoge hacia x, obtendremos, para cada punto $x \neq k/2^n$:

$$\lim_{n\to\infty} \varphi_n(x) = m(x), \qquad \lim_{n\to\infty} \Phi_n(x) = M(x). \tag{8.54}$$

De este modo, la convergencia (8.54) tiene lugar *casi en todo punto* del segmento [0, 1]. Por cuanto las funciones escalonadas $\varphi_n(x)$ y $\Phi_n(x)$ son a ciencia cierta medibles en [0, 1], de (8.54) y del teorema 8.13 se deduce que también son medibles en [0, 1] las funciones de Baire $m(x)$ y $M(x)$.

De (8.54) resulta que casi en todo punto sobre [0, 1]

$$\lim_{n\to\infty} [\Phi_n(x) - \varphi_n(x)] = M(x) - m(x).$$

De la última relación se deduce, en virtud del corolario en el teorema 8.19, que[1]

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 [\Phi_n(x) - \varphi_n(x)]\, dx = \int_0^1 [M(x) - m(x)]\, dx. \tag{8.55}$$

Resta por notar que

$$\int_0^1 \Phi_n(x)\, dx = S_n, \qquad \int_0^1 \varphi_n(x)\, dx = s_n. \tag{8.56}$$

donde S_n y s_n son sumas superior e inferior de Darboux, respectivamente, correspondientes a la partición $\{\Delta_k^{(n)}\}$ $(k = 1, 2, 3, \ldots, 2^n)$.

De (8.55) y (8.56) se deduce que

$$\lim_{n\to\infty} (S_n - s_n) = \int_0^1 [M(x) - m(x)]\, dx,$$

de modo que (en virtud del cap 1, v. II) la condición necesaria y suficiente de integrabilidad según Riemann se reduce a una igualdad $\int_0^1 [M(x) - m(x)]\, dx = 0$. Pero, la última igualdad significa (en vista de que una función no negativa medible y sumable es equivalente a cero (véase p. 4, § 4)) que $M(x) - m(x) = 0$ casi en todo punto sobre [0, 1]. El teorema queda demostrado.

[1] En adelante, todas las integrales en el Complemento 1 se entienden en el sentido de Lebesgue.

Complemento 2 al capítulo 8

CONDICIÓN NECESARIA Y SUFICIENTE DE INTEGRABILIDAD DE UNA FUNCIÓN ACOTADA SEGÚN LEBESGUE

Teorema 8.24. *Para que una función $f(x)$ acotada sobre un conjunto medible E sea integrable en dicho conjunto según Lebesgue, es necesario y suficiente que esta función sea medible en el conjunto P.*

DEMOSTRACIÓN. La demostración de la suficiencia constituye el contenido del teorema 8.16, por lo cual es necesario sólo demostrar la necesidad.

Sea una función $f(x)$ acotada e integrable según Lebesgue sobre el conjunto medible E. Esto quiere decir que las integrales de Lebesgue superior e inferior de esta función son iguales y, por consiguiente, existe una sucesión de particiones $T_n = \{E_k^{(n)}\}$ del conjunto E de tal índole que las correspondientes sucesiones de sumas superiores $\{S_n\}$ y de sumas inferiores $\{s_n\}$ satisfacen la condición $S_n - s_n < 1/n$, con la particularidad de que cada partición sucesiva $T_n = \{E_k^{(n)}\}$ es un refino de la partición antecedente $T_{n-1} = \{E_k^{(n-1)}\}$. (Con el fin de construir tal sucesión, es suficiente tomar, por donde sea necesario, el producto de particiones introducidas).

Recordemos que, por definición,

$$S_n = \sum_k M_k^{(n)} \cdot |E_k^{(n)}|, \quad s_n = \sum_k m_k^{(n)} \cdot |E_k^{(n)}|,$$

donde $M_k^{(n)}$ y $m_k^{(n)}$ son las cotas superior exacta e inferior exacta, respectivamente, de la función $f(x)$ sobre el conjunto $E_k^{(n)}$.

Definamos dos sucesiones de funciones $\{\overline{f_n}(x)\}$ y $\{\underline{f_n}(x)\}$, al hacer la función $\overline{f_n}(x)$ igual a $M_k^{(n)}$ sobre el conjunto $E_k^{(n)}$, y la función $\underline{f_n}(x)$, igual a $m_k^{(n)}$ sobre el conjunto $E_k^{(n)}$.

Es evidente que para todo número n ambas funciones $\overline{f_n}(x)$ y $\underline{f_n}(x)$ son medibles sobre el conjunto E (ya que dichas funciones representan combinaciones lineales de las funciones características de los conjuntos medibles $E_k^{(n)}$).

Además, evidentemente, la sucesión $\{\overline{f_n}(x)\}$ no es creciente, y la sucesión $\{\underline{f_n}(x)\}$ no decrece sobre el conjunto E, con la particularidad de que en cada punto del conjunto E se cumplen las desigualdades

$$\underline{f_n}(x) \leqslant f(x) \leqslant \overline{f_n}(x), \tag{8.57}$$

cualquiera que sea n.

Pongamos $\overline{f}(x) = \lim\limits_{n\to\infty} \overline{f_n}(x)$, $\underline{f}(x) = \lim\limits_{n\to\infty} \underline{f_n}(x)$. De (8.57) concluimos que en cada punto x

$$\underline{f}(x) \leqslant f(x) \leqslant \overline{f}(x), \tag{8.58}$$

y, además, las funciones $\overline{f}(x)$ y $\underline{f}(x)$ son medibles sobre el conjunto E en virtud del teorema 8.13.

Del teorema de B. Levi 8.20 obtenemos

$$\lim_{n\to\infty} \int_E [\overline{f_n}(x) - \underline{f_n}(x)]\, dx = \int_E [\overline{f}(x) - \underline{f}(x)]\, dx. \tag{8.59}$$

De la definición de las funciones $\overline{f}_n(x)$ y $\underline{f}_n(x)$ se deduce que $\int_E [\overline{f}_n(x) - \underline{f}_n(x)]\,dx = S_n - s_n$, con la particularidad de que, por construcción $\lim_{n\to\infty} (S_n - s_n) = 0$. En virtud de (8.59), esto nos lleva a una igualdad $\int_E [\overline{f}(x) - \underline{f}(x)]\,dx = 0$.

Partiendo de la última igualdad y del hecho de que la función $[\overline{f}(x) - \underline{f}(x)]$ es, en virtud del p. 4, § 4, negativa, obtenemos que $\overline{f}(x) - \underline{f}(x) = 0$ casi en todo punto sobre E. Por consiguiente, en virtud de (8.58), $\underline{f}(x) = f(x) = \overline{f}(x)$ casi en todo punto sobre E, y, por cuanto las funciones $\underline{f}(x)$ y $\overline{f}(x)$ son medibles en E, entonces, de acuerdo con la propiedad 4° del p. 2, § 3, $f(x)$ será también medible sobre el conjunto E. El teorema está demostrado.

Capítulo 9

INTEGRALES DEPENDIENTES DE LOS PARÁMETROS

Estudiemos en este capítulo una clase especial de funciones que se caracteriza por la denominación general «integrales dependientes de un parámetro». La idea de estas funciones puede obtenerse, si integramos respecto de x, con cada y fijo, una función de dos variables x e y. Como resultado, se obtendrá, evidentemente, una función dependiente del parámetro y.

Surgen, naturalmente, las cuestiones acerca de la continuidad, integrabilidad y diferenciabilidad de tales funciones. Todos estos problemas se estudiarán en el presente capítulo.

Está perfectamente claro que la integración respecto del argumento x no ha de ser forzosamente propia: si un dominio en el que viene dada la función $f(x, y)$ es una franja infinita $\Pi = \{a \leqslant x < \infty, c \leqslant y \leqslant d\}$, la integración respecto de x, con y fijo, se realizará en una semirrecta, razón por la cual la integral correspondiente respecto de la variable x será impropia. De este modo, surge una noción de integrales impropias dependientes de un parámetro. Las propiedades de tales integrales también se estudiarán en este capítulo.

Subrayemos que se tratarán aquí sólo las funciones integrables según Riemann (no según Lebesgue) y todas las integrales, sean propias o impropias, se entienden en el sentido de Riemann.

§ 1. Integrales propias dependientes de un parámetro

1. Concepto de integral dependiente de un parámetro. Supongamos que en un rectángulo $\Pi = \{a \leqslant x \leqslant b, c \leqslant y \leqslant d\}$ viene definida una función $f(x, y)$ integrable respecto de x sobre el segmento $a \leqslant x \leqslant b$ para cualquier y fijo del segmento $c \leqslant y \leqslant d$. En este caso sobre el segmento $c \leqslant y \leqslant d$ queda definida una función

$$I(y) = \int_a^b f(x, y)\, dx, \qquad (9.1)$$

llamada *integral dependiente del parámetro* y. La función $f(x, y)$ puede definirse también sobre un conjunto de forma más general. Por ejemplo, como dominio de definición de $f(x, y)$ puede servir el siguiente conjunto $D = \{a(y) \leqslant x \leqslant b(y), c \leqslant y \leqslant d\}$. En este caso sobre el segmento $[c, d]$ está definida una función de y con ayuda de la relación (9.1), pero los límites de integración a y b dependen

de y. Estudiemos, primero, un caso en que los límites de integración son constantes.

2. Propiedades de continuidad, integrabilidad y diferenciabilidad de las integrales dependientes de un parámetro. Los teoremas que siguen abajo dan respuesta a las cuestiones citadas. En estos teoremas se denotará con el símbolo Π un rectángulo $\{a \leqslant x \leqslant b,\ c \leqslant y \leqslant d\}$.

Teorema 9.1. *Si una función $f(x, y)$ es continua en el rectángulo Π, la función $I(y)$, definida mediante la relación* (9.1), *será continua sobre el segmento $[c, d]$.*

DEMOSTRACIÓN. De la fórmula (9.1) se deduce que un incremento $\Delta I = I(y + \Delta y) - I(y)$ de la función $I(y)$ es igual a

$$\Delta I = \int_a^b [f(x, y + \Delta y) - f(x, y)]\, dx. \tag{9.2}$$

Como que, de acuerdo con el teorema de Cantor, la función $f(x, y)$ es uniformemente continua en el rectángulo Π, según $\varepsilon > 0$ dado puede indicarse tal $\delta > 0$ que para todo x de $[a, b]$ y todos los y y $(y + \Delta y)$ de $[c, d]$ de tal índole que $|\Delta y| < \delta$, se verifique la desigualdad $|f(x, y + \Delta y) - f(x, y)| < \frac{\varepsilon}{b-a}$. Mas, en este caso, de la relación (9.2) se deduce que cuando $|\Delta y| < \delta$, se cumple la desigualdad $|\Delta I| < \varepsilon$, la cual significa la continuidad de la función $I(y)$ en cada punto y del segmento $[c, d]$. El teorema esta demostrado.

Teorema 9.2. *Si una función $f(x, y)$ es continua en el rectángulo Π, la función $I(y)$ será integrable sobre el segmento $[c, d]$. Además, es válida la fórmula*

$$\int_c^d I(y)\, dy = \int_c^d \left[\int_a^b f(x, y)\, dx\right] dy = \int_a^b dx \int_c^d f(x, y)\, dy. \tag{9.3}$$

Dicho de otro modo, en las condiciones del teorema, *la integral dependiente de un parámetro puede integrarse respecto del parámetro bajo el signo de integral.*

DEMOSTRACIÓN. De conformidad con el teorema 9.1, una función $I(y)$ es continua sobre el segmento $[c, d]$ y, por eso, integrable en el mismo. La validez de la fórmula (9.3) proviene de la igualdad de las integrales reiteradas que figuran en la relación (9.3) (estas integrales son iguales a la integral doble $\iint_{\Pi} f(x, y)\, dx\, dy$). El teorema está demostrado.

OBSERVACIÓN. En la relación (9.3) podemos poner cualquier número del segmento $[c, d]$ en lugar del límite superior d de integración respecto de y.

Teorema 9.3. *Si una función $f(x, y)$ y su derivada parcial $\frac{\partial f}{\partial y}$ son continuas en el rectángulo* Π, *la función $I(y)$ es diferenciable sobre el segmento $[c, d]$ y la derivada suya $\frac{\partial I}{\partial y}$ puede hallarse según la fórmula*

$$\frac{dI}{dy} = \int_a^b \frac{\partial f(x, y)}{\partial y}\, dx. \tag{9.4}$$

De otras palabras, en las condiciones del teorema, *la integral dependiente de un parámetro puede diferenciarse respecto del parámetro bajo el signo de integral.*

DEMOSTRACIÓN. Veamos la siguiente función auxiliar

$$g(y) = \int_a^b \frac{\partial f(x, y)}{\partial y}\, dx. \tag{9.5}$$

Por cuanto $\frac{\partial f}{\partial y}$ es continua en el rectángulo Π, entonces, de acuerdo con el teorema 9.1, la función $g(y)$ es continua sobre el segmento $[c, d]$ y la integral de esta función extendida al segmento $[c, y]$ puede hallarse según la fórmula de integración bajo el signo de integral. De conformidad con la observación al teorema 9.2, obtenemos

$$\int_c^y g(t)\, dt = \int_a^b dx \int_c^y \frac{\partial f(x, t)}{\partial t}\, dt = \int_a^b f(x, y)\, dx - \int_a^b f(x, c)\, dx. \tag{9.6}$$

Por cuanto $\int_a^b f(x, y)\, dx = I(y)$, y $\int_a^b f(x, c)\, dx = I(c)$, de la relación (9.6) obtenemos la siguiente expresión para $I(y)$:

$$I(y) = \int_c^y g(t)\, dt + I(c). \tag{9.7}$$

Como se sabe, la derivada de una integral con límite superior variable de una función continua $g(t)$ existe y es igual al valor de esta función en el punto y. Por eso, la función $I(y)$ es diferenciable y su derivada $\frac{\partial I}{\partial y}$ es igual a $g(y)$. Recurriendo a la fórmula (9.5) para $g(y)$, nos convencemos de que la relación (9.4) es válida. El teorema queda demostrado.

3. Caso en que los límites de integración dependen de un parámetro. Ya se ha dicho que puede haber un caso en que los límites de integración dependen de un parámetro. Convengamos en considerar que la función $f(x, y)$ viene dada en el rectángulo Π, el cual incluye un

dominio D definido mediante las relaciones $\{a(y) \leqslant x \leqslant b(y), c \leqslant y \leqslant d\}$ (fig. 9.1). Si, para cualquier y fijo del segmento $[c, d]$, la función $f(x, y)$ es integrable respecto de x sobre el segmento $[a(y)], [b(y)]$, entonces, obviamente, en el segmento $[c, d]$ queda definida la siguiente función:

$$I(y) = \int_{a(y)}^{b(y)} f(x, y)\,dx \quad (9.8)$$

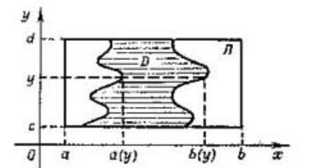


Fig. 9.1.

que representa *una integral dependiente del parámetro y cuyos límites de integración también dependen del parámetro*.

Analicemos la continuidad y diferenciabilidad respecto del parámetro de tales integrales. Los siguientes teoremas dan respuesta a las preguntas citadas.

Teorema 9.4. *Sea $f(x, y)$ una función continua en el rectángulo Π, y sean $a(y)$ y $b(y)$ funciones continuas sobre el segmento $[c, d]$. Entonces, la función $I(y)$ definida mediante la relación (9.8) es continua en el segmento $[c, d]$.*

DEMOSTRACIÓN. Fijemos un y_0 arbitrario del segmento $[c, d]$, y representemos $I(y)$ en la siguiente forma:

$$I(y) = \int_{a(y_0)}^{b(y_0)} f(x, y)\,dx + \int_{b(y_0)}^{b(y)} f(x, y)\,dx - \int_{a(y_0)}^{a(y)} f(x, y)\,dx. \quad (9.9)$$

Por cuanto la primera integral en el miembro derecho de (9.9) depende del parámetro y tiene límites constantes de integración, siendo continua su función subintegral, dicha integral será, en virtud del teorema 9.1, una función continua de y, por lo cual tiende a $I(y_0)$ cuando $y \to y_0$. Para otras dos integrales obtenemos las siguientes estimaciones:

$$\left| \int_{b(y_0)}^{b(y)} f(x, y)\,dx \right| \leqslant M\,|b(y) - b(y_0)|,$$

$$\left| \int_{a(y_0)}^{a(y)} f(x, y)\,dx \right| \leqslant M\,|a(y) - a(y_0)|,$$

donde $M = \sup\limits_{\Pi} |f(x, y)|$. De las últimas desigualdades y de la continuidad de las funciones $a(y)$ y $b(y)$ proviene que para $y \to y_0$ ambas últimas integrales en el segundo miembro de (9.9) tienden a cero. De este modo, el límite del segundo miembro de (9.9) existe cuando $y \to y_0$, y es igual a $I(y_0)$.

Así pues, la función $I(y)$ es continua en todo punto y_0 del segmento $[c, d]$, es decir, continua sobre dicho segmento. El teorema queda demostrado.

Demostremos el teorema sobre la diferenciabilidad de la integral $I(y)$ respecto del parámetro.

Teorema 9.5. *Supongamos que una función $f(x, y)$ y su derivada $\frac{\partial f}{\partial y}$ son continuas en el rectángulo Π. Supongamos, además, que las funciones $a(y)$ y $b(y)$ son diferenciables sobre el segmento $[c, d]$. Entonces, la función $I(y)$, definida por la relación (9.8), es diferenciable sobre el segmento $[c, d]$ y su derivada $I'(y)$ puede calcularse según la fórmula*

$$I'(y) = \int_{a(y)}^{b(y)} \frac{\partial f}{\partial y}\, dx + b'(y) f(b(y), y) - a'(y) f(a(y), y). \tag{9.10}$$

DEMOSTRACION. Fijemos arbitrariamente y_0 del segmento $[c, d]$ y representemos $I(y)$ en la forma (9.9). La primera integral en el miembro derecho de (9.9) es una integral que depende del parámetro y que tiene límites constantes de integración. Ya que, por hipótesis, $f(x, y)$ y $\frac{\partial f}{\partial y}$ son continuas en Π, entonces, de conformidad con el teorema 9.3, el primer sumando representa una función diferenciable en el punto y_0, y la derivada de la citada función en este punto será igual a $\int_{a(y_0)}^{b(y_0)} \frac{\partial f(x, y_0)}{\partial y}\, \partial x$. Mostremos que el segundo sumando en el miembro derecho de (9.9) tiene derivada en el punto y_0. Por cuanto este segundo sumando se anula para $y = y_0$, basta convencerse de que existe un límite

$$\lim_{y \to y_0} \frac{\int_{b(y_0)}^{b(y)} f(x, y)\, dx}{y - y_0}, \tag{9.11}$$

que, por definición, es precisamente igual a la derivada buscada.

Transformemos la integral en el numerador de la fórmula (9.11). Según la fórmula del valor medio tenemos

$$\int_{b(y_0)}^{b(y)} f(x, y)\, dx = f(\overline{x}, y)(b(y) - b(y_0)), \tag{9.12}$$

donde $\overline{x}$ está encerrado entre $b(y_0)$ y $b(y)$. Al sustituir la expresión para la integral de la fórmula (9.12) en el numerador de la expresión (9.11), teniendo presente que, en virtud de la continuidad, $f(\overline{x}, y) \to f(b(y_0), y_0)$ cuando $y \to y_0$, y que $\frac{b(y) - b(y_0)}{y - y_0} \to b'(y_0)$ cuando $y \to y_0$, nos convencemos de que el límite (9.11) que nos

interesa existe y es igual a $b'(y_0) f(b(y_0), y_0)$. Razonando de un modo sumamente igual, nos convencemos de que el tercer sumando en el miembro derecho de (9.9) también tiene derivada en el punto y_0 que es igual a $a'(y_0) f(a(y_0), y_0)$.

Así pues, se ha demostrado que la función $I(y)$ es diferenciable en un punto arbitrario y_0 del segmento $[c, d]$ y su derivada $I'(y_0)$ puede calcularse según la fórmula (9.10). El teorema está demostrado.

OBSERVACIÓN. Los teoremas 9.4 y 9.5 son lícitos también para un caso en que la función $f(x, y)$ viene dada sólo en un dominio D y satisface en éste las mismas exigencias que en el rectángulo Π.

§ 2. Integrales impropias dependientes de un parámetro

1. Concepto de integral impropia de primera especie dependiente de un parámetro. Concepto de convergencia uniforme de la integral impropia dependiente de un parámetro. Denotemos con el símbolo Π_∞ una semifranja $\{a \leqslant x < \infty, c \leqslant y \leqslant d\}$.

Supongamos que en la semifranja Π_∞ está dada una función $f(x, y)$ integrable respecto de x en el sentido impropio sobre la semirrecta $a \leqslant x < \infty$ para cualquier y fijo del segmento $[c, d]$. En estas condiciones sobre el segmento $[c, d]$ queda definida una función

$$I(y) = \int_a^\infty f(x, y)\, dx, \tag{9.13}$$

llamada *integral imporia de primera especie dependiente del parámetro y*. Suele decirse en este caso que la integral (9.13) converge sobre el segmento $[c, d]$.

En la teoría de integrales impropias dependientes de un parámetro desempeña un papel importante el concepto de *convergencia uniforme*. Enunciemos este concepto.

Definición. *Una integral impropia* (9.13) *se llama uniformemente convergente respecto del parámetro y sobre el segmento* $[c, d]$, *si converge en dicho segmento y si para todo* $\varepsilon > 0$ *puede indicarse tal número* $A \geqslant a$, *dependiente sólo de* ε, *que se verifique la desigualdad*

$$\left| \int_R^\infty f(x, y)\, dx \right| < \varepsilon, \tag{9.14}$$

cualesquiera que sean $R \geqslant A$ *e y del segmento* $[c, d]$.

Formulemos el criterio de Cauchy de convergencia uniforme de las integrales impropias dependientes de un parámetro.

Teorema 9.6. *Para que la integral impropia* (9.13) *sea uniformemente convergente respecto del parámetro y sobre el segmento* $[c, d]$,

es necesario y suficiente que para todo $\varepsilon > 0$ pueda indicarse un número $A \geqslant a$ que dependa sólo de ε y sea de tal índole que se verifique la desigualdad

$$\left| \int_{R'}^{R''} f(x, y)\, dx \right| < \varepsilon,$$

cualesquiera que sean R' y R'', superiores a A, e y del segmento $[c, d]$.

La validez de este criterio se desprende directamente de la definición de convergencia uniforme.

Para las aplicaciones resulta conveniente dar a conocer una serie de criterios suficientes de convergencia uniforme de las integrales impropias dependientes de un parámetro.

Teorema 9.7 (criterio de Weierstrass). *Supongamos que una función $f(x, y)$ está definida en una semifranja Π_∞, y que para todo y del segmento $[c, d]$ ella es integrable respecto de x sobre cualquier segmento $[a, R]$. Además, supongamos que para todos los puntos de la franja Π_∞ se cumple una desigualdad*

$$|f(x, y)| \leqslant g(x). \tag{9.15}$$

Entonces, de la convergencia de la integral $\int_a^\infty g(x)\, dx$ se deduce la convergencia uniforme respecto de y sobre el segmento $[c, d]$ de la integral (9.13).

DEMOSTRACIÓN. En virtud del criterio de Cauchy para la convergencia de una integral de la función $g(x)$ (véase el teorema 3.1), puede indicarse, para todo $\varepsilon > 0$, tal $A \geqslant a$ que se verifique la desigualdad

$$\int_{R'}^{R''} g(x)\, dx < \varepsilon,$$

cualesquiera que sean $R'' > R' \geqslant A$.

Aplicando la desigualdad (9.15), obtenemos

$$\left| \int_{R'}^{R''} f(x, y)\, dx \right| \leqslant \int_{R'}^{R''} g(x)\, dx < \varepsilon$$

para todo y del segmento $[c, d]$.

Esto es precisamente un testimonio de que el criterio de Cauchy de convergencia uniforme de la integral (9.13) se cumple.

Corolario. *Supongamos que una función $\varphi(x, y)$, definida en la semifranja Π_∞, es acotada sobre la misma e integrable respecto de x en cualquier segmento $[a, R]$ para cada $y \in [c, d]$. Entonces, si con-*

verge una integral

$$\int_a^{\infty} |h(x)|\, dx,$$

será uniformemente convergente respecto de y sobre el segmento $[c, d]$ *la integral* $\int_a^{\infty} \varphi(x, y)\, h(x)\, dx$.

Para demostrar, resulta suficiente poner en el teorema 9.7: $f(x, y) = \varphi(x, y)\, h(x)$, $g(x) = M\,|h(x)|$, donde $M = \sup\limits_{\Pi_\infty} |\varphi(x, y)|$.

Notemos que el criterio de Weierstrass es criterio suficiente de convergencia uniforme de las integrales impropias, dependientes de un parámetro, que garantiza la convergencia absoluta. Por analogía con lo que se ha hecho al demostrar el teorema 3.4 podemos establecer el siguiente criterio suficiente de convergencia uniforme que es aplicable a las integrales convergentes condicionalmente. Es válida la siguiente *afirmación* (*criterio de Dirichlet—Abel*).

Sea una función $f(x, y)$ *definida en la semifranja* Π_∞ *que es integrable, para cada* $y \in [c, d]$, *respecto de* x *sobre cualquier segmento* $[a, R]$ *y con cierta constante* $M > 0$ *satisface la condición*

$$\left| \int_a^{x} f(t, y)\, dt \right| \leqslant M.$$

Supongamos, además, que una función $g(x)$, *definida para* $x \geqslant a$, *tiende a cero cuando* $x \to +\infty$ *sin crecer monótonamente. Entonces, una integral impropia*

$$\int_a^{\infty} f(x, y)\, g(x)\, dx$$

es uniformemente convergente respecto de y sobre el segmento $[c, d]$.

El criterio de convergencia uniforme que sigue abajo se refiere a las integrales de las funciones no negativas.

***Teorema 9.8* (*criterio de Dini*).** *Supongamos que una función* $f(x, y)$ *es continua y no negativa en la semifranja* Π_∞ *y que para cada* $y \in [c, d]$ *converge la integral impropia*

$$I(y) = \int_a^{\infty} f(x, y)\, dx. \tag{9.13}$$

Supongamos ahora que la función $I(y)$ *es continua sobre el segmento* $[c, d]$. *Entonces, la integral* (9.13) *es uniformemente convergente respecto de y sobre dicho segmento.*

DEMOSTRACIÓN Veamos una sucesión de funciones

$$I_n(y) = \int_a^{a+n} f(x, y)\, dx,$$

cada una de las cuales es continua sobre el segmento $[c, d]$ en virtud del teorema 9.1. Por cuanto la función subintegral $f(x, y)$ es no negativa, entonces $I_n(y)$ converge sobre el segmento $[c, d]$ hacia la función continua $I(y)$ sin decrecer monótonamente. Por consiguiente, de acuerdo con el teorema 1.5 (criterio de Dini para las sucesiones funcionales la sucesión $I_n(y)$ converge uniformemente sobre $[c, d]$ hacia $I(y)$. Esto quiere decir que para todo $\varepsilon > 0$ existe un número N tal que

$$I(y) - I_N(y) = \int_{a+N}^{\infty} f(x, y)\, dx < \varepsilon$$

simultáneamente para todos los y del segmento $[c, d]$. De lo que $f(x, y)$ es no negativa se deduce que para todo $R \geqslant N + a$ y todo $y \in [c, d]$

$$0 \leqslant \int_R^{\infty} f(x, y)\, dx < \varepsilon.$$

Esto es precisamente un indicio de que la integral (9.13) es uniformemente convergente. El teorema está demostrado.

2. Propiedades de continuidad, integrabilidad y diferenciabilidad de las integrales impropias dependientes de un parámetro. Son válidos los siguientes dos teoremas.

Teorema 9.9 *Supongamos que una función $f(x, y)$ es continua en la semifranja Π_∞, y la integral* (9.13) *converge uniformemente sobre un segmento $[c, d]$. Entonces, la integral citada es función continua de y sobre el segmento $[c, d]$.*

DEMOSTRACIÓN Estudiemos una sucesión de funciones

$$I_n(y) = \int_a^{a+n} f(x, y)\, dx,$$

cada una de las cuales es, en virtud del teorema 9.1, continua sobre el segmento $[c, d]$. Es evidente que de la convergencia uniforme de la integral (9.13) proviene la convergencia uniforme hacia $I(y)$ de la sucesión funcional $I_n(y)$. En tal caso la continuidad de la función $I(y)$ se deduce del teorema 1.7.

Teorema 9.10. *Supongamos que la función $f(x, y)$ y su derivada parcial $\frac{\partial f}{\partial y}$ son continuas en la semifranja Π_∞. Admitamos, además, que para cierto y del segmento $[c, d]$ resulta convergente la integral*

$I(y) = \int_a^{\infty} f(x, y)\, dx$, *mientras que la integral* $\int_a^{\infty} \frac{\partial f}{\partial y}\, dx$ *converge uniformemente respecto de* y *sobre el segmento* $[c, d]$. *Bajo estas condiciones la función* $I(y)$, *diferenciable sobre el segmento* $[c, d]$, *y su derivada* $I'(y)$ *pueden hallarse según la fórmula*

$$I'(y) = \int_a^{\infty} \frac{\partial f}{\partial y}\, dx. \tag{9.16}$$

De otras palabras, en las condiciones del teorema *la diferenciación respecto del parámetro puede realizarse bajo el signo de la integral impropia dependiente del parámetro.*

DEMOSTRACIÓN. Veamos una sucesión de funciones

$$I_n(y) = \int_a^{a+n} f(x, y)\, dx.$$

De acuerdo con el teorema 9.3, cada una de las funciones $I_n(y)$ es diferenciable sobre el segmento $[c, d]$ y se verifica una igualdad

$$I_n'(y) = \int_a^{a+n} \frac{\partial f(x, y)}{\partial y}\, dx. \tag{9.17}$$

De las condiciones del teorema se deduce que la sucesión de integrales que figuran en el segundo miembro de (9.17) es uniformemente convergente sobre $[c, d]$. Por consiguiente, a la misma función límite converge uniformemente la sucesión de derivadas $I_n'(y)$. Aplicando el teorema 1.9, obtenemos la igualdad (9.16).

Demostremos un teorema sobre *la integración propia de una integral impropia dependiente de un parámetro.*

Teorema 9.11. *Cumplidas las condiciones del teorema 9.9, la integral* (9.13) *puede integrarse respecto del parámetro* y *sobre el segmento* $[c, d]$, *con la particularidad de que*

$$\int_c^d I(y)\, dy = \int_c^d dy \int_a^{\infty} f(x, y)\, dx = \int_a^{\infty} dx \int_c^d f(x, y)\, dy. \tag{9.18}$$

De otras palabras, en las condiciones del teorema *una integral impropia dependiente de un parámetro puede ser integrada respecto del parámetro bajo el signo de integral impropia.*

DEMOSTRACIÓN. Por cuanto quedan cumplidas las condiciones del teorema 9.9, la función $I(y)$ es continua sobre el segmento $[c, d]$, y, por consiguiente, integrable en este segmento. Pasemos a la demostración de la relación (9.18).

Haciendo uso de la convergencia uniforme de la integral (9.13), podemos indicar, según un $\varepsilon > 0$ dado, tal $A \geqslant a$, que, cuando $R \geqslant A$, se cumple, para todos los y del segmento $[c, d]$, la siguiente desigualdad

$$\left|\int_R^\infty f(x, y)\, dx\right| < \frac{\varepsilon}{d-c}. \qquad (9.19)$$

Considerando $R \geqslant A$, y empleando la posibilidad de cambiar el orden de integración para las integrales propias dependientes de un parámetro, volvamos a las siguientes igualdades evidentes:

$$\int_c^d I(y)\, dy = \int_c^d \left[\int_a^R f(x, y)\, dx + \int_R^\infty f(x, y)\, dx\right] dy =$$

$$= \int_a^R dx \left[\int_c^d f(x, y)\, dy\right] + \int_c^d dy \left[\int_R^\infty f(x, y)\, dx\right].$$

De estas relaciones y de la desigualdad (9.19) se deduce la siguiente desigualdad que es válida para todo $R \geqslant A$:

$$\left|\int_c^d I(y)\, dy - \int_a^R dx \left[\int_c^d f(x, y)\, dy\right]\right| < \varepsilon,$$

la cual significa que la integral impropia $\int_a^\infty dx \int_c^d f(x, y)\, dy$ respecto de la variable x converge y es igual al número $\int_c^d I(y)\, dy$. El teorema está demostrado.

OBSERVACION. Evidentemente, en la relación (9.18) en lugar del límite superior d de integración respecto de y podemos poner cualquier número del segmento $[c, d]$.

Corolario. *Si una función $f(x, y)$ es continua y no negativa en la semifranja Π_∞, y si la integral* (9.13) *es función continua sobre el segmento* $[c, d]$, *será válida la fórmula* (9.18).

En efecto, para las exigencias formuladas quedan cumplidas todas las condiciones del criterio de Dini de convergencia uniforme de la integral (9.13) (véase teorema 9.8). De este modo, la afirmación del corolario es legítima.

Demostremos un teorema sobre *la integración impropia de una integral impropia dependiente de un parámetro.*

Teorema 9.12. *Sea una función $f(x, y)$ no negativa y continua* para $x \geqslant a$ *e* $y \geqslant c$. *Supongamos ahora que las integrales*

$$I(y) = \int_a^\infty f(x, y)\,dx \quad y \quad K(x) = \int_c^\infty f(x, y)\,dy$$

son continuas para $y \geqslant c$ y $x \geqslant a$, respectivamente. Entonces, de la convergencia de una de dos integrales impropias

$$\int_c^\infty I(y)\,dy = \int_c^\infty dy \int_a^\infty f(x, y)\,dx \quad y \quad \int_a^\infty K(x)\,dx = \int_a^\infty dx \int_c^\infty f(x, y)\,dy$$

se deduce la convergencia de la otra y, también, la igualdad entre dichas integrales.

DEMOSTRACIÓN. Admitamos que la integral $\int_c^\infty I(y)\,dy$ es convergente. Hace falta demostrar que la integral $\int_a^\infty K(x)\,dx$ converge y es igual a $\int_c^\infty I(y)\,dy$. Dicho de otro modo, hemos de demostrar que para todo $\varepsilon > 0$ puede encontrarse tal $A \geqslant a$, que, cuando $\overline{R} \geqslant A$, se cumple una desigualdad

$$\left| \int_c^\infty I(y)\,dy - \int_a^R K(x)\,dx \right| < \varepsilon. \tag{9.20}$$

De las condiciones del teorema se deduce que con cualquier $\overline{R} \geqslant a$ para la función $f(x, y)$ quedan cumplidas en la semifranja $\{a \leqslant x \leqslant \overline{R}, c \leqslant y < \infty\}$ las condiciones del corolario en el teorema 9.11. Por eso, para todo $\overline{R} \geqslant a$ se verifican las relaciones

$$\int_a^{\overline{R}} K(x)\,dx = \int_a^{\overline{R}} dx \int_c^\infty f(x, y)\,dy = \int_c^\infty dy \int_a^{\overline{R}} f(x, y)\,dx.$$

Aprovechando estas igualdades y la convergencia de la integral $\int_c^\infty I(y)\,dy$, transformemos la diferencia que figura bajo el signo de la magnitud absoluta en la desigualdad (9.20). Para cualquier $\overline{\overline{R}}$

superior a c escribamos una igualdad

$$\int_c^\infty I(y)\,dy - \int_a^{\overline{R}} K(x)\,dx = \int_c^\infty dy \int_a^\infty f(x,\ y)\,dx - \int_c^\infty dy \int_a^{\overline{R}} f(x,\ y)\,dx =$$

$$= \int_c^\infty dy \int_{\overline{R}}^\infty f(x,\ y)\,dx = \int_{\overline{\overline{R}}}^\infty dy \int_{\overline{R}}^\infty f(x,\ y)\,dx + \int_c^{\overline{\overline{R}}} dy \int_{\overline{R}}^\infty f(x,\ y)\,dx \quad (9.21)$$

Procedamos a estimar las últimas integrales en la relación (9.21). Ya que la integral $\int_c^\infty I(y)\,dy$ converge por hipótesis, podemos indicar, según un $\varepsilon > 0$ dado, tal $\overline{\overline{R}} > c$ que se cumplen las desigualdades $0 \leqslant \int_{\overline{\overline{R}}}^\infty I(y)\,dy < \varepsilon/2$ [1]. Sustituyendo en estas desigualdades $I(y)$ por su expresión en términos de una integral, obtendremos las siguientes desigualdades: $0 \leqslant \int_{\overline{\overline{R}}}^\infty dy \int_a^\infty f(x,\ y)\,dx < \varepsilon/2$. De aquí concluimos, teniendo presente el hecho de que $f(x,\ y)$ es no negativa, que para $\overline{\overline{R}} > c$ elegido y cualquier $\overline{R} \geqslant a$ resulta válida una estimación

$$0 \leqslant \int_{\overline{\overline{R}}}^\infty dy \int_{\overline{R}}^\infty f(x,\ y)\,dx < \varepsilon/2. \quad (9.22)$$

Fijemos ahora $\overline{\overline{R}}$ de un modo descrito más arriba y aprovechemos la arbitrariedad en la elección de $\overline{R}$. En la semifranja $\{a \leqslant x < \infty,\ c \leqslant y \leqslant \overline{\overline{R}}\}$ la función $f(x,\ y)$ satisface todas las condiciones del criterio de Dini de convergencia uniforme de las integrales impropias (véase el teorema 9.8). Por eso, se puede elegir, según $\varepsilon > 0$ dado, $A \geqslant a$ de tal modo que para cualquier $\overline{R} \geqslant A$ y para todo y del segmento $[c,\ \overline{\overline{R}}]$ se verifiquen las desigualdades $0 \leqslant \int_{\overline{R}}^\infty f(x,\ y)\,dx < \frac{\varepsilon}{2(\overline{\overline{R}} - c)}$ [1], a partir de las cuales se obtiene la siguiente estimación

$$0 \leqslant \int_c^{\overline{\overline{R}}} dy \int_{\overline{R}}^\infty f(x,\ y)\,dx < \varepsilon/2. \quad (9.23)$$

---

[1] La izquierda de estas desigualdades proviene de lo que para $x \geqslant a$ e $y \geqslant c$ la función $f(x,\ y)$ es no negativa.

Volviendo a la expresión (9.21) y a las estimaciones (9.22) y (9.23) de las últimas integrales en esta expresión, vemos que para un $\varepsilon > 0$ arbitrario puede elegirse tal $A \geqslant a$, que para cualquier $\bar{R} \geqslant A$ se verifique la desigualdad (9.20). La demostración del teorema está finalizada.

3. Integrales impropias de segunda especie dependientes de un parámetro. Introduzcamos el concepto de integrales impropias de segunda especie dependientes de un parámetro. Sea $f(x, y)$ una función definida en el rectángulo semiabierto $\Pi = \{a \leqslant x < b,\ c \leqslant \leqslant y \leqslant d\}$. Admitamos que para cualquier y fijo del segmento $[c, d]$ la integral impropia de segunda especie $\int\limits_a^b f(x, y)\, dx$ es convergente. En estas condiciones queda definida sobre el segmento $[c, d]$ una función

$$I(y) = \int\limits_a^b f(x, y)\, dx, \tag{9.24}$$

llamada *integral impropia de segunda especie dependiente del parámetro y*.

En la teoría de tales integrales desempeña un papel importante el concepto de *convergencia uniforme*. Enunciemos este concepto.

Definición. *La integral impropia* (9.24) *se denomina uniformemente convergente respecto del parámetro y sobre el segmento $[c, d]$, si es convergente para cada y del segmento $[c, d]$ y para todo $\varepsilon > 0$ puede indicarse tal $\delta > 0$, dependiente sólo de ε, que con cualquier α del intervalo $0 < \alpha < \delta$ y todo y del segmento $[c, d]$ se verifique una desigualdad*

$$\left| \int\limits_{b-\alpha}^{b} f(x, y)\, dx \right| < \varepsilon.$$

Para las integrales impropias de segunda especie se enuncian y se demuestran sin dificultades algunos teoremas de continuidad, integrabilidad y diferenciabilidad respecto del parámetro.

Notemos que con ayuda de la transformación de la variable x, aducida en el p. 2 § 2 del capítulo 3, las integrales impropias de segunda especie dependientes del parámetro y se reducen a las integrales impropias de primera especie dependientes de un parámetro.

§ 3. Aplicación de la teoría de integrales dependientes de un parámetro al cálculo de las integrales impropias

Las operaciones con integrales impropias dependientes de un parámetro, argumentadas en el párrafo antecedente, permiten calcular diversas integrales impropias.

Veamos unos ejemplos de cálculo e investigaciones de las propiedades de tales integrales.

1°. Demostremos que una integral

$$I(\alpha)=\int_0^\infty e^{-\alpha x}\frac{\operatorname{sen} x}{x}\,dx, \tag{9.25}$$

cuya función subintegral en un punto $x=0$ es igual, por definición, a uno, converge uniformemente respecto de α sobre la semirrecta $0\leqslant\alpha<\infty$. Obtendremos, al principio, ciertas estimaciones. Notemos, en primer lugar, que

$$\int e^{-\alpha x}\operatorname{sen} x\,dx=-\frac{e^{-\alpha x}(\alpha\operatorname{sen} x+\cos x)}{1+\alpha^2}+C=\Phi(\alpha,\ x)+C.$$

Es evidente que, cuando $\alpha\geqslant 0$ y $x\geqslant 0$, la función $\Phi(\alpha, x)$ (la cual es una primitiva para la función $e^{-\alpha x}\operatorname{sen} x$) está acotada:

$$|\Phi(\alpha,\ x)|\leqslant\frac{1+\alpha}{1+\alpha^2}\leqslant 2. \tag{9.26}$$

Estimemos la siguiente integral:

$$\int_R^\infty e^{-\alpha x}\frac{\operatorname{sen} x}{x}\,dx\quad (R>0).$$

Integrando por partes con cualquier $\alpha\geqslant 0$, encontramos

$$\left|\int_R^\infty e^{-\alpha x}\frac{\operatorname{sen} x}{x}\,dx\right|=\left|\left[\frac{\Phi(\alpha,\ x)}{x}\right]_R^\infty+\int_R^\infty\frac{\Phi(\alpha,\ x)}{x^2}\,dx\right|\leqslant$$

$$\leqslant\frac{|\Phi(\alpha,\ R)|}{R}+\int_R^\infty\frac{|\Phi(\alpha,\ x)|}{x^2}\,dx.$$

De esta desigualdad y de la (9.26) obtenemos la siguiente estimación:

$$\left|\int_R^\infty e^{-\alpha x}\frac{\operatorname{sen} x}{x}\,dx\right|\leqslant\frac{2}{R}+2\int_R^\infty\frac{dx}{x^2}=\frac{4}{R}. \tag{9.27}$$

De esta estimación se deduce la convergencia uniforme de la integral (9.25) respecto de α en la semirrecta $0\leqslant\alpha<\infty$. En efecto,

sea ε un número positivo arbitrario. Elijamos según este ε un número $A > 0$ de un modo tal que se cumpla la desigualdad

$$\frac{4}{A} < \varepsilon.$$

Está claro que, cuando $R \geqslant A$, para todos los $\alpha \geqslant 0$ se verifica, en virtud de la estimación (9.27), una correlación

$$\left| \int_R^\infty e^{-\alpha x} \frac{\operatorname{sen} x}{x} dx \right| < \varepsilon,$$

que significa la convergencia uniforme respecto de α de la integral (9.25) sobre la semirrecta $0 \leqslant \alpha < \infty$.

2°. Haciendo uso de las deducciones que acabamos de obtener para el cálculo de la integral[1])

$$I = \int_0^\infty \frac{\operatorname{sen} x}{x} dx. \tag{9.28}$$

Notemos primeramente que la integral citada representa un valor límite, para $\alpha \to 0 + 0$, de la función $I(\alpha)$ definida mediante la relación (9.25). Efectivamente, la función subintegral en la integral (9.25) es continua cuando $\alpha \geqslant 0$ y $x \geqslant 0$ (para $x = 0$ esta función se considera igual a uno) y la integral (9.25) converge uniformemente respecto de α en la semirrecta $0 \leqslant \alpha < \infty$. Por eso, de acuerdo con el teorema 9.9, la integral (9.25) representa una función continua de α en la semirrecta $\alpha \geqslant 0$. De aquí proviene que

$$\lim_{\alpha \to 0+0} I(\alpha) = I = \int_0^\infty \frac{\operatorname{sen} x}{x} dx. \tag{9.29}$$

Obtengamos para la función $I(\alpha)$ una representación especial, mediante la cual se hallará el valor límite (9.29). La citada representación se obtiene de la expresión para la derivada $I'(\alpha)$. Por eso, hemos de convencernos al principio de la posibilidad de diferenciar la integral (9.25) respecto del parámetro α bajo el signo de integral. Con este fin comprobemos el cumplimiento de las condiciones del teorema 9.13 con arreglo a la integral (9.25). Son evidentes la continuidad de la función subintegral y la de su derivada parcial respecto del parámetro α cuando $\alpha \geqslant 0$ y $x \geqslant 0$. Volvamos, ahora, a aclarar la convergencia uniforme según α de la integral

$$-\int_0^\infty e^{-\alpha x} \operatorname{sen} x \, dx \tag{9.30}$$

[1]) La convergencia de la integral en consideración fue establecida en el p. 2, § 1, cap. 3.

respecto de la derivada parcial de la función subintegral en (9.25). Fijemos cualquier $\Delta > 0$. Ya que para todo $\alpha \geqslant \Delta$ resulta válida una igualdad $|e^{-\alpha x} \operatorname{sen} x| \leqslant e^{-\Delta x}$, y por cuanto la integral $\int\limits_0^\infty e^{-\Delta x}\,dx$ es convergente, entonces, de acuerdo con el criterio de Weierstrass (teorema 9.7), la integral (9.30) converge uniformemente respecto de α cuando $\alpha \geqslant \Delta$. Como Δ es un número positivo, podemos diferenciar la integral (9.25) bajo el signo de integral según el parámetro α, cualquiera que sea $\alpha > 0$. Así pues, para $\alpha > 0$

$$I'(\alpha) = -\int\limits_0^\infty e^{-\alpha x} \operatorname{sen} x\,dx = -\frac{1}{1+\alpha^2}.$$

Integrando los miembros izquierdo y derecho de las últimas relaciones, obtendremos para $\alpha > 0$

$$I(\alpha) = -\int \frac{d\alpha}{1+\alpha^2} = -\operatorname{arctg} \alpha + C. \tag{9.31}$$

Hallemos la constante C. Por cuanto $\left|\frac{\operatorname{sen} x}{x}\right| \leqslant 1$ para $x \geqslant 0$, de la expresión (9.25) para $\alpha > 0$ obtendremos una desigualdad

$$|I(\alpha)| \leqslant \int\limits_0^\infty e^{-\alpha x}\,dx = \frac{1}{\alpha},$$

de la cual se deduce que

$$\lim_{\alpha\to\infty} |I(\alpha)| = 0,$$

y, por tanto,

$$\lim_{\alpha\to\infty} I(\alpha) = 0. \tag{9.32}$$

Por cuanto $\lim\limits_{\alpha\to\infty} \operatorname{arctg} \alpha = \pi/2$, de (9.31) y (9.32) encontramos $C = \pi/2$. Así pues, cuando $\alpha > 0$, la función $I(\alpha)$ puede ser representada en la siguiente forma:

$$I(\alpha) = \frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} \alpha.$$

De aquí y de la fórmula (9.29) obtenemos el valor de la integral (9.28):

$$\int\limits_0^\infty \frac{\operatorname{sen} x}{x}\,dx = \frac{\pi}{2}. \tag{9.33}$$

OBSERVACIÓN. Examinemos una integral

$$K(\alpha)=\int_0^\infty \frac{\operatorname{sen}\alpha x}{x}\,dx \tag{9.34}$$

Hallemos el valor de esta integral para diferentes valores de α.

Siendo $\alpha>0$, realicemos en la integral (9.34) un cambio de variables, suponiendo $\alpha x=y$. Entonces

$$K(\alpha)=\int_0^\infty \frac{\operatorname{sen}\alpha x}{x}\,dx=\int_0^\infty \frac{\operatorname{sen} y}{y}\,dy=\frac{\pi}{2}.$$

Siendo $\alpha<0$, realicemos el cambio de variables, suponiendo $\alpha x=-y$ $(y>0)$. Entonces,

$$K(\alpha)=-\int_0^\infty \frac{\operatorname{sen} y}{y}\,dy=-\frac{\pi}{2}.$$

Cuando $\alpha=0$, la integral (9.34), es, obviamente, igual a cero. Así pues

$$K(\alpha)=\int_0^\infty \frac{\operatorname{sen}\alpha x}{x}\,dx=\begin{cases}\pi/2 & \text{para } \alpha>0,\\ 0 & \text{para } \alpha=0,\\ -\pi/2 & \text{para } \alpha<0.\end{cases}$$

La integral examinada se llama, corrientemente, *factor discontinuo de Dirichlet.*

Con ayuda del factor discontinuo de Dirichlet obtenemos la siguiente representación analítica de la función conocida sgn α, denominada, de ordinario, por el término «signo α»[1]):

$$\operatorname{sgn}\alpha=\frac{2}{\pi}\int_0^\infty \frac{\operatorname{sen}\alpha x}{x}\,dx.$$

§ 4. Integrales de Euler

En este párrafo daremos a conocer algunas propiedades de las importantes funciones no elementales que se llaman integrales de Euler [2]).

[1]) Esta denominación está ligada con lo que los valores de sgn α para $\alpha>0$, $\alpha=0$ y $\alpha<0$ son iguales a 1, 0, -1, respectivamente.

[2]) La información detallada sobre las integrales de Euler el lector puede encontrar en el libro «Curso del análisis moderno» que se debe a E. G. Whittaker y G. N. Watson.

Se denomina integral de Euler de primera especie o «beta-función» a una integral

$$B(p, q) = \int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}\,dx. \tag{9.35}$$

En esta integral p y q se consideran parámetros. Si estos parámetros satisfacen las condiciones $p < 1$ y $q < 1$, entonces la integral (9.35) será impropia, dependiente de los parámetros p y q, con la particularidad de que como puntos singulares de esta integral intervienen $x = 0$ y $x = 1$.

Se acostumbra llamar integral de segunda especie o «gamma-función» a una integral impropia

$$\Gamma(p) = \int_0^\infty e^{-x}x^{p-1}\,dx. \tag{9.36}$$

Notemos que en la integral (9.36) se tienen dos tipos de singularidades: 1) integración en la semirrecta $0 \leqslant x < \infty$, 2) cuando $p < 1$, el punto $x = 0$ es punto singular de la función subintegral (la función subintegral se reduce al infinito).

En nuestros razonamientos hemos de tomar en consideración las singularidades aducidas de las funciones $B(p, q)$ y $\Gamma(p)$. Más abajo nos convenceremos de que los integrales (9.35) y (9.36) son convergentes para los valores de $p > 0$ y $q > 0$.

1. Dominio de convergencia de las integrales de Euler. Demostremos que la función $B(p, q)$ está definida para todos los valores positivos de los parámetros p y q, y la función $\Gamma(p)$, para todos los valores positivos de p.

Preocupémonos, primero, de la función $B(p, q)$. Cuando $p \geqslant 1$ y $q \geqslant 1$, la función subintegral en la relación (9.35) es continua, por lo cual la integral en el segundo miembro de (9.35) es propia. Por eso, la función $B(p, q)$ está definida para todos los valores mencionados de p y q. Volvamos ahora al caso en que se cumplen una o ambas de las siguientes desigualdades:

$$0 < p < 1, \quad 0 < q < 1. \tag{9.37}$$

En este caso uno o ambos de los puntos $x = 0$ y $x = 1$ son puntos singulares de la función subintegral. Teniéndolo en cuenta, representemos $B(p, q)$ en la siguiente forma:

$$B(p, q) = \int_0^{1/2} x^{p-1}(1-x)^{q-1}\,dx + \int_{1/2}^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}\,dx =$$
$$= I_1(p, q) + I_2(p, q).$$

Es obvio que cada una de las integrales $I_1(p, q)$ e $I_2(p, q)$ tiene un solo punto singular.

Para la integral $I_1(p, q) = \int_0^{1/2} x^{p-1}(1-x)^{q-1}\,dx$ el punto singular será $x = 0$. Observando que sobre el segmento $[0, 1/2]$ la función $(1-x)^{q-1}$ es continua y, por eso, está acotada por cierta constante C, es fácil convencerse de que la función Cx^{p-1} será mayorante para la función subintegral de la integral $I_1(p, q)$. De aquí se deduce que la integral $I_1(p, q)$ converge para $0 < p < 1$, y para cualquier q. Razonando análogamente, es fácil convencerse de que la integral $I_2(p, q)$ converge para $0 < q < 1$, y para cualquier p.

Así pues, nos hemos convencido de que en un caso cuando se cumplen las desigualdades $p > 0$ y $q > 0$, la integral (9.35) converge, es decir, *la función* $\mathrm{B}(p, q)$ *está definida para todos los valores positivos de* p *y* q.

Pasemos ahora a la función $\Gamma(p)$. Ya hemos notado que la integral (9.36) tiene dos tipos de singularidades: la integración en una semirrecta y el punto singular $x = 0$. Para separar estas singularidades, dividamos el dominio de integración en dos partes de un modo tal que en cada parte haya una sola de las singularidades mencionadas. Por ejemplo, se puede representar $\Gamma(p)$ del modo siguiente:

$$\Gamma(p) = \int_0^1 e^{-x}x^{p-1}\,dx + \int_1^\infty e^{-x}x^{p-1}\,dx = I_1(p) + I_2(p).$$

Por cuanto $|e^{-x}x^{p-1}| \leqslant x^{p-1}$ para $x > 0$, entonces, de acuerdo con el criterio parcial de comparación, la integral $I_1(p)$ converge para $p > 0$. La integral $I_2(p)$ es también convergente cuando $p > 0$. Para convencerse de ello, se puede aprovechar el criterio parcial de comparación en la forma límite: $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{-x}x^{r} = 0$ para todo r. Así pues, hemos demostrado que como dominio de definición de la función $\Gamma(p)$ interviene la semirrecta $p > 0$.

2. Continuidad de las integrales de Euler. Demostremos que la función $\mathrm{B}(p, q)$ es continua en un cuadrante $p > 0$, $q > 0$, mientras que la función $\Gamma(p)$ es continua en la semirrecta $p > 0$. Analicemos al principio la función $\mathrm{B}(p, q)$. Para demostrar la continuidad de $\mathrm{B}(p, q)$ en el cuadrante $p > 0$, $q > 0$, basta, evidentemente, convencerse de que la integral (9.35) converge uniformemente con relación a los parámetros p y q para $p \geqslant p_0 > 0$ y $q \geqslant q_0 > 0$, cualesquiera que sean los valores positivos fijos de p_0 y q_0. Por cuanto $p_0 - 1 \leqslant p - 1$, $q_0 - 1 \leqslant q - 1$, entonces, cuando $0 < x < 1$, se cumplen las desigualdades

$$x^{p-1}(1-x)^{q-1} < x^{p_0-1}(1-x)^{q_0-1}.$$

De aquí y de la convergencia de la integral $\int\limits_0^1 x^{p_0-1}(1-x)^{q_0-1}\,dx$ se deduce, en virtud del criterio de Weierstrass, la convergencia uniforme de la integral (9.35) para los valores indicados de p y q. De este modo, la continuidad de $B(p, q)$ para $p > 0$ y $q > 0$ queda demostrada.

Para demostrar la continuidad de $\Gamma(p)$ en una semirrecta $p > 0$, es suficiente, evidentemente, establecer la convergencia uniforme de la integral (9.36) según el parámetro p cuando $0 < p_0 \leqslant p \leqslant p_1$ para cualesquiera valores fijos de p_0 y p_1, que satisfagan una condición $0 < p_0 < p_1$. Por cuanto para los valores mencionados de p, p_0 y p_1 y para $x > 0$ se cumple la desigualdad

$$e^{-x}x^{p-1} \leqslant e^{-x}[x^{p_0-1} + x^{p_1-1}],$$

de la convergencia de la integral

$$\int\limits_0^\infty e^{-x}[x^{p_0-1} + x^{p_1-1}]\,dx$$

proviene, en virtud del criterio de Weierstrass, la convergencia uniforme de la integral (9.36) para los valores mencionados de p. De este modo, la continuidad de $\Gamma(p)$ para $p > 0$ está demostrada.

3. Algunas propiedades de la función $\Gamma(p)$. En este punto se demostrará la existencia de la derivada de cualquier orden de la función $\Gamma(p)$. Además, para dicha función se obtendrá una fórmula llamada *fórmula de reducción*.

Diferenciando $\Gamma(p)$ respecto del parametro bajo el signo de integral, obtendremos la siguiente integral:

$$\int\limits_0^\infty x^{p-1}e^{-x}\ln x\,dx, \tag{9.38}$$

la cual converge uniformemente según el parámetro p en todo segmento $0 < p_0 \leqslant p \leqslant p_1$. En efecto, el valor absoluto de la función subintegral en la integral (9.38) satisface en la semirrecta $0 < x < \infty$ una desigualdad

$$|x^{p-1}e^{-x}\ln x| < e^{-x}|\ln x|(x^{p_0-1} + x^{p_1-1}).$$

De aquí, la convergencia de la integral

$$\int\limits_0^\infty e^{-x}|\ln x|(x^{p_0-1} + x^{p_1-1})\,dx$$

predetermina, de acuerdo con el criterio de Weierstrass, la convergencia uniforme de la integral (9.38). Esta circunstancia, como también la continuidad de la función subintegral en (9.38)[1]) para $0 < x < \infty$, $0 < p < \infty$ permiten llegar a la deducción de que resulta posible la diferenciación de $\Gamma(p)$ respecto del parámetro bajo el signo de integral. Así pues, *la derivada* $\Gamma'(p)$ *existe y es igual a la expresión* (9.38).

Razonando análogamente, es fácil convencerse de que la función $\Gamma(p)$ tiene derivada de cualquier orden y esto derivada puede hallarse por diferenciación respecto del parámetro p bajo el signo de integral en la expresión (9.36) para $\Gamma(p)$.

Deduzcamos *la fórmula de reducción* para la función $\Gamma(p)$. Al aplicar la fórmula de integración por partes para la función $\Gamma(p+1)$, cuando $p > 0$, obtendremos

$$\Gamma(p+1) = \int_0^\infty x^p e^{-x}\,dx = [-x^p e^{-x}]_0^\infty + p\int_0^\infty x^{p-1}e^{-x}\,dx = p\Gamma(p).$$

Así pues, para cualquier $p > 0$ se verifica la fórmula

$$\Gamma(p+1) = p\Gamma(p). \tag{9.39}$$

Aplicando sucesivamente la fórmula (9.39) para cualquier $p > n-1$ y para todo n natural, obtendremos

$$\Gamma(p+1) = p(p-1)\ldots(p-n+1)\Gamma(p-n+1). \tag{9.40}$$

La relación (9.40) recibe el nombre de *fórmula de reducción* para la función $\Gamma(p)$. Con ayuda de esta fórmula la gamma-función para los valores del argumento superiores a la unidad «se reduce» a una gamma-función para los valores de argumento encerrados entre cero y la unidad.

Por cuanto $\Gamma(1) = \int_0^\infty e^{-x}\,dx = 1$, obtendremos, poniendo en (9.40) $p = n$:

$$\Gamma(n+1) = n(n-1)\ldots 2\cdot 1 = n!$$

Esta fórmula se empleará más abajo para deducir la así llamada fórmula de Stirling[2]) que proporciona una representación asintótica para $n!$.

La información obtenida sobre la función $\Gamma(p)$ permite dar una característica cualitativa de la gráfica de esta función. Daremos a conocer la investigación geométrica de la gráfica de $\Gamma(p)$ siguiendo, en lo principal, el esquema expuesto en el § 6, cap. 9, v. I.

Hemos establecido que como dominio de definición de $\Gamma(p)$

[1]) Esta función es una derivada parcial respecto del parámetro p de la función subintegral en la expresión (9.36) para $\Gamma(p)$.

[2]) J. Stirling (1692—1770), matemático escocés.

sirve una semirrecta $0 < p < \infty$. En esta semirrecta la función $\Gamma(p)$ es continua y diferenciable cualquier número de veces, con la particularidad de que toda derivada puede hallarse por diferenciación de la expresión (9.36) para $\Gamma(p)$ respecto del parámetro p bajo el signo de integral. En particular, la segunda derivada $\Gamma''(p)$ es igual a

$$\Gamma''(p) = \int_0^\infty x^{p-1} (\ln x)^2 e^{-x}\, dx.$$

Ya que $\Gamma''(p) > 0$, la primera derivada $\Gamma'(p)$ puede tener un solo cero. Por cuanto $\Gamma(1) = \Gamma(2)$ [1], entonces, de acuerdo con el teorema de Rolle, este cero de la derivada $\Gamma'(p)$ existe y se dispone en el intervalo $(1, 2)$. Por cuanto $\Gamma''(p) > 0$, en un punto, donde $\Gamma'(p)$ se reduce a cero, la función $\Gamma(p)$ tiene su mínimo. Notemos, además, que la gráfica de $\Gamma(p)$ es convexa hacia las y negativas. La gráfica de la función $\Gamma(p)$ tiene asíntota vertical en el punto $p = 0$. Efectivamente, ya que $\Gamma(1) = 1$ y $\Gamma(p) = \frac{\Gamma(p+1)}{p}$, de la continuidad de $\Gamma(p)$ en el punto 1 se deduce que $\Gamma(p) \to +\infty$, cuando $p \to 0 + 0$. Evidentemente, $\Gamma(p) \to +\infty$, cuando $p \to +\infty$. Diremos sin demostración que la gráfica de la función $\Gamma(p)$ no tiene asíntotas oblícuas.

4. Algunas propiedades de la función $B(q, p)$. En este punto se indicarán la propiedad de simetría de la función $B(p, q)$ y la fórmula de reducción para esta función.

Realicemos en la integral (9.35) un cambio de la variable, haciendo $x = 1 - t$. Al realizar los cálculos necesarios, nos convencemos de la validez de una ecuación

$$B(p, q) = B(q, p), \tag{9.41}$$

la cual ofrece *la propiedad de simetría de la función* $B(p, q)$.

Establezcamos para la función $B(p, q)$ las fórmulas de reducción. Con este fin volvamos a la función $B(p, q+1)$, considerando positivos p y q. Aplicando la integración por partes y la fórmula $x^p = x^{p-1} - x^{p-1}(1-x)$, obtendremos

$$B(p, q+1) = \int_0^1 x^{p-1}(1-x)^q\, dx = \left[\frac{x^p}{p}(1-x)^q\right]_0^1 +$$

$$+\frac{q}{p}\int_0^1 x^p (1-x)^{q-1}\, dx = \frac{q}{p}\int_0^1 \{x^{p-1}(1-x)^{q-1} - x^{p-1}(1-x)^q\}\, dx =$$

$$= \frac{q}{p} B(p, q) - \frac{q}{p} B(p, q+1).$$

---

[1] Esto se deduce de la relación (9.39).

De estas relaciones obtenemos la siguiente fórmula

$$B(p,\ q+1)=\frac{q}{p+q}B(p,\ q). \tag{9.42}$$

De un modo sumamente análogo obtenemos, para $p>0$ y $q>0$ una relación.

$$B(p+1,\ q)=\frac{p}{p+q}B(p,\ q). \tag{9.43}$$

Las fórmulas (9.42) y (9.43) se denominan fórmulas de reducción para la función $B(p,\ q)$. La aplicación sucesiva de estas fórmulas reduce el cálculo de $B(p,\ q)$ para valores positivos arbitrarios de los argumentos al cálculo de esta función para valores de los argumentos del cuadrado semiabierto $0<p\leqslant 1$, $0<q\leqslant 1$.

5. Relación entre las integrales de Euler. Realicemos en la integral (9.35) un cambio de variable, suponiendo que $x=\frac{1}{1+t}$. De resultas, obtendremos para $B(p,\ q)$ la siguiente expresión

$$B(p,\ q)=\int_0^\infty \frac{t^{q-1}}{(1+t)^{p+q}}\,dt. \tag{9.44}$$

Aprovechando la fórmula (9.41), obtendremos, a la par con (9.44), la siguiente expresión para $B(p,\ q)$:

$$B(p,\ q)=\int_0^\infty \frac{t^{p-1}}{(1+t)^{p+q}}\,dt. \tag{9.45}$$

Volvamos ahora a la expresión (9.36) para $\Gamma(p)$. Con ayuda de la sustitución $x=ty$, $t>0$, transformemos esta expresión a la forma

$$\frac{\Gamma(p)}{t^p}=\int_0^\infty e^{-ty}y^{p-1}\,dy. \tag{9.46}$$

Al sustituir en esta fórmula p por $p+q$ y t por $1+t$, obtendremos

$$\frac{\Gamma(p+q)}{(1+t)^{p+q}}=\int_0^\infty e^{-(1+t)y}y^{p+q-1}\,dy.$$

Multipliquemos ambos miembros de la última igualdad por t^{p-1} e integremos respecto de t desde 0 hasta ∞. Evidentemente, de acuerdo con la relación (9.45), obtendremos la fórmula

$$\Gamma(p+q)\,B(p,\ q)=\int_0^\infty dt\int_0^\infty y^{p+q-1}t^{p-1}e^{-(1+t)y}\,dy. \tag{9.47}$$

Si en el segundo miembro de la relación (9.47) se pueden cambiar de lugar los órdenes de integración respecto de t e y, entonces, teniendo presente (9.46), obtendremos

$$\Gamma(p+q)\,\mathrm{B}(p,\ q)=\int_0^{\infty} y^{p+q-1}e^{-y}\,dy\int_0^{\infty} t^{p-1}e^{-ty}\,dt=$$

$$=\int_0^{\infty} y^{p+q-1}e^{-y}\,\frac{\Gamma(p)}{y^p}\,dy=\Gamma(p)\int_0^{\infty} y^{q-1}e^{-y}\,dy=\Gamma(p)\,\Gamma(q),$$

es decir, quedará demostrada la validez de la fórmula

$$\mathrm{B}(p,\ q)=\frac{\Gamma(p)\cdot\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}. \tag{9.48}$$

Cerciorémonos ahora de la posibilidad de cambiar el orden de integración en el segundo miembro de (9.47). Con este fin se debe comprobar el cumplimiento de las condiciones del teorema. Supongamos, al principio, que $p>1$ y $q>1$. Entonces, evidentemente, se cumplen las condiciones del teorema 9.12. En efecto:

1) la función $f(t,\ y)=t^{p-1}y^{p+q-1}e^{-(1+t)y}$ es no negativa y continua en el cuadrante $t\geqslant 0,\ y\geqslant 0$.

2) La integral $\displaystyle\int_0^{\infty} f(t,\ y)\,dy=t^{p-1}\int_0^{\infty} y^{p+q-1}e^{-(1+t)y}\,dy=\frac{\Gamma(p+q)\,t^{p-1}}{(1+t)^{p+q}}$ es una función continua de t para $t\geqslant 0$.

3) La integral $\displaystyle\int_0^{\infty} f(t,\ y)\,dt=y^{p+q-1}e^{-y}\int_0^{\infty} t^{p-1}e^{-ty}\,dy=\Gamma(p)\,y^{q-1}e^{-y}$ es una función continua de y para $y\geqslant 0$.

4) La convergencia de la integral $\displaystyle\int_0^{\infty} dy\int_0^{\infty} f(t,\ y)\,dt$ fue establecida por cálculo directo.

Así pues, cuando $p>1$ y $q>1$, es válida la fórmula (9.48). En cambio, si se cumplen sólo las condiciones $p>0$ y $q>0$, resulta válida, según lo demostrado más arriba, la fórmula

$$\mathrm{B}(p+1,\ q+1)=\frac{\Gamma(p+1)\,\Gamma(p+1)}{\Gamma(p+q+2)}.$$

A partir de esta fórmula obtendremos de nuevo, con ayuda de las fórmulas de reducción para las funciones $\mathrm{B}(p,\ q)$ y $\Gamma(p)$ la fórmula (9.48).

6. Cálculo de las integrales definidas con ayuda de las integrales de Euler. Las integrales eulerianas representan funciones no elemen-

tales bien estudiadas. Un problema se considera resuelto, si se reduce al cálculo de las integrales eulerianas.

Demos a conocer ejemplos de cálculo de las integrales corrientes e impropias, reduciéndolas a las integrales de Euler.

1 Calculemos una integral

$$I=\int_0^{\infty} x^{1/4}(1+x)^{-2}\,dx.$$

Volviendo a las fórmulas (9.44) y (9.48), obtendremos, evidentemente:

$$I=\mathrm{B}\left(\frac{5}{4},\ \frac{3}{4}\right)=\frac{\Gamma(5/4)\,\Gamma(3/4)}{\Gamma(2)}=\frac{1}{4}\Gamma\left(\frac{1}{4}\right)\Gamma\left(\frac{3}{4}\right).$$

2. Calculemos una integral

$$I=\int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^{p-1}\varphi\cos^{q-1}\varphi\,d\varphi.$$

Poniendo $x=\operatorname{sen}^2\varphi$, obtendremos

$$I=\frac{1}{2}\int_0^1 x^{\frac{p}{2}-1}(1-x)^{\frac{q}{2}-1}\,dx=\frac{1}{2}\,\mathrm{B}\left(\frac{p}{2},\ \frac{q}{2}\right)=\frac{1}{2}\,\frac{\Gamma\left(\frac{p}{2}\right)\Gamma\left(\frac{q}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{p+q}{2}\right)}.$$

3 Volvamos a la integral

$$I_{p-1}=\int_0^{\pi/2}\operatorname{sen}^{p-1}\varphi\,d\varphi.$$

Haciendo uso del resultado obtenido en el ejemplo 2 (hay que poner $q=1$), hallaremos

$$\int_0^{\pi/2}\operatorname{sen}^{p-1}\varphi\,d\varphi=\frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\frac{\Gamma\left(\frac{p}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{p+1}{2}\right)}. \tag{9.49}$$

Tenemos ahora

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=\int_0^{\infty}e^{-x}\frac{dx}{\sqrt{x}}=2\int_0^{\infty}e^{-(\sqrt{x})^2}\,d\sqrt{x}.$$

Suponiendo $\sqrt{x}=t$, y observando que $\int\limits_0^{\infty}e^{-t^2}\,dt$ es igual a $\frac{1}{2}\int\limits_{-\infty}^{\infty}e^{-t^2}\,dt$, obtenemos, de acuerdo con el ejemplo analizado en

el p.2, § 4 del capítulo 3 (integral de Poisson),

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=\sqrt{\pi}.$$

Por eso, la fórmula (9.49) toma la forma

$$I_{p-1}=\int_0^{\pi/2}\operatorname{sen}^{p-1}\varphi\,d\varphi=\frac{\sqrt{\pi}}{2}\,\frac{\Gamma\left(\frac{p}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{p+1}{2}\right)}. \tag{9.50}$$

§ 5. Fórmula de Stirling

Recibe el nombre de Stirling la siguiente fórmula asintótica:

$$n!=\sqrt{2\pi n}\,n^n e^{-n}(1+\alpha_n), \tag{9.51}$$

donde $\alpha_n\to 0$ cuando $n\to\infty$.

Demostremos en este párrafo una fórmula más general que describe, con una exactitud tan alta como se quiera, el comportamiento de la gamma-función euleriana para valores grandes del argumento

$$\Gamma(\lambda+1)=\int_0^\infty t^\lambda e^{-t}\,dt. \tag{9.52}$$

Con este fin hagamos uso del así llamado *método de Laplace* que se apoya en la siguiente afirmación.

Lema. *Sea $f(t)$ una función integrable para cierto $a>0$ sobre un segmento $[-a, a]$ que puede ser representada en la forma*

$$f(t)=\sum_{k=0}^{2n-1}c_k t^k+O(t^{2n}). \tag{9.53}$$

En este caso tiene lugar la siguiente fórmula asintótica

$$\int_{-a}^{a}e^{-\lambda t^2}f(t)\,dt=\sum_{m=0}^{n-1}c_{2m}\frac{\Gamma\left(m+\frac{1}{2}\right)}{\lambda^{m+\frac{1}{2}}}+\frac{O(1)}{\lambda^{n+\frac{1}{2}}}. \tag{9.54}$$

DEMOSTRACIÓN. Sustituyamos la relación (9.53) en la integral que figura en el primer miembro de la fórmula (9.54) y tomemos en consideración que las integrales correspondientes a las potencias impares de t se anulan. Para estimar las integrales restantes, basta cerciorarse de que para $m\geqslant 0$ es válida la siguiente igualdad:

$$\int_0^a t^{2m}e^{-\lambda t^2}\,dt=\frac{1}{2}\,\frac{\Gamma\left(m+\frac{1}{2}\right)}{\lambda^{m+\frac{1}{2}}}+O(e^{-\lambda a^2}). \tag{9.55}$$

Representemos la integral en el primer miembro de (9.55) en la siguiente forma:

$$\int_0^a t^{2m}e^{-\lambda t^2}\,dt=\int_0^\infty t^{2m}e^{-\lambda t^2}\,dt-\int_a^\infty t^{2m}e^{-\lambda t^2}\,dt. \qquad (9.56)$$

En (9.56) transformemos la primera integral del miembro izquierdo, realizando una sustitución $x=\lambda t^2$, y obtendremos

$$\int_0^\infty t^{2m}e^{-\lambda t^2}\,dt=\frac{1}{2\lambda^{m+\frac{1}{2}}}\int_0^\infty x^{m-\frac{1}{2}}e^{-x}\,dx=\frac{1}{2}\,\frac{\Gamma\left(m+\frac{1}{2}\right)}{\lambda^{m+\frac{1}{2}}}. \qquad (9.57)$$

Notemos, ahora, que, cuando $\lambda>1$ y $t\geqslant a$, es válida la siguiente desigualdad:

$$e^{-\lambda t^2}\leqslant e^{-(\lambda-1)a^2}e^{-t^2}.$$

Aplicando esta desigualdad, estimemos la segunda integral en el miembro derecho de (9.56)

$$\int_a^\infty e^{-\lambda t^2}t^{2m}\,dt\leqslant e^{-(\lambda-1)a^2}\int_a^\infty t^{2m}e^{-t^2}\,dt=ce^{-\lambda a^2}. \qquad (9.58)$$

De las desigualdades (9.56), (9.57) y de la estimación (9.58) se deduce la fórmula requerida (9.55). El lema está demostrado.

Con el fin de aplicar este lema, realicemos en la integral (9.52) una sustitución $t=\lambda(1+x)$. Como resultado, la citada integral tomará la forma

$$\Gamma(\lambda+1)=\lambda^{\lambda+1}e^{-\lambda}\int_{-1}^\infty e^{-\lambda[x-\ln(1+x)]}\,dx. \qquad (9.59)$$

Denotemos con $g(x)$ la siguiente función definida sobre una semirrecta $x>-1$:

$$g(x)=\operatorname{sgn} x\cdot\sqrt{x-\ln(1+x)}. \qquad (9.60)$$

Entonces, la igualdad (9.59) puede escribirse así

$$\Gamma(\lambda+1)=\lambda^{\lambda+1}e^{-\lambda}\int_{-1}^\infty e^{-\lambda g^2(x)}\,dx. \qquad (9.61)$$

Nuestro objetivo consiste en estudiar el comportamiento asintótico, cuando $\lambda\to+\infty$, de la siguiente integral:

$$I(\lambda)=\int_{-1}^\infty e^{-\lambda g^2(x)}\,dx. \qquad (9.62)$$

Con este fin analicemos más detalladamente la función $g(x)$ definida por la igualdad (9.60). Por cuanto

$$\frac{d}{dx}g^2(x)=\frac{d}{dx}(x-\ln(1+x))=\frac{x}{1+x}, \qquad (9.63)$$

la función $g^2(x)$ será estrictamente decreciente para $-1<x<0$, y estrictamente creciente, cuando $x>0$. De aquí se deduce que la función $g(x)$ es estrictamente creciente en la semirrecta $x>-1$, con la particularidad de que como dominio de sus valores interviene toda la recta numérica. Ahora, ya que la función $g^2(x)$ tiene en un entorno del punto $x=0$ un desarrollo

$$g^2(x)=x-\ln(1+x)=x-\left(x-\frac{x^2}{2}+O(x^3)\right)=\frac{x^2}{2}+O(x^3),$$

existe tal función $h(x)$, estrictamente positiva para $x>-1$, que se verifique la igualdad

$$g^2(x)=x^2h(x).$$

La función $h(x)$ es infinitamente diferenciable para $x>-1$, por lo cual también será infinitamente diferenciable la función $g(x)=x\sqrt{h(x)}$.

Tomando en consideración lo dicho más arriba, podemos afirmar que para la función $y=g(x)$, definida por la igualdad (9.60), existe una función inversa $x=g^{-1}(y)$ que es estrictamente creciente e infinitamente diferenciable en toda la recta numérica y satisface la condición $g^{-1}(0)=0$.

Denotemos esta función inversa con el símbolo $x=\varphi(y)$. Aprovechando sus propiedades citadas anteriormente, hallemos la asintótica de la integral (9.62). Resulta válido el siguiente teorema.

Teorema 9.13. *Supongamos que una función $x=\varphi(y)$ es inversa de la función $y=g(x)$ definida por la igualdad* (9.60). *Entonces, para la integral* (9.62) *es válida la siguiente fórmula asintótica*

$$I(\lambda)=\sum_{m=0}^{n-1}\frac{\varphi^{(2m+1)}(0)}{(2m)!}\,\frac{\Gamma\left(m+\frac{1}{2}\right)}{\lambda^{m+\frac{1}{2}}}+\frac{O(1)}{\lambda^{n+\frac{1}{2}}}. \qquad (9.64)$$

cualquiera que sea el número n fijo.

DEMOSTRACIÓN. Fijemos un número positivo arbitrario a y pongamos $b=\varphi(-a)$, $c=\varphi(a)$. Esto significa que $a=g(c)=-g(b)$, y, por consiguiente, $-1<b<0$, y $c>0$.

Estimemos las siguientes dos integrales:

$$I_1(\lambda)=\int_{-1}^{b}e^{-\lambda g^2(x)}\,dx,\quad I_2(\lambda)=\int_{c}^{\infty}e^{-\lambda g^2(x)}\,dx. \qquad (9.65)$$

Para estimar la primera integral, notemos que, cuando $-1 < x < b$, se cumple la desigualdad $g(x) < -a$, es decir, $g^2(x) > a^2$, y, por lo tanto,

$$e^{-\lambda g^2(x)} < e^{-\lambda a^2}.$$

En tal caso

$$I_1(\lambda) \leqslant e^{-\lambda a^2} \int_{-1}^{b} dx = (1-|b|)\, e^{-\lambda a^2}. \qquad (9.66)$$

Análogamente se estima la integral $I_2(\lambda)$. Cuando $x > c$, se cumple la desigualdad $g(x) > a$, es decir, $g^2(x) > a^2$. Por consiguiente, para $\lambda > 1$ y $x > c$, tiene lugar la estimación

$$e^{-\lambda g^2(x)} = e^{-(\lambda-1)g^2(x)} e^{-g^2(x)} < e^{-(\lambda-1)a^2} e^{-g^2(x)}.$$

De aquí obtenemos

$$I_2(\lambda) \leqslant e^{-(\lambda-1)a^2} \int_{c}^{\infty} e^{-g^2(x)}\, dx = c_1 e^{-\lambda a^2}. \qquad (9.67)$$

De las estimaciones (9.66) y (9.67), que se satisfacen por las integrales (9.65), obtenemos para la integral (9.62) la siguiente relación:

$$I(\lambda) = \int_{b}^{c} e^{-\lambda g^2(x)}\, dx + O(e^{-\lambda a^2}). \qquad (9.68)$$

Realicemos en la integral (9.68) el cambio de la variable $t = g(x)$, es decir, $x = \varphi(t)$. De resultas obtenemos

$$I(\lambda) = \int_{-a}^{a} e^{-\lambda t^2} \varphi'(t)\, dt + O(e^{-\lambda a^2}). \qquad (9.69)$$

Por cuanto la función $\varphi'(t)$ es infinitamente diferenciable, representémosla, aprovechando la fórmula de Maclaurin, en la forma

$$\varphi'(t) = \sum_{k=0}^{2n-1} \frac{\varphi^{(k+1)}(0)}{k!} t^k + O(t^{2n}).$$

Para obtener la fórmula (9.64), queda por aplicar el tema a la función $f(t) = \varphi'(t)$. El teorema 9.13 está demostrado.

Como conclusión de este párrafo, señalemos el siguiente método simple de calcular las derivadas $\varphi^k(0)$. De las igualdades (9.63) obtenemos

$$2g \cdot g' = \frac{x}{x+1} = \frac{\varphi(t)}{\varphi(t)+1}.$$

De esta igualdad se deduce una relación

$$\varphi'(t)=\frac{1}{g'}=2g\,\frac{1+\varphi(t)}{\varphi(t)}=2t\,\frac{1+\varphi(t)}{\varphi(t)}.$$

De este modo, obtenemos la siguiente igualdad

$$\varphi(t)\,\varphi'(t)=2t+2t\varphi(t). \tag{9.70}$$

Diferenciando sucesivamente esta igualdad y suponiendo $t=0$, determinemos todas las derivadas $\varphi^{k}(0)$. Hallemos, por ejemplo, los valores de las primeras tres derivadas de la función $\varphi(t)$ en el cero.

Al diferenciar (9.70), obtenemos

$$[\varphi'(t)]^2+\varphi(t)\,\varphi''(t)=2+2\,(t\varphi'(t)+\varphi(t)). \tag{9.71}$$

Pongamos $t=0$ y tengamos en cuenta que $\varphi(0)=0$. Entonces, $\varphi'^2(0)=2$, es decir, $\varphi'(0)=\sqrt{2}$.

Al diferenciar la igualdad (9.71), obtendremos

$$3\varphi'\cdot\varphi''+\varphi\cdot\varphi'''=2\,(t\varphi''+2\varphi').$$

Igualando a cero t, obtenemos $3\sqrt{2}\varphi''(0)=4\sqrt{2}$, es decir, $\varphi''(0)=4/3$. Análogamente, de la igualdad

$$3\varphi''^2+4\varphi'\cdot\varphi'''+\varphi\cdot\varphi^{\mathrm{IV}}=2\,(t\varphi'''+3\varphi''),$$

obtenemos $\varphi'''(0)=\sqrt{2}/3$.

Por consiguiente, la fórmula (9.64) puede escribirse en la forma

$$f(\lambda)=\sqrt{2}\,\frac{\Gamma(1/2)}{\sqrt{\lambda}}+\frac{\sqrt{2}}{6}\,\frac{\Gamma(3/2)}{\lambda\sqrt{\lambda}}+\frac{O(1)}{\lambda^2\sqrt{\lambda}}. \tag{9.72}$$

Sustituyamos la igualdad (9.72) en (9.61) y tomemos en consideración que $\Gamma(1/2)=\sqrt{\pi}$, $\Gamma(3/2)=1/2\Gamma(1/2)=\sqrt{\pi}/2$. Obtenemos, como resultado:

$$\Gamma(\lambda+1)=\sqrt{2\pi\lambda}\,\lambda^{\lambda}e^{-\lambda}\left(1+\frac{1}{12\lambda}+\frac{O(1)}{\lambda^2}\right). \tag{9.73}$$

Escribamos los primeros cinco términos del desarrollo asintótico de la gamma-función de Euler:

$$\Gamma(\lambda+1)=\sqrt{2\pi\lambda}\,\lambda^{\lambda}e^{-\lambda}\left(1+\frac{1}{12\lambda}+\frac{1}{288\lambda^2}-\frac{139}{51\,840\lambda^3}-\right.$$
$$\left.-\frac{571}{2\,488\,320\lambda^4}+\frac{O(1)}{\lambda^5}\right).$$

Señalemos sin demostración que el resto de la serie asintótica no sobrepasa el último sumando retenido.

§ 6. Integrales múltiples dependientes de un parámetro

1. Integrales múltiples propias dependientes de un parámetro. Sea $x = (x_1, x_2, \ldots, x_m)$ un punto arbitrario del dominio D del espacio euclídeo m-dimensional E^m, y sea $y = (y_1, y_2, \ldots, y_l)$ un punto del dominio Ω del espacio E^l. Denotemos con el símbolo $D \times \Omega$ un subconjunto $(l + m)$-dimensional de un espacio euclídeo compuesto por todos los puntos $z = (z_1, z_2, \ldots, z_{m+l})$ de tal índole que el punto $(z_1, z_2, \ldots, z_m)$ pertenece a D, y el $(z_{m+1}, z_{m+2}, \ldots, z_{m+l})$ pertenece a Ω. En este caso se empleará frecuentemente la designación $z = (x, y) \in D \times \Omega$. La clausura del dominio D se denotará con el símbolo $\bar{D}$. Es fácil ver que la clausura $D \times \Omega$ coincide con la $\bar{D} \times \bar{\Omega}$.

Sea $f(x, y)$ una función definida en $D \times \Omega$, con la particularidad de que para todo $y_0 \in \Omega$ la función $f(x, y_0)$ es int egrable respecto de x en el dominio D. Entonces, la función

$$I(y) = \int_D f(x, y)\, dx, \tag{9.74}$$

definida en el dominio Ω se llamará integral dependiente del parámetro y. Notemos que el parámetro y es un vector l-dimensional y, por consiguiente, la integral (9.74) depende de l parámetros numéricos $y_1, y_2, \ldots, y_l$.

Por suma analogía con los teoremas 9.9—9.12 se demuestran los siguientes teoremas.

Teorema 9.14 (sobre continuidad de la integral (9.74) respecto de un parámetro). *Si una función $f(x, y)$ es continua con relación a la totalidad de argumentos en el dominio cerrado $\bar{D} \times \bar{\Omega}$, la función (9.74) representa una función continua del parámetro y en el dominio $\bar{\Omega}$.*

Teorema 9.15 (sobre integrabilidad de la integral (9.74) respecto del parámetro). *Si una función $f(x, y)$ es continua con relación a la totalidad de argumentos en el dominio $\bar{D} \times \bar{\Omega}$, la función (9.74) puede integrarse respecto del parámetro bajo el signo de integral, es decir,*

$$\int_\Omega I(y)\, dy = \int_D dx \int_\Omega f(x, y)\, dy.$$

Teorema 9.16 (sobre diferenciabilidad de la integral (9.74) respecto de un parámetro). *Si una función $f(x, y)$ y su derivada parcial $\frac{\partial f}{\partial y_k}$ son continuas en $\bar{D} \times \bar{\Omega}$, la integral (9.74) tiene en el dominio*

Ω una derivada parcial continua $\frac{\partial I}{\partial y_k}$, *y, además, se verifica una desigualdad*

$$\frac{\partial I}{\partial y_k} = \int\limits_D \frac{\partial f(x, y)}{\partial y_k}\, dx.$$

2. Integrales múltiples impropias dependientes de los parámetros. El concepto de integral múltiple impropia dependiente de los parámetros se podría introducir de una manera igual a la que se ha empleado en el punto antecedente para el caso en que la función $f(x, y)$ se definía en $D \times \Omega$, donde $D \subset E^m$ y $\Omega \subset E^l$. Sin embargo, el mayor interés representa un caso en que $D = \Omega$, el cual se estudiará aquí. Además, supondremos que $f(x, y) = F(x, y)\, g(x)$, donde $F(x, y)$ es continua en $\overline{D} \times \overline{D}$, cuando $x \neq y$, y la función $g(x)$ es acotada en D. De este modo, analizamos las integrales de la forma

$$V(y) = \int\limits_D F(x, y)\, g(x)\, dx, \tag{9.75}$$

donde la función subintegral puede tener singularidades sólo cuando $x = y$. Es de interés para nosotros la cuestión de continuidad de las integrales de la forma (9.75) respecto del parámetro y. Con este motivo introduzcamos la siguiente definición de *convergencia uniforme de la integral* (9.75) *en un punto*. Denotemos con el símbolo $K(y_0, \delta)$ una bola de radio δ con centro en el punto y_0.

Definición. *La integral* (9.75) *se llama convergente uniformemente respecto del parámetro y en el punto* $y_0 \in D$, *si para todo* $\varepsilon > 0$ *puede indicarse tal* $\delta > 0$ *que* $K(y_0, \delta) \subset D$ *y para todo dominio cubicable* $\omega \subset K(y_0, \delta)$ *y todos los puntos* $y \in K(y_0, \delta)$ *se verifica la desigualdad*

$$\left| \int\limits_\omega F(x, y)\, g(x)\, dx \right| < \varepsilon.$$

Teorema 9.17. *Si la integral* (9.75) *es uniformemente convergente respecto de y en el punto* $y_0 \in D$, *será continua en este punto* y_0.

DEMOSTRACIÓN. Se necesita demostrar que para todo $\varepsilon > 0$ existe un $\delta > 0$ tal que, cuando $|y - y_0| < \delta$, se cumple la desigualdad $|V(y) - V(y_0)| < \varepsilon$. De la definición de convergencia uniforme en un punto proviene la existencia de ta $\delta_1 > 0$ que $K(y_0, \delta_1) \subset D$ y, para $y \in K(y_0, \delta_1)$,

$$\left| \int\limits_K F(x, y)\, g(x)\, dx \right| < \varepsilon/3. \tag{9.76}$$

Pongamos

$$V_1(y) = \int\limits_K F(x, y)\, g(x)\, dx,$$

$$V_2(y) = \int\limits_{D \setminus K} F(x, y)\, g(x)\, dx. \tag{9.77}$$

De la desigualdad (9.76) se deduce que para $|y - y_0| < \delta_1$

$$|V_1(y)| < \varepsilon/3. \tag{9.78}$$

Notemos ahora que, cuando $x \in D \setminus K(y_0, \delta_1)$ e $y \in K(y_0, \delta_1/2)$, la función $F(x, y)$ será uniformemente continua en la totalidad de argumentos. Por consiguiente, existe un número positivo $\delta < \delta_1/2$ de tal índole que, para $|y - y_0| < \delta$, se verifique la desigualdad

$$|F(x, y_0) - F(x, y)| < \varepsilon/3M|D|,$$

donde M es una constante que acota la función g, y $|D|$, el volumen del dominio D. En este caso, para $|y - y_0| < \delta$, tenemos

$$|V_2(y) - V_2(y_0)| \leqslant M \int\limits_{D \setminus K(y_0, \delta_1)} |F(x, y_0) - F(x, y)|\, dx \leqslant \varepsilon/3. \tag{9.79}$$

De las relaciones (9.77) — (9.79) se deduce que para $|(y - y_0| < \delta$,

$$|V(y) - V(y_0)| \leqslant |V_1(y)| + |V_1(y_0)| + |V_2(y)| - V_2(y_0)| < \varepsilon.$$

El teorema está demostrado.

Señalemos una condición suficiente de convergencia uniforme de la integral en un punto que se encuentra con mayor frecuencia en las aplicaciones.

Teorema 9.18. *Supongamos que una función $F(x, y)$ es continua en $\overline{D} \times \overline{D}$ para $x \neq y$, y la función $g(x)$ es uniformemente acotada en D. Admitamos que existen unas constantes λ, $0 < \lambda < m$, y $c > 0$ tales que para cualquier $x \in D$, $y \in D$ se verifique la desigualdad*

$$|F(x, y)| \leqslant c|x - y|^{-\lambda}. \tag{9.80}$$

En estas condiciones la integral (9.75) es uniformemente convergente respecto de y en cada punto $y_0 \in D$.

DEMOSTRACIÓN. Sea y_0 un punto arbitrario del dominio D. Es necesario demostrar que existe un $\delta > 0$ tal que para cualquier dominio cubicable $\omega \subset K(y_0, \delta)$ y todos los $y \in K(y_0, \delta)$ se cumpla la desigualdad

$$\left|\int\limits_{\omega} F(x, y)\, g(x)\, dx\right| < \varepsilon, \tag{9.81}$$

cualquiera que sea $\varepsilon > 0$.

Aplicando (9.80) y aprovechando el hecho de que $g(x)$ es acotada, obtenemos

$$\left|\int\limits_{\omega} F(x, y)\, g(x)\, dx\right| \leqslant c_1 \int\limits_{\omega} |x - y|^{-\lambda}\, dx.$$

Fijemos un punto $y \in K(y_0, \delta)$ y notemos que de la condición $\omega \subset K(y_0, \delta)$ se desprende una inclusión $\omega \subset K(y, 2\delta)$. Por consiguiente,

$$\left| \int_\omega F(x, y) g(x) \, dx \right| \leqslant c_1 \int_{K(y, 2\delta)} |x-y|^{-\lambda} \, dx. \tag{9.82}$$

Al pasar en la integral del miembro derecho en (9.82) a las coordenadas esféricas con centro en el punto y (véase cap. 2, § 5, p. 8°), obtendremos

$$\left| \int_\omega F(x, y) g(x) \, dx \right| \leqslant c_2 \int_0^{2\delta} r^{m-1-\lambda} \, dr = \frac{c_2 2^{m-\lambda}}{m-\lambda} \delta^{m-\lambda} = c_3 \delta^{m-\lambda}.$$

De aquí proviene que al elegir δ suficientemente pequeño, obtendremos la desigualdad (9.81). El teorema está demostrado.

3. Suplemento a la teoría del potencial newtoniano. Supongamos que en cierto punto $P_0(x, y, z)$ se ubica una masa m_0. De acuerdo con la ley de gravitación universal, la masa m ubicada en un punto $M(\xi, \eta, \zeta)$ se encuentra bajo el efecto de la fuerza

$$F = -\gamma \frac{m m_0}{R^2} \bar{r},$$

donde $R = \rho(P_0, M) = \sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 + (z-\zeta)^2}$; γ es la constante de gravitación universal; $\bar{r} = \vec{R}/R$ es el vector unidad cuya dirección coincide con la dirección del vector $\overline{P_0 M}$. Considerando $\gamma = 1$, y la masa $m = 1$, obtendremos la fuerza de la gravedad

$$F = -\frac{m_0}{R} \bar{r}.$$

Notemos que los componentes de esta fuerza tienen por expresión

$$X = -\frac{m_0}{R^3} (\xi - x),$$

$$Y = -\frac{m_0}{R^3} (\eta - y),$$

$$Z = -\frac{m_0}{R^3} (\zeta - z).$$

Es evidente que el potencial de la fuerza de gravedad, definido como una función escalar u tal que $F = \operatorname{grad} u$, es igual a

$$u = \frac{m_0}{R}.$$

Si la masa está concentrada no en el punto $P_0(x, y, z)$, sino viene distribuida por el dominio D con una densidad $\rho(x, y, z)$, entonces

para el potencial de la fuerza de gravedad y para los componentes de la fuerza de gravedad obtendremos las siguientes expresiones:

$$u(\xi, \eta, \zeta) = \iiint\limits_{D} \frac{\rho(x, y, z)}{R} \, dx \, dy \, dz, \tag{9.83}$$

$$\left.\begin{aligned} X &= -\iiint\limits_{D} \frac{\rho(x, y, z)}{R^3} (\xi - x) \, dx \, dy \, dz, \\ Y &= -\iiint\limits_{D} \frac{\rho(x, y, z)}{R^3} (\eta - y) \, dx \, dy \, dz, \\ Z &= -\iiint\limits_{D} \frac{\rho(x, y, z)}{R^3} (\zeta - z) \, dx \, dy \, dz. \end{aligned}\right\} \tag{9.84}$$

No es difícil mostrar que las integrales (9.84) representan derivadas parciales del potencial (9.83). Por cuanto las funciones subintegrales en las integrales (9.83) y (9.84) se mayorean mediante la función $\frac{C}{R^\lambda}$, donde $\lambda = 1$ para la integral (9.83), y $\lambda = 2$, para la integral (9.84), entonces, en virtud del teorema 9.18, las integrales citadas convergen uniformemente en cada punto $M(\xi, \eta, \zeta)$. Por consiguiente, de acuerdo con el teorema 9.17, estas integrales representan las funciones continuas del punto $M(\xi, \eta, \zeta)$.

Capítulo 10

SERIES E INTEGRAL DE FOURIER

Por el curso del álgebra lineal se conoce que si elegimos cierta base en un espacio lineal *de dimensión finita*, cualquier elemento del espacio lineal citado puede ser desarrollado según dicha base (y, además, de un modo único).

Un problema mucho más complejo consiste en elección de la base y en desarrollo según la base para el caso de espacio *de dimensión infinita*.

En este capítulo el problema planteado se estudia para el caso de los así llamados espacios euclídeos *de dimensión infinita* y para las bases de un tipo especial (llamadas bases *ortonormalizadas*).

Con una atención más circunstanciada se estudia una base formada en el espacio de todas las funciones continuas a trozos por el así llamado sistema *trigonométrico*.

El desarrollo de una función en la así llamada *serie de Fourier* [1]), estudiado en este capítulo, es una generalización de la idea del desarrollo de la función según una base.

Siempre en este capítulo la integral se entiende en el sentido de Riemann.

§ 1. Concepto de los sistemas ortonormalizados y de la serie general de Fourier

En el párrafo presente se examinará un espacio euclídeo arbitrario de dimensión *infinita* [2]). Para mayor conveniencia, aduzcamos la definición de espacio euclídeo.

Definición 1. *Un espacio lineal R se llama euclídeo, si se cumplen las siguientes dos exigencias:*

1) *se conoce la regla, de acuerdo con la cual a cualesquiera dos elementos f y g del espacio R se les pone en correspondencia un número denominado producto escalar de dichos elementos y denotado con el símbolo* (f, g);

2) *la regla citada satisface los siguientes axiomas:*

1°. $(f, g) = (g, f)$ (*propiedad conmutativa*).

2°. $(f + g, h) = (f, h) + (g, h)$ (*propiedad distributiva*)

---

[1]) J. Fourier (1772—1837), matemático francés.

[2]) Suele decirse que un espacio lineal es de *dimensión infinita*, si en dicho espacio existe un número cualquiera, prefijado de antemano, de elementos linealmente independientes.

3°. $(\lambda f, g) = \lambda (f, g)$ *para cualquier número real* λ.

4°. $(f, f) > 0$, *si* $f \neq 0$[1]), $(f, f) = 0$, *si* $f = 0$.

De ejemplo clásico de espacio euclídeo de dimensión infinita sirve *el espacio de todas las funciones continuas a trozos sobre cierto segmento* $a \leqslant x \leqslant b$.

Siempre en este capítulo entenderemos por función $f(x)$, continua a trozos sobre el segmento $[a, b]$, una función de tal índole que es continua en todo punto del segmento $[a, b]$, a excepción, quizás, de un número finito de puntos x_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$, en los cuales tiene discontinuidad de primera especie, con la particularidad de que en cada punto de discontinuidad x_i dicha función satisface la condición

$$f(x_i) = \frac{f(x_i - 0) + f(x_i + 0)}{2}. \tag{10.1}$$

Así pues, en este capítulo exigimos siempre que *la función continua a trozos* $f(x)$ *satisfaga en cada punto de discontinuidad* x_i *la condición* (10.1), *es decir, sea igual a la semisuma de los valores límites derecho e izquierdo*. Notemos que en cada punto, en el cual la función $f(x)$ es continua, la condición del tipo (10.1) es automáticamente válida.

Un producto escalar de dos elementos cualesquiera $f(x)$ y $g(x)$ del espacio de todas las funciones continuas a trozos sobre el segmento $a \leqslant x \leqslant b$ lo denotemos del modo siguiente

$$(f, g) = \int_a^b f(x) g(x)\, dx. \tag{10.2}$$

La existencia de la integral (10.2) de un producto de dos funciones continuas a trozos no causa dudas algunas. Es fácil comprobar la validez, para el producto escalar (10.2), de los axiomas 1°—4°. La validez del axioma 1° es evidente. La validez de los axiomas 2° y 3° se deduce de las propiedades lineales de la integral.

Detengámonos en la demostración del axioma 4°. Por cuanto es obvio que siempre $(f, f) = \int_a^b f^2(x)\, dx \geqslant 0$, basta mostrar que de la igualdad $(f, f) = \int_a^b f^2(x)\, dx = 0$ se deduce que $f(x) \equiv 0$, es decir, es un elemento nulo del espacio en consideración. Ya que $f(x)$ es una función continua a trozos sobre el segmento $[a, b]$, este último se

[1]) **0** denota el elemento nulo de un espacio lineal.

desintegra en un número finito de segmentos parciales $[x_{i-1}, x_i]$, en cada uno de los cuales $f(x)$[1]) es continua.

De la igualdad $\int\limits_a^b f^2(x)\,dx = 0$ se deduce que para cada segmento parcial $[x_{i-1}, x_i]$ también tenemos

$$\int\limits_{x_{i-1}}^{x_i} f^2(x)\,dx = 0. \tag{10.3}$$

Mas, de la igualdad (10.3) y de la continuidad de $f^2(x)$ sobre el segmento $[x_{i-1}, x_i]$ proviene que $f(x) \equiv 0$ en $[x_{i-1}, x_i]$[2]).

Por cuanto la última igualdad es válida para cada segmento parcial y en los puntos de discontinuidad rige la relación (10.1), entonces $f(x) \equiv 0$ en todo el segmento $[a, b]$. La validez del axioma 4° está establecida.

Con esto queda demostrado que el espacio de todas las funciones continuas a trozos sobre el segmento $[a, b]$ es espacio euclídeo con el producto escalar (10.2).

Establezcamos la siguiente propiedad general de cualquier espacio euclídeo.

Teorema 10.1. *En todo espacio euclídeo para cualesquiera dos elementos f y g se cumple la siguiente desigualdad*

$$(f, g)^2 \leqslant (f, f)\cdot(g, g), \tag{10.4}$$

llamada desigualdad de Cauchy—Buniakovski.

DEMOSTRACIÓN. Para cualquier número real λ

$$(\lambda f - g, \lambda f - g) \geqslant 0.$$

En virtud de los axiomas 1°—4°, la última desigualdad puede escribirse en la forma

$$\lambda^2\cdot(f, f) - 2\lambda\,(f, g) + (g, g) \geqslant 0.$$

La condición necesaria y suficiente para que el último trinomio cuadrado sea no negativo consiste en el carácter no positivo de su discriminante, es decir, en la desigualdad

$$(f, g)^2 - (f, f)\cdot(g, g) \leqslant 0. \tag{10.5}$$

De (10.5) se deduce en seguida (10.4). El teorema está demostrado.

---

[1]) En este caso los valores de $f(x)$ en los puntos de frontera x_{i-1} y x_i de cada segmento $[x_{i-1}, x_i]$ suponemos ser iguales a los valores límites de $f(x_{i-1}+0)$ y de $f(x_i-0)$, respectivamente.

[2]) Pues, en el § 6, cap. 1, v. II se ha demostrado que si una función es continua, no negativa y no igual a cero idénticamente sobre un segmento dado, la integral de dicha función extendida al segmento dado es superior a cero.

Nuestra tarea de turno es introducir en el espacio euclídeo que se considera el concepto de *norma* de cada elemento.

Pero, en primer lugar recordemos la definición de espacio normado lineal.

Definición 2. *Un espacio lineal R se llama normado, si se cumplen las siguientes dos exigencias:*

1) *se conoce la regla, por medio de la cual a todo elemento f del espacio R se le pone en correspondencia un número real llamado norma del elemento citado y denotado con el símbolo $\|f\|$;*

2) *la regla citada satisface los siguientes axiomas:*

1°. $\|f\| > 0$, *si* $f \neq 0$, $\|f\| = 0$, *si* $f = 0$.

2°. $\|\lambda f\| = |\lambda| \cdot \|f\|$ *para cualquier elemento f y todo número real λ.*

3°. *Para cualesquiera dos elementos f y g se cumple la siguiente desigualdad*

$$\|f+g\| \leqslant \|f\| + \|g\|, \tag{10.6}$$

llamada desigualdad triangular (o desigualdad de Minkowski).

Teorema 10.2. *Todo espacio euclídeo es normado, si la norma de cualquier elemento f en él definimos mediante la igualdad*

$$\|f\| = \sqrt{(f, f)}. \tag{10.7}$$

DEMOSTRACIÓN. Es suficiente convencerse de que para la norma definida por la relación (10.7) son válidos los axiomas 1°—3° de la definición 2.

La validez del axioma 1° se deduce en seguida del axioma 4° para un producto escalar. La validez del axioma 2° también se deduce casi directamente de los axiomas 1° y 3° para un producto escalar.

Resta por convencerse de la validez del axioma 3°, es decir, de la desigualdad (10.6). Apoyémonos en la desigualdad de Cauchy—Buniakovski (10.4) que escribamos en la forma

$$|(f, g)| \leqslant \sqrt{(f, f)} \cdot \sqrt{(g, g)}.$$

Con ayuda de la última desigualdad y los axiomas 1°—4° para un producto escalar y de la definición de norma (10.7), obtenemos

$$\|f+g\| = \sqrt{(f+g, f+g)} = \sqrt{(f, f) + 2(f, g) + (g, g)} \leqslant$$
$$\leqslant \sqrt{(f, f) + 2\sqrt{(f, f)} \cdot \sqrt{(g, g)} + (g, g)} =$$
$$= \sqrt{[\sqrt{(f, f)} + \sqrt{(g, g)}]^2} = \sqrt{(f, f)} + \sqrt{(g, g)} = \|f\| + \|g\|.$$

El teorema queda demostrado.

OBSERVACIÓN. Por supuesto, el producto escalar (y la norma) puede introducirse en cada espacio euclídeo de una manera no única. En lo que sigue nos será suficiente que en el espacio euclídeo en con-

sideración existe al menos un método de introducir un producto escalar. Al fijar el método, definiremos siempre la norma del espacio euclídeo en consideración mediante la relación (10.7). Por ejemplo, en un espacio de todas las funciones continuas a trozos sobre el segmento $[a, b]$ la norma se define, de conformidad con (10.2) mediante la ecuación

$$\| f \| = \sqrt{\int_a^b f^2(x)\,dx}, \tag{10.8}$$

y la desigualdad triangular (10.6) tiene por expresión

$$\sqrt{\int_a^b [f(x)+g(x)]^2\,dx} \leqslant \sqrt{\int_a^b f^2(x)\,dx} + \sqrt{\int_a^b g^2(x)dx}. \tag{10.9}$$

Introduzcamos el concepto de elementos *ortogonales* del espacio euclídeo dado.

Definición 3. *Dos elementos de un espacio euclídeo f y g se llaman ortogonales, si el producto escalar de estos elementos (f, g) es igual a cero.*

Veamos en un espacio euclídeo arbitrario R de dimensión finita una sucesión de elementos

$$\psi_1, \psi_2, \ldots \psi_n, \ldots \tag{10.10}$$

Definición 4. *La sucesión* (10.10) *se denomina sistema ortonormalizado, si los elementos que la integran son ortogonales dos a dos y tienen norma igual a la unidad.*

A título de ejemplo clásico de sistema ortonormalizado en el espacio de todas las funciones continuas a trozos sobre el segmento $-\pi \leqslant x \leqslant \pi$ sirve el así llamado *sistema trigonométrico*

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \quad \frac{\cos x}{\sqrt{\pi}}, \quad \frac{\operatorname{sen} x}{\sqrt{\pi}}, \ \ldots, \quad \frac{\cos nx}{\sqrt{\pi}}, \ \operatorname{sen}\frac{nx}{\sqrt{\pi}}, \ \ldots \tag{10.11}$$

El lector comprobará con facilidad que todas las funciones (10.11) son ortogonales dos a dos (en el sentido del producto escalar (10.2) tomado para $a = -\pi$, $b = \pi$) y que la norma de cada una de estas funciones (definida mediante la igualdad (10.7) para $a = -\pi$, $b = \pi$) es igual a la unidad.

En las matemáticas y sus aplicaciones se encuentran a menudo diferentes sistemas ortonormalizados de funciones (en los conjuntos correspondientes).

He aquí algunos ejemplos de tales sistemas.

1°. Polinomios definidos por la igualdad

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n \cdot n!} \frac{d^n[(x^2-1)^n]}{dx^n} \quad (n = 0, 1, 2, \ldots),$$

suelen llamarse *polinomios de Legendre*.

No es difícil convencerse de que las funciones

$$\psi_n(x)=\sqrt{\frac{2n+1}{2}}\cdot P_n(x) \quad (n=0,\ 1,\ 2,\ \ldots),$$

formadas con ayuda de estos polinomios, constituyen (sobre el segmento $-1\leqslant x\leqslant 1$) un sistema ortonormalizado de funciones.

2°. Los polinomios definidos mediante las igualdades $T_0(x)\equiv 1$, $T_n(x)=2^{1-n}\cos n(\arccos x)$ para $n=1,\ 2,\ \ldots$, llevan el nombre *de Chébishev*. Entre todos los polinomios de n-ésimo grado, cuyos coeficientes de x^n son iguales a la unidad, el polinomio de Chébishev $T_n(x)$ se caracteriza por el máximo del módulo más pequeño sobre el segmento $-1\leqslant x\leqslant 1$. Se puede mostrar que las funciones

$$\psi_0(x)=\frac{1}{\sqrt{\pi}\cdot\sqrt[4]{1-x^2}},$$

$$\psi_n(x)=\frac{2^{n-\frac{1}{2}}\cdot T_n(x)}{\sqrt{\pi}\cdot\sqrt[4]{1-x^2}} \quad (n=1,\ 2,\ \ldots),$$

obtenidas con ayuda del polinomio de Chébishev, forman un sistema ortonormalizado sobre el segmento $-1\leqslant x\leqslant 1$.

3°. En la teoría de las probabilidades se emplea frecuentemente el así llamado *sistema de Rademacher* [1])

$$\psi_n(x)=\varphi(2^n\cdot x) \quad (n=0,\ 1,\ 2,\ \ldots),$$

donde $\varphi(t)=\operatorname{sgn}(\operatorname{sen} 2\pi t)$.

Se puede demostrar que este sistema es ortonormalizado sobre el segmento $0\leqslant x\leqslant 1$.

4°. En una serie de investigaciones referentes a la teoría de funciones se emplea el así llamado *sistema de Haar* [2]) que es ortonormalizado sobre el segmento $0\leqslant x\leqslant 1$. Los elementos de este sistema $\chi_n^{(k)}(x)$ se definen, para todos los $n=0,\ 1,\ \ldots$, y para cualquier k que toma los valores $1,\ 2,\ 4,\ \ldots,\ 2^n$. Tienen por expresión

$$\chi_n^{(k)}(x)=\begin{cases}\sqrt{2^n} & \text{para } \dfrac{2k-2}{2^{n+1}}\leqslant x<\dfrac{2k-1}{2^{n+1}},\\ -\sqrt{2^n} & \text{para } \dfrac{2k-1}{2^{n+1}}<x\leqslant\dfrac{2k}{2^{n+1}},\\ 0 & \text{en los puntos restantes de } [0,\ 1].\end{cases}$$

Cada función de Haar representa un escalón del mismo tipo que la función $\sqrt{2^n}\operatorname{sgn} x$ sobre un segmento $[-2^{-(n+1)},\ 2^{-(n+1)}]$. Para cada número fijo n, este escalón se desplaza, al aumentar el valor de k, a la derecha. Fuera del escalón correspondiente cada función de Haar siempre es idénticamente igual a cero.

Supongamos que en un espacio euclídeo arbitrario R de dimensión infinita viene dado un sistema ortonormalizado arbitrario de elementos $\{\psi_k\}$. Veamos un elemento cualquiera f del espacio R.

---

[1]) H. Rademacher (n. 1892), matemático alemán.

[2]) A. Haar (1885—1933), matemático húngaro.

Definición 5. *Llamemos serie de Fourier del elemento f según el sistema ortonormalizado $\{\psi_k\}$ a una serie de la forma*

$$\sum_{k=1}^{\infty} f_k \psi_k, \tag{10.12}$$

en la que con f_k están designados números constantes llamados coeficientes de Fourier del elemento f y definidos mediante las igualdades

$$f_k = (f, \psi_k), \quad k = 1, 2, \ldots$$

Resulta natural denominar una suma finita

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} f_k \psi_k \tag{10.13}$$

n-ésima *suma parcial* de la serie de Fourier (10.12).

Examinemos, a la par con la n-ésima suma parcial (10.13), una combinación arbitraria de los primeros n elementos del sistema ortonormalizado $\{\psi_k\}$

$$\sum_{k=1}^{n} C_k \psi_k \tag{10.14}$$

con cualesquiera números constantes $C_1, C_2, \ldots, C_n$.

Aclaremos qué hace diferir la n-ésima suma parcial de la serie de Fourier (10.13) de las demás sumas (10.14).

Convengamos en llamar una magnitud $\| f - g \|$ *desviación* de g con relación a f (según la norma del espacio euclídeo dado).

Tiene lugar el siguiente teorema *fundamental*.

Teorema 10.3. *Entre todas las sumas de la forma* (10.14) *la desviación mínima con relación al elemento f en norma de un espacio euclídeo dado tiene la n-ésima suma parcial* (10.13) *de la serie de Fourier del elemento f.*

DEMOSTRACIÓN. Teniendo presente el carácter ortonormalizado del sistema $\{\psi_k\}$ y aprovechando los axiomas del producto escalar, podemos escribir

$$\left\| \sum_{k=1}^{n} C_k \psi_k - f \right\|^2 = \left(\sum_{k=1}^{n} C_k \psi_k - f, \ \sum_{k=1}^{n} C_k \psi_k - f \right) =$$

$$= \sum_{k=1}^{n} C_k^2 (\psi_k, \psi_k) - 2 \sum_{k=1}^{n} C_k (f, \psi_k) + (f, f) =$$

$$= \sum_{k=1}^{n} C_k^2 - 2 \sum_{k=1}^{n} C_k f_k + \| f \|^2 = \sum_{k=1}^{n} (C_k - f_k)^2 - \sum_{k=1}^{n} f_k^2 + \| f \|^2.$$

Así pues,

$$\left\| \sum_{k=1}^{n} C_k\psi_k - f \right\|^2 = \sum_{k=1}^{n} (C_k - f_k)^2 + \| f \|^2 - \sum_{k=1}^{n} f_k^2. \quad (10.15)$$

En el primer miembro de (10.15) figura el cuadrado de la desviación de la suma (10.14) con relación al elemento f (según la norma de un espacio euclídeo dado). La forma del segundo miembro de (10.15) deja constancia de que el citado cuadrado de desviación es mínimo cuando $C_k = f_k$ (pues, en este caso, la primera suma en el segundo miembro de (10.15) se anula, y los sumandos restantes en el segundo miembro de (10.15) no dependen de C_k). El teorema está demostrado.

Corolario 1. *Para un elemento arbitrario f del espacio euclídeo dado y cualquier sistema ortonormalizado $\{\psi_k\}$, siendo arbitraria la elección de las constantes C_k, se cumple la desigualdad*

$$\| f \|^2 - \sum_{k=1}^{n} f_k \leqslant \left\| \sum_{k=1}^{n} C_k\psi_k - f \right\|^2, \quad (10.16)$$

cualquiera que sea n.

La desigualdad (10.16) es un corolario inmediato de la identidad (10.15).

Corolario 2. *Para un elemento arbitrario f del espacio euclídeo dado, todo sistema ortonormalizado $\{\psi_k\}$ y cualquier número n, se verifica la igualdad*

$$\left\| \sum_{k=1}^{n} f_k\psi_k - f \right\|^2 = \| f \|^2 - \sum_{k=1}^{n} f_k^2. \quad (10.17)$$

llamada frecuentemente identidad de Bessel [1]).

Para demostrar la igualdad (10.17), basta poner en (10.15) $C_k = f_k$.

Teorema 10.4. *Para cualquier elemento f de un espacio euclídeo dado y todo sistema ortonormalizado $\{\psi_k\}$ se cumple la siguiente desigualdad*

$$\sum_{k=1}^{\infty} f_k^2 \leqslant \| f \|^2, \quad (10.18)$$

llamada desigualdad de Bessel.

DEMOSTRACIÓN. De lo que el primer miembro de (10.17) es no negativo se deduce que para *cualquier* número n

$$\sum_{k=1}^{n} f_k^2 \leqslant \| f \|^2. \quad (10.19)$$

---

[1]) F. Bessel (1784—1846), astrónomo y matemático alemán.

Pero, esto es indicio de que la serie de términos no negativos que figura en el primer miembro de (10.18) cuenta con una sucesión acotada de sumas parciales, por lo cual es convergente. Pasando en la desigualdad (10.19) al límite para $n \to \infty$ (véase teorema 3.13, v. I), obtendremos la desigualdad (10.18). El teorema está demostrado.

Volvamos, a título de ejemplo, al espacio de todas las funciones continuas a trozos sobre el segmento $-\pi \leqslant x \leqslant \pi$, y, en dicho espacio, a la serie de Fourier según el sistema trigonométrico (10.11) (esta serie suele llamarse *serie trigonométrica de Fourier*). Para cualquier función $f(x)$, continua a trozos sobre el segmento $-\pi \leqslant x \leqslant \pi$, la citada serie de Fourier tiene por expresión

$$\bar{f}_0 \frac{1}{\sqrt{2\pi}} + \sum_{k=1}^{\infty} \left(\bar{f}_k \frac{\cos kx}{\sqrt{\pi}} + \bar{\bar{f}}_k \frac{\operatorname{sen} kx}{\sqrt{\pi}} \right), \tag{10.20}$$

donde los coeficientes de Fourier $\bar{f}_k$ y $\bar{\bar{f}}_k$ se definen por las fórmulas

$$\bar{f}_0 = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\, dx,$$

$$\bar{f}_k = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos kx\, dx, \quad \bar{\bar{f}}_k = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \operatorname{sen} kx\, dx,$$

$$(k = 1,\ 2,\ \ldots).$$

La desigualdad de Bessel, válida para cualquier función $f(x)$, continua a trozos sobre el segmento $-\pi \leqslant x \leqslant \pi$, tiene por expresión

$$\bar{f}_0^2 + \sum_{k=1}^{\infty} (\bar{f}_k^2 + \bar{\bar{f}}_k^2) \leqslant \int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)\, dx. \tag{10.21}$$

La desviación de $f(x)$ con relación a $g(x)$ en la norma es igual en este caso a la así llamada desviación media cuadrática,

$$\| f - g \| = \sqrt{\int_{-\pi}^{\pi} [f(x) - g(x)]^2\, dx}. \tag{10.22}$$

Además, en la teoría de las series trigonométricas de Fourier está aceptada la forma de notación un poco diferente tanto para la propia serie de Fourier (10.20), como también para la desigualdad de Bessel (10.21). A saber, la serie trigonométrica de Fourier (10.20) se escribe, corrientemente, en la forma

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kx + b_k \operatorname{sen} kx), \tag{10.20'}$$

donde

$$\left.\begin{aligned} a_0 &= \frac{2\overline{f}_0}{\sqrt{2\pi}} = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx, \\ a_k &= \frac{\overline{f}_k}{\sqrt{\pi}} = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos kx\,dx, \\ b_k &= \frac{\overline{\overline{f}}_k}{\sqrt{\pi}} = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,\text{sen}\,kx\,dx \end{aligned}\right\} \qquad (10.23)$$

$$(k = 1,\ 2,\ \ldots)$$

Con tal forma de notación la desigualdad de Bessel (10.21) tiene por expresión

$$\frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k^2 + b_k^2) \leqslant \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)\,dx. \qquad (10.21')$$

OBSERVACIÓN. De la desigualdad de Bessel (10.21′) se deduce que para cualquier función $f(x)$, continua a trozos sobre el segmento $-\pi \leqslant x \leqslant \pi$, las magnitudes a_k y b_k (llamadas *coeficientes trigonométricos de Fourier* de la función $f(x)$) tienden a cero cuando $k \to \infty$ (en virtud de la condición necesaria de convergencia de la serie en el primer miembro de (10.21′)).

§ 2. Sistemas ortonormalizados cerrados y completos

Examinemos, al igual que en el párrafo antecedente, un sistema ortonormalizado arbitrario $\{\psi_k\}$ en un espacio euclídeo arbitrario R de dimensión infinita.

Definición 1. *Un sistema ortonormalizado* $\{\psi_k\}$ *se denomina cerrado, si para cualquier elemento* f *de un espacio euclídeo dado* R *y para todo número positivo* ε *existe tal combinación lineal* (10.14) *de un número finito de elementos de* $\{\psi_k\}$, *cuya desviación con relación a* f *(según la norma del espacio* R*) sea inferior a* ε.

Dicho de otro modo, el sistema $\{\psi_k\}$ se llama cerrado, si todo elemento f del espacio euclídeo dado R puede ser aproximado según la norma de este espacio con cualquier orden de exactitud mediante combinaciones lineales de un número finito de elementos de $\{\psi_k\}$.

OBSERVACIÓN 1. Omitimos la cuestión de si en cada espacio existen sistemas ortonormalizados cerrados. Notemos que en el capítulo 2 se estudia una subclase importante de espacios euclídeos, los así llamados espacios *de Hilbert*, y se establece la existencia en cada espacio de esta índole de los sistemas ortonormalizados cerrados.

Teorema 10.5. *Si un sistema ortonormalizado* $\{\psi_k\}$ *es cerrado, para cualquier elemento* f *del espacio euclídeo en consideración la desigualdad de Bessel* (10.18) *se convierte en una igualdad exacta*

$$\sum_{k=1}^{\infty} f_k^2 = \| f \|^2, \tag{10.24}$$

llamada igualdad de Parseval[1])

DEMOSTRACIÓN. Fijamos un elemento arbitrario f del espacio euclídeo en consideración y un número positivo arbitrario ε. Por cuanto el sistema $\{\psi_k\}$ es cerrado, existe tal número n y tales números $C_1, C_2, \ldots, C_n$, que el cuadrado de la norma que figura en el segundo miembro de (10.16) sea inferior a ε. En virtud de (10.16), esto significa que para $\varepsilon > 0$ arbitrario se encontrará un número n, para el cual

$$\| f \|^2 - \sum_{k=1}^{n} f_k^2 < \varepsilon. \tag{10.25}$$

Para todos los números que sobrepasan el número citado n, la desigualdad (10.25) será con mayor razón válida, pues, al crecer n, la suma en el primer miembro de (10.25) sólo puede aumentar.

Hemos demostrado, pues, que para $\varepsilon > 0$ arbitrario se encontrará un número n, a partir del cual queda válida la desigualdad (10.25).

Junto con la desigualdad (10.19) esto significa que la serie $\sum_{k=1}^{\infty} f_k^2$ converge hacia la suma $\| f \|^2$. El teorema está demostrado.

Teorema 10.6. *Si un sistema ortonormalizado* $\{\psi_k\}$ *es cerrado, entonces, cualquiera que sea un elemento* f, *la serie de Fourier de este elemento converge a él en la norma del espacio euclídeo en consideración, es decir,*

$$\lim_{n\to\infty} \left\| \sum_{k=1}^{n} f_k \psi_k - f \right\| = 0. \tag{10.26}$$

DEMOSTRACIÓN. La afirmación de este teorema se deduce inmediatamente de la igualdad (10.17) y del teorema anterior.

OBSERVACIÓN 2. En el espacio de todas las funciones continuas a trozos sobre el segmento $-\pi \leqslant x \leqslant \pi$ la convergencia en la norma (10.26) se convierte en la convergencia *en media* sobre dicho segmento (véase p. 3, § 2, cap. 1). De este modo, si demostramos el carácter cerrado del sistema trigonométrico (10.11), el teorema 10.6 afirmará que para toda función $f(x)$, continua a trozos sobre el segmento $-\pi \leqslant x \leqslant \pi$ la serie trigonométrica de Fourier de dicha función converge hacia la misma en media sobre el segmento dado.

Definición 2. *Un sistema ortonormalizado* $\{\psi_k\}$ *se denomina completo, si no existe (a excepción del elemento nulo) ningún otro elemento*

[1]) M. Parseval (m. en 1836), matemático francés.

f de un espacio euclídeo dado que sea ortogonal a todos los elementos ψ_k del sistema $\{\psi_k\}$.

De otras palabras, el sistema $\{\psi_k\}$ se denomina completo, si cada elemento f, ortogonal a todos los elementos ψ_k del sistema $\{\psi_k\}$ es elemento nulo.

Teorema 10.7. *Todo sistema ortonormalizado cerrado $\{\psi_k\}$ es completo.*

DEMOSTRACIÓN. Sea $\{\psi_k\}$ un sistema cerrado, y sea f, un elemento cualquiera del espacio euclídeo dado, ortogonal a todos los elementos ψ_k del sistema $\{\psi_k\}$.

Entonces, todos los coeficientes de Fourier f_k del elemento f con relación al sistema $\{\psi_k\}$ son nulos y, por lo tanto, en virtud de la ecuación de Parseval (10.24), también $\| f \| = 0$. La última igualdad (en virtud del axioma 1° para la norma) significa que $f = 0$. El teorema está demostrado.

OBSERVACIÓN 3. Hemos demostrado que en un espacio euclídeo arbitrario el carácter cerrado del sistema predetermina la completitud de éste. En el cap. 11 se dará un ejemplo a mostrar que en un espacio euclídeo arbitrario de la completitud de un sistema ortonormalizado no proviene, en el caso general, el carácter cerrado del sistema mencionado. Demostraremos, además, que para una clase muy importante de espacios euclídeos (los así llamados espacios de Hilbert) la completitud del sistema ortonormalizado es equivalente a su carácter cerrado.

Teorema 10.8. *Para todo sistema ortonormalizado completo (y, con mayor, para todo sistema cerrado) $\{\psi_k\}$, dos elementos diferentes f y g del espacio euclídeo en consideración no pueden tener las series de Fourier iguales.*

DEMOSTRACIÓN. Si todos los coeficientes de Fourier de los elementos f y g coincidieran, todos los coeficientes de Fourier de la diferencia $f - g$ serían iguales a cero, es decir, la diferencia $f - g$ sería ortogonal a todos los elementos ψ_k del sistema completo $\{\psi_k\}$. Mas, esto significaría que la diferencia $f - g$ es un elemento nulo, es decir, los elementos f y g coinciden. El teorema está demostrado.

Con esto finalizamos el examen de la serie general de Fourier con relación al sistema ortonormalizado arbitrario en cualquier espacio euclídeo.

Nuestro objetivo de turno consiste en el estudio detallado de la serie de Fourier con relación al sistema trigonométrico (10.11).

§ 3. Carácter cerrado del sistema trigonométrico y corolarios

1. Aproximación uniforme de una función continua mediante polinomios trigonométricos. En este párrafo se establecerá el carácter cerrado (y, por consiguiente, la completitud) del sistema trigonomé-

trico (10.11) en el espacio de todas las funciones continuas a trozos sobre el segmento $-\pi \leqslant x \leqslant \pi$. Pero, antes de proceder con la demostración del carácter cerrado del sistema trigonométrico, demos a conocer un teorema importante sobre la aproximación uniforme de una función continua mediante los así llamados polinomios trigonométricos.

Llamemos *polinomio trigonométrico* a una combinación lineal arbitraria de cualquier número finito de elementos del sistema (10.11), es decir, una expresión de la forma

$$T(x) = \overline{C}_0 + \sum_{k=1}^{n} (\overline{C}_k \cos kx + \overline{\overline{C}}_k \operatorname{sen} kx),$$

donde n es un número cualquiera, y $\overline{C}_k$, $\overline{\overline{C}}_k$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$ son números reales constantes arbitrarios.

He aquí dos *afirmaciones* sumamente elementales:

1°. *Si $P(x)$ es un polinomio algebraico cualquiera de grado arbitrario n, $P(\cos x)$ y $P(\operatorname{sen} x)$ son polinomios trigonométricos.*

2°. *Si $T(x)$ es un polinomio trigonométrico, cada una de las expresiones $T(x)\cdot\operatorname{sen} x$ y $T(x)\cdot\operatorname{sen}^2 x$ también será un polinomio trigonométrico.*

Ambas afirmaciones se deducen de lo que un producto de dos (y, por eso, de cualquier número finito) funciones trigonométricas [1] del argumento x se reduce a una combinación lineal de un número finito de funciones trigonométricas de los argumentos del tipo kx (que el mismo lector se cerciore de esto).

En la teoría de las series trigonométricas de Fourier un papel importante desempeña el concepto de función *periódica*.

Una función $f(x)$ se denomina periódica de período T, si: 1) $f(x)$ está definida para todos los números reales x; 2) para todo x real se verifica la igualdad

$$f(x+T) = f(x).$$

Esta igualdad se llama, de ordinario, *condición de periodicidad*. Al análisis de las funciones periódicas conduce el estudio de diferentes procesos oscilantes.

Notemos que todos los elementos del sistema trigonométrico (10.11) son funciones periódicas de período 2π.

Es válido el siguiente teorema *principal*.

***Teorema 10.9* (teorema de Weierstrass).** *Si una función $f(x)$ es continua sobre el segmento $[-\pi, \pi]$ y satisface la condición $f(-\pi) = f(\pi)$, dicha función puede aproximarse uniformemente sobre el citado segmento mediante polinomios trigonométricos*, es decir, para $f(x)$ y para cualquier número positivo ε existe un polinomio trigonométrico $T(x)$ de tal índole que simultáneamente para todos los x del seg-

[1] Por funciones trigonométricas se entienden en este caso el coseno o seno.

mento $[-\pi, \pi]$ se cumpla una desigualdad

$$| f(x) - T(x) | < \varepsilon. \tag{10.27}$$

DEMOSTRACIÓN. Realicemos la demostración en dos etapas.

1°. Al principio supongamos adicionalmente que la función $f(x)$ es *par*, es decir, para todo x del segmento $[-\pi, \pi]$ satisface la condición $f(-x) = f(x)$.

En virtud del teorema de continuidad de una función compuesta $y = f(x)$, donde $x = \arccos t$ (véase § 7, cap. 4, v. I), la función $F(t) = f(\arccos t)$ es función continua del argumento t sobre el segmento $-1 \leqslant t \leqslant 1$. Por consiguiente, de acuerdo con el teorema de Weierstrass, para los polinomios algebraicos (véase teorema 1.18 del cap. 1) existe, dado un $\varepsilon > 0$ cualquiera, un polinomio algebraico $P(t)$ tal que $| f(\arccos t) - P(t) | < \varepsilon$ simultáneamente para todos los t del segmento $-1 \leqslant t \leqslant 1$.

Al poner $t = \cos x$, obtendremos

$$| f(x) - P(\cos x) | < \varepsilon \tag{10.28}$$

simultáneamente para todos los x del segmento $0 \leqslant x \leqslant \pi$.

Por cuanto ambas funciones $f(x)$ y $P(\cos x)$ son *pares*, la desigualdad (10.28) será también válida para todos los x del segmento $-\pi \leqslant x \leqslant 0$. De este modo, la desigualdad (10.28) se cumple para todos los x del segmento $-\pi \leqslant x \leqslant \pi$, y, por ser $P(\cos x)$ (en virtud de la afirmación 1° aducida más arriba) un polinomio trigonométrico, el teorema queda demostrado para la función par $f(x)$.

Notemos ahora que la función $f(x)$ que satisface las condiciones del teorema en consideración puede ser prolongada con el período 2π a toda la recta infinita $-\infty < x < \infty$ de un modo tal que la función prolongada sea continua en cada punto x de la recta infinita. Si la función $f(x)$ es prolongada precisamente de este modo, entonces, por cuanto $P(\cos x)$ es también función periódica del período 2π, llegamos a que *para la función par $f(x)$ la desigualdad* (10.28) *se cumple en todo punto de la recta infinita* $-\infty < x < \infty$.

2°. Ahora, sea $f(x)$ una función sumamente arbitraria que satisface las condiciones del teorema que se demuestra. Haremos prolongar con el período 2π dicha función a toda la recta infinita y formemos con ayuda de ella las siguientes dos funciones *pares*:

$$f_1(x) = \frac{f(x) + f(-x)}{2}, \tag{10.29}$$

$$f_2(x) = \frac{f(x) - f(-x)}{2} \operatorname{sen} x. \tag{10.30}$$

Según lo demostrado en el punto 1°, existen para $\varepsilon > 0$ cualquiera los polinomios trigonométricos $T_1(x)$ y $T_2(x)$ de tal índole que en cada punto de la recta infinita

$$| f_1(x) - T_1(x) | < \varepsilon/4, \quad | f_2(x) - T_2(x) | < \varepsilon/4,$$

y, por eso,

$$| f_1(x) \operatorname{sen}^2 x - T_1(x) \operatorname{sen}^2 x | < \varepsilon/4,$$
$$| f_2(x) \operatorname{sen} x - T_2(x) \operatorname{sen} x | < \varepsilon/4.$$

Al sumar dos últimas desigualdades, teniendo en cuenta que el módulo de una suma de dos magnitudes no sobrepasa la suma de sus módulos, llegamos a que (tomando en consideración las igualdades (10.29) y (10.30)) en cada punto de la recta infinita se cumple la desigualdad

$$| f(x) \operatorname{sen}^2 x - T_3(x) | < \varepsilon/2, \tag{10.31}$$

en la cual con $T_3(x)$ está designado un polinomio trigonométrico igual a $T_3(x) = T_1(x) \operatorname{sen}^2 x + T_2(x) \operatorname{sen} x$.

En los razonamientos realizados podemos en lugar de la función $f(x)$ tomar la función $f(x + \pi/2)$[1]. Por analogía completa con (10.31) obtenemos que para la función $f(x + \pi/2)$ se encontrará un polinomio trigonométrico $T_4(x)$ tal que en cada punto de la recta infinita se verifique la desigualdad

$$| f(x + \pi/2) \operatorname{sen}^2 x - T_4(x) | < \varepsilon/2. \tag{10.32}$$

Sustituyendo en (10.32) x por $x - \pi/2$, y denotando con $T_5(x)$ el polinomio trigonométrico del tipo $T_5(x) = T_4(x - \pi/2)$, concluimos que en cada punto de la recta infinita se cumple la desigualdad

$$| f(x) \cos^2 x - T_5(x) | < \varepsilon/2. \tag{10.33}$$

Por fin, al sumar las desigualdades (10.31) y (10.33) y al designar con $T(x)$ un polinomio del tipo $T(x) = T_4(x) + T_5(x)$, llegamos a que en todo punto de la recta infinita se cumple la desigualdad (10.27). El teorema está demostrado.

OBSERVACIÓN. Cada una de las condiciones 1) de continuidad de $f(x)$ sobre el segmento $[-\pi, \pi]$, 2) de igualdad de los valores $f(-\pi)$ y $f(\pi)$ *es necesaria* para que la función $f(x)$ pueda aproximarse uniformemente sobre el segmento $-\pi \leqslant x \leqslant \pi$ mediante polinomios trigonométricas.

Dicho de otro modo, el teorema de Weierstrass podemos formular del modo siguiente: *para que la función $f(x)$ pueda aproximarse uniformemente sobre el segmento $[-\pi, \pi]$ mediante polinomios trigonométricos, es necesario y suficiente que la función $f(x)$ sea continua sobre el segmento $[-\pi, \pi]$ y satisfaga la condición $f(-\pi) = f(\pi)$.*

La suficiencia constituye el contenido del teorema 10.9.

Detengámonos en la demostración de la *necesidad*. Supongamos que existe una sucesión de polinomios trigonométricos $\{T_n(x)\}$

---

[1]) Pues, esta función satisface las mismas condiciones que la función $f(x)$ obtenida después de la prolongación.

que converge uniformemente sobre el segmento $[-\pi, \pi]$ hacia la función $f(x)$. Por cuanto toda función $T_n(x)$ es continua sobre el segmento $[-\pi, \pi]$, de acuerdo con el teorema 1.8, la función $f(x)$ es también continua en el mismo segmento. Para cualquier $\varepsilon > 0$ se encontrará un polinomio $T_n(x)$ tal que $|f(x) - T_n(x)| < \varepsilon/2$ para todos los x del segmento $[-\pi, \pi]$. Por consiguiente,

$$|f(-\pi) - T_n(-\pi)| < \varepsilon/2, \quad |f(\pi) - T_n(\pi)| < \varepsilon/2.$$

De las últimas dos desigualdades y de la igualdad $T_n(-\pi) = T_n(\pi)$, que se deduce de la condición de periodicidad (con el período 2π), concluimos que $|f(-\pi) - f(\pi)| < \varepsilon$, de donde $f(-\pi) = f(\pi)$ (en virtud de que $\varepsilon > 0$ es arbitrario).

2. Demostración del carácter cerrado del sistema trigonométrico. Apoyándonos en el teorema de Weierstrass, demostremos el siguiente teorema fundamental.

Teorema 10.10. *El sistema trigonométrico* (10.11) *es cerrado* [1]), es decir, para cualquier función $f(x)$, continua a trozos sobre el segmento $[-\pi, \pi]$ y para todo número positivo ε existe un polinomio trigonométrico $T(x)$ tal que se verifique la desigualdad

$$\| f(x) - T(x) \| = \sqrt{\int_{-\pi}^{\pi} [f(x) - T(x)]^2 \, dx} < \varepsilon. \qquad (10.34)$$

DEMOSTRACIÓN. Notemos, ante todo, que para cualquier función $f(x)$, continua a trozos sobre el segmento $[-\pi, \pi]$, y para todo $\varepsilon > 0$ existe una función $F(x)$, continua sobre el mismo segmento, que satisface la condición $F(-\pi) = F(\pi)$ y que es de tal índole que

$$\| f(x) - F(x) \| = \sqrt{\int_{-\pi}^{\pi} [f(x) - F(x)]^2 \, dx} < \varepsilon/2. \qquad (10.35)$$

Efectivamente, basta tomar una función $F(x)$ coincidente con $f(x)$ siempre, a excepción de los entornos (suficientemente pequeños) de los puntos de discontinuidad de $f(x)$ y del punto $x = \pi$, y elegir $F(x)$ en los entornos mencionados como función lineal de un modo tal que $F(x)$ sea continua en todo el segmento $[-\pi, \pi]$ y satisfaga la condición $F(-\pi) = F(\pi)$.

Por cuanto una función continua a trozos y una función lineal que la corta son acotadas, entonces, al elegir los entornos citados de los puntos de discontinuidad de $f(x)$ y del punto $x = \pi$ suficientemente pequeños, aseguramos el cumplimiento de las desigualdades (10.35).

Según el teorema de Weierstrass 10.9, para la función $F(x)$ se encontrará un polinomio trigonométrico $T(x)$ tal que para todo x

---

[1]) Y, por consiguiente (en virtud del teorema 10.7), también *completo*.

del segmento $[-\pi, \pi]$ se cumpla la desigualdad

$$|F(x) - T(x)| \leqslant \varepsilon/2\sqrt{2\pi}. \tag{10.36}$$

De (10.35) concluimos que

$$\|F(x)-T(x)\| = \sqrt{\int_{-\pi}^{\pi} [F(x)-T(x)]^2\,dx} \leqslant \varepsilon/2. \tag{10.37}$$

De (10.35), (10.37) y de la desigualdad triangular para las normas

$$\|f(x) - T(x)\| \leqslant \|f(x) - F(x)\| + \|F(x) - T(x)\|$$

se deduce la desigualdad (10.34). El teorema está demostrado.

OBSERVACIÓN 1. De los teoremas 10.10 y 10.7 se deduce en seguida que *el sistema trigonométrico* (10.11) *es completo*. De aquí proviene, a su vez, que *el sistema* $\left\{\sqrt{\frac{2}{\pi}}\,\text{sen}\,nx\right\}$ $(n = 1, 2, \ldots)$ *es completo en el conjunto de todas las funciones, continuas a trozos sobre el segmento* $[0, \pi]$ (*o sobre el segmento* $[-\pi, 0]$, *respectivamente*). En efecto, cualquier función $f(x)$ continua a trozos sobre el segmento $[0, \pi]$, ortogonal en este segmento a todos los elementos del sistema $\left\{\sqrt{\frac{2}{\pi}}\,\text{sen}\,nx\right\}$, siendo prolongada al segmento $[-\pi, 0]$, resulta ser ortogonal sobre $[-\pi, \pi]$ a *todos* los elementos del sistema trigonométrico (10.11). Por ser el sistema (10.11) completo, dicha función es igual a cero en $[-\pi, \pi]$, y, por lo tanto, también en $[0, \pi]$. De un modo sumamente análogo se demuestra que *el sistema* $\frac{1}{\sqrt{\pi}}$, $\sqrt{\frac{2}{\pi}}\cos nx$ $(n = 1, 2, \ldots)$ *es completo en el conjunto de todas las funciones continuas a trozos sobre el segmento* $[0, \pi]$ (o sobre el segmento $[-\pi, 0]$, respectivamente).

OBSERVACIÓN 2. Se puede mostrar que entre los sistemas ortonormalizados mencionados en el § 1 los sistemas formados con ayuda de los polinomios de Legendre, polinomios de Chébishev y de las funciones de Haar, son cerrados, mientras que el sistema de Rademacher no es cerrado.

3. Corolarios del carácter cerrado de un sistema trigonométrico.

Corolario 1. *Para cualquier función* $f(x)$, *continua a trozos sobre el segmento* $[-\pi, \pi]$, *se verifica la igualdad de Parseval*

$$\frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k^2 + b_k^2) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)\,dx \tag{10.38}$$

(se deduce del teorema 10.5).

Corolario 2. *Una serie trigonométrica de Fourier de cualquier función* $f(x)$, *continua a trozos sobre el segmento* $[-\pi, \pi]$, *converge hacia esta función en media sobre el segmento citado* (se deduce del teorema 10.6 y la Observación 2 al mismo).

Corolario 3. *Una serie trigonométrica de Fourier de cualquier función $f(x)$, continua a trozos sobre el segmento $[-\pi, \pi]$, puede integrarse sobre dicho segmento término a término* (se deduce del corolario antecedente y del teorema 1.11 del cap. 1).

Corolario 4. *Si dos funciones $f(x)$ y $g(x)$, continuas a trozos sobre el segmento $[-\pi, \pi]$, tienen series trigonométricas de Fourier iguales, dichas funciones coinciden en todos los puntos de este segmento* (se deduce del teorema 10.8).

Corolario 5. *Si la serie trigonométrica de Fourier de una función $f(x)$, continua a trozos sobre el segmento $[-\pi, \pi]$, es uniformemente convergente sobre cierto segmento $[a, b]$ contenido en $[-\pi, \pi]$, es convergente sobre el segmento $[a, b]$ precisamente hacia la función $f(x)$.*

DEMOSTRACIÓN. Supongamos que $F(x)$ es una función, hacia la cual converge uniformemente sobre $[a, b]$ la serie trigonométrica de Fourier de la función $f(x)$. Demostremos que $F(x) \equiv f(x)$ en todo punto del segmento $[a, b]$. Por cuanto de la convergencia uniforme sobre el segmento $[a, b]$ se deduce la convergencia en media sobre dicho segmento (véase cap. 1, § 2, p. 3), la serie trigonométrica de Fourier de la función $f(x)$ converge hacia la función $F(x)$ en media sobre el segmento $[a, b]$. Esto significa que para $\varepsilon > 0$ arbitrario se encontrará un número n_1, a partir del cual la n-ésima suma parcial de la serie trigonométrica de Fourier $S_n(x)$ satisface la desigualdad

$$\|F(x) - S_n(x)\| = \sqrt{\int_a^b [F(x) - S_n(x)]^2 \, dx} < \varepsilon/2. \quad (10.39)$$

Por otra parte, en virtud del corolario 2, la sucesión $S_n(x)$ converge hacia $f(x)$ en media sobre todo el segmento $[-\pi, \pi]$, y, por consiguiente, también en el segmento $[a, b]$, es decir, para $\varepsilon > 0$ arbitrario fijo existe un número n_2, a partir del cual se verifica la igualdad

$$\| S_n(x) - f(x) \| = \sqrt{\int_a^b [S_n(x) - f(x)]^2 \, dx} < \varepsilon/2. \quad (10.40)$$

De (10.39), (10.40) y de la desigualdad triangular

$$\|F(x) - f(x)\| \leqslant \| F(x) - S_n(x) \| + \| S_n(x) - f(x) \|$$

proviene que $\| F(x) - f(x) \| < \varepsilon$. De la última desigualdad y de la arbitrariedad de $\varepsilon > 0$ se deduce que $\| F(x) - f(x) \| = 0$, y de aquí concluimos, de acuerdo con el primer axioma para la norma, que $F(x) - f(x)$ es *un elemento nulo* del espacio de funciones continuas a trozos sobre $[a, b]$, es decir, una función que en el segmento $[a, b]$ es idénticamente igual a cero. El corolario 5 está demostrado.

OBSERVACIÓN 1. Por supuesto, en el corolario 5 el segmento $[a, b]$ puede coincidir con todo el segmento $[-\pi, \pi]$, es decir, *de la conver-*

gencia uniforme de la serie de Fourier de la función $f(x)$ en todo el segmento $[-\pi, \pi]$ se deduce que la serie citada converge sobre dicho segmento precisamente hacia la función $f(x)$.

OBSERVACION 2. Los corolarios perfectamente análogos serán válidos también para una serie de Fourier respecto de cualquier otro sistema ortonormalizado en el espacio de funciones, continuas a trozos sobre un segmento arbitrario $[a, b]$, dotado del producto escalar (10.2) y norma (10.8). Como ejemplos de tales sistemas pueden servir sistemas ortonormalizados ligados con los polinomios de Legendre y Chébishev, como también el sistema de Haar, mencionados todos en el § 1.

§ 4. Condiciones más simples de convergencia uniforme y de diferenciación término a término de una serie trigonométrica de Fourier

1. Notas de introducción. En la física matemática y en una serie de otros apartados de las matemáticas es de papel esencial una cuestión sobre las condiciones cuyo cumplimiento asegura la convergencia de una serie trigonométrica de Fourier de la función $f(x)$ en un punto dado x del segmento $[-\pi, \pi]$ hacia la citada función.

Ya al final del siglo pasado se sabía que existen funciones, continuas sobre el segmento $[-\pi, \pi]$, que satisfacen la condición $f(-\pi) = f(\pi)$, cuyas series trigonométricas de Fourier divergen en un punto dado con anticipación del segmento $[-\pi, \pi]$ (o, incluso, divergen en un conjunto infinito de puntos del segmento $[-\pi, \pi]$, siempre denso sobre dicho segmento) [1]).

De este modo, una sola continuidad de la función $f(x)$ sobre el segmento $[-\pi, \pi]$ no asegura sin condiciones complementarias no sólo convergencia uniforme de la serie trigonométrica de Fourier de esta función, sino tampoco la convergencia de la serie mencionada en un punto prefijado de antemano del segmento indicado.

En este párrafo y en los siguientes párrafos aclaremos cuáles son las exigencias que han de ser sumadas a la continuidad de la función $f(x)$ (o introducidas en lugar de la continuidad de la función $f(x)$) con el fin de asegurar la convergencia de la serie trigonométrica de Fourier de dicha función en un punto dado y, además, asegurar la convergencia uniforme de la citada serie en todo el segmento $[-\pi, \pi]$, o en alguna parte del mismo.

En el estudio de la convergencia de la serie trigonométrica de Fourier surge también otra pregunta: ¿Ha de ser convergente *por lo menos en un solo punto* del segmento $[-\pi, \pi]$ la serie de Fourier de cualquier función $f(x)$, continua a trozos (o, incluso, estrictamente continua) sobre el segmento mencionado?

---

[1]) El primer ejemplo de tal función fue construido en 1876 por P. du Bois-Reymond, matemático francés.

La respuesta positiva a la pregunta levantada fue obtenida sólo en el año 1966.

Esta respuesta constituye un corolario del teorema fundamental demostrado en 1966 por L. Carleson[1]) quien resolvió el problema famoso de N. N. Luzin[2]) planteado aún en 1914: *la serie trigonométrica de Fourier de cualquier función $f(x)$, para la cual existe una integral* $\int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)\,dx$, *entendida en el sentido de Lebesgue, converge hacia esta función casi en todo punto del segmento* $[-\pi, \pi]$ [3]).

Del teorema de Carleson se desprende que la serie de Fourier no sólo de cualquier función continua a trozos, sino también de cualquier función $f(x)$ integrable sobre el segmento $[-\pi, \pi]$ en el sentido propio de Riemann, converge hacia dicha función casi en todo punto del segmento $[-\pi, \pi]$ (pues, para tal función existe una integral $\int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)\,dx$ en el sentido de Riemann y, por lo tanto, también en el sentido de Lebesgue).

Notemos que si una función $f(x)$ es integrable sobre el segmento $[-\pi, \pi]$ no en el sentido de Riemann, sino sólo en el de Lebesgue, la serie trigonométrica de Fourier de esta función puede fallar de ser convergente en todos los puntos del segmento $[-\pi, \pi]$. El primer ejemplo de la función $f(x)$, integrable sobre el segmento $[-\pi, \pi]$ en el sentido de Lebesgue, con la serie trigonométrica de Fourier divergente en todos los puntos fue construido en el año 1923 por el matemático soviético A. N. Kolmogórov [4]).

2. Condiciones más simples de convergencia absoluta y uniforme de una serie trigonométrica de Fourier. Convengamos en usar la siguiente terminología.

Definición 1. *Diremos que una función $f(x)$ tiene sobre el segmento $[a, b]$ una derivada continua a trozos, si la derivada $f'(x)$ existe y es continua en todo punto del segmento $[a, b]$, a excepción, quizás, de un*

---

[1]) L. Carleson, matemático sueco contemporáneo. La demostración completa del teorema de Carleson se la puede encontrar en la colección de artículos traducidos «Matemáticas», v. II, No. 4, 1967, págs. 113—132.

[2]) N. N. Luzin, matemático soviético, fundador de la escuela matemática moderna de Moscú concerniente a la teoría de funciones (1883—1950). El planteamiento del problema de Luzin resuelto por Carleson y de otros problemas puede encontrarse en el libro de Luzin «Integral y serie trigonométrica», Moscú — Leningrado, Gostejizdat, 1951.

[3]) Véase en el cap. 8, de este libro la definición de la integral en el sentido de Lebesgue y de la convergencia casi en todo punto sobre un segmento dado.

[4]) Se puede encontrar la construcción del ejemplo de Kolmogórov en las págs. 412—421 del libro de N. K. Bari «Series trigonométricas», Moscú, Fizmatguiz, 1961.

numero finito de puntos, en cada uno de los cuales la función $f'(x)$ tiene valores límites finitos derecho e izquierdo [1]).

Definición 2. *Diremos que una función $f(x)$ tiene sobre el segmento $[a, b]$ una derivada continua a trozos de orden $n \geqslant 1$, si la función $f^{n-1}(x)$ tiene en este segmento una derivada continua a trozos en el sentido de la definición* 1.

Resulta válido el siguiente teorema fundamental.

Teorema 10.11. *Si una función $f(x)$ es continua sobre el segmento $[-\pi, \pi]$, tiene en el mismo derivada continua a trozos y satisface la condición $f(-\pi) = f(\pi)$, la serie trigonométrica de Fourier de la función $f(x)$ converge hacia esta función uniformemente sobre el segmento $[-\pi, \pi]$. Más aún, una serie formada por los módulos de los términos de la serie trigonométrica de Fourier de la función $f(x)$ es en $[-\pi, \pi]$ uniformemente convergente.*

DEMOSTRACIÓN. Basta demostrar que la serie compuesta por los módulos de los términos de la serie trigonométrica de Fourier de la función $f(x)$

$$\frac{|a_0|}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \{|a_k \cos kx| + |b_k \operatorname{sen} kx|\} \tag{10.41}$$

converge uniformemente sobre el segmento $[-\pi, \pi]$, pues de aquí proviene tanto la convergencia uniforme en $[-\pi, \pi]$ de la propia serie trigonométrica de Fourier de la función $f(x)$, como la convergencia de la citada serie (en virtud del corolario 5 del p. 3, § 4) precisamente hacia la función $f(x)$.

En virtud del criterio de Weierstrass (véase el teorema 1.4 del cap. 1), para demostrar la convergencia uniforme sobre el segmento $[-\pi, \pi]$ de la serie (10.41), es suficiente probar la convergencia de la serie numérica

$$\sum_{k=1}^{\infty} \{|a_k| + |b_k|\} \tag{10.42}$$

que la mayora.

Denotemos con α_k y β_k los coeficientes trigonométricos de Fourier de la función $f'(x)$, al definirla adicionalmente de un modo arbitrario en un número finito de puntos, en los cuales no existe derivada de la función $f(x)$ [2]).

Realizando la integración por partes y teniendo presente que la función $f(x)$ es continua en todo el segmento $[-\pi, \pi]$ y satisface la relación $f(-\pi) = f(\pi)$, obtendremos las siguientes relaciones que

---

[1]) En este caso la función $f'(x)$ puede resultar no definida en un número finito de puntos del segmento $[a, b]$. En estos puntos la definamos adicionalmente de un modo arbitrario (por ejemplo, pongamos igual a la semisuma de valores límites derecho e izquierdo).

[2]) Por ejemplo, en los puntos citados podemos poner la función $f'(x)$ igual a la semisuma de valores límites derecho e izquierdo.

ligan los coeficientes trigonométricos de Fourier de la función $f'(x)$ con la propia función $f(x)$[1]):

$$\alpha_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f'(x)\cos kx\,dx = k\cdot\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\operatorname{sen} kx\,dx = k\cdot b_k,$$

$$\beta_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f'(x)\operatorname{sen} kx\,dx = -k\cdot\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos kx\,dx = -k\cdot a_k.$$

De este modo,

$$|a_k| + |b_k| = \frac{|\alpha_k|}{k} + \frac{|\beta_k|}{k},$$

y para demostrar la convergencia de la serie (10.42), resulta suficiente demostrar la convergencia de la serie

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left\{\frac{|\alpha_k|}{k} + \frac{|\beta_k|}{k}\right\}. \tag{10.43}$$

La convergencia de la serie (10.43) se deduce de las desigualdades elementales [2])

$$\begin{aligned}\frac{|\alpha_k|}{k} &\leqslant \frac{1}{2}\left(\alpha_k^2 + \frac{1}{k^2}\right),\\ \frac{|\beta_k|}{k} &\leqslant \frac{1}{2}\left(\beta_k^2 + \frac{1}{k^2}\right)\end{aligned} \tag{10.44}$$

y de la convergencia de las series

$$\sum_{k=1}^{\infty}(\alpha_k^2 + \beta_k^2), \qquad \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2}, \tag{10.45}$$

la primera de las cuales converge en virtud de la igualdad de Parseval para una función continua a trozos $f'(x)$, y la segunda, en virtud del criterio integral de Cauchy—Maclaurin (véase § 2, cap. 4, v. II). El teorema está demostrado.

OBSERVACIÓN. Si prolongamos una función $f(x)$ que satisface las condiciones del teorema 10.11 a toda la recta infinita del modo

[1]) Al integrar por partes, se debe dividir el segmento $[-\pi, \pi]$ en un número finito de segmentos parciales (que no tengan puntos interiores comunes), sobre cada uno de los cuales la derivada $f'(x)$ es continua, y, escogiendo la fórmula de integración por partes para cada uno de estos segmentos parciales, tomar en consideración que al sumar las integrales respecto de todos los segmentos parciales, todas las sustituciones se reducen a cero (en vista de la continuidad de $f(x)$ sobre todo el segmento $[-\pi, \pi]$ y debido a las condiciones $f(-\pi) = f(\pi)$.

[2]) Partimos de la desigualdad elemental $|a|\cdot|b| \leqslant \frac{1}{2}(a^2 + b^2)$ que proviene de lo que la magnitud $(|a| - |b|)^2$ es no negativa.

periódico (con el período 2π), el teorema 10.11 afirmará la convergencia de la serie trigonométrica de Fourier hacia la función prolongada del modo indicado, la cual *es uniforme en toda la recta infinita.*

3. Condiciones más simples de diferenciación término a término de una serie trigonométrica de Fourier. Demostremos, ante todo, el siguiente lema sobre el orden de los coeficientes trigonométricos de Fourier.

Lema 1. *Supongamos que una función $f(x)$ y todas las derivadas suyas hasta cierto orden m (m es un número entero no negativo) son continuas sobre el segmento $[-\pi, \pi]$ y satisfacen las condiciones*

$$\left.\begin{aligned} f(-\pi) &= f(\pi), \\ f'(-\pi) &= f'(\pi), \\ &\cdots\cdots\cdots \\ f^{(m)}(-\pi) &= f^{(m)}(\pi). \end{aligned}\right\} \qquad (10.46)$$

Supongamos, además, que la función $f(x)$ tiene sobre el segmento, $[-\pi, \pi]$ una derivada continua a trozos de orden $(m+1)$. Entonces, es convergente la siguiente serie:

$$\sum_{k=1}^{\infty} k^m \{|a_k| + |b_k|\}, \qquad (10.47)$$

en la cual a_k y b_k son coeficientes trigonométricos de Fourier de la función $f(x)$.

DEMOSTRACIÓN. Denotemos con α_k y β_k los coeficientes trigonométricos de Fourier de la función $f^{m+1}(x)$, al definir adicionalmente esta función de un modo arbitrario en un número finito de puntos, en los cuales no existe la derivada de $(m+1)$-ésimo orden de la función $f(x)$. Integrando las expresiones para α_k y β_k $(m+1)$ veces por partes, teniendo en cuenta la continuidad sobre todo el segmento $[-\pi, \pi]$ de la propia función $f(x)$ y de todas las derivadas suyas hasta el orden m, y tomando en consideración las relaciones (10.46), establezcamos la siguiente relación que existe entre los coeficientes trigonométricos de Fourier de la función $f^{m+1}(x)$ y la propia función $f(x)$ [1]:

$$|\alpha_k| + |\beta_k| = k^{m+1}\{|a_k| + |b_k|\}.$$

De este modo,

$$k^m \{|a_k| + |b_k|\} = \frac{|\alpha_k|}{k} + \frac{|\beta_k|}{k},$$

[1]) Al integrar por partes, se debe dividir el segmento $[-\pi, \pi]$ en un número finito de segmentos parciales (que no tienen puntos interiores comunes), en cada uno de los cuales $f^{(m+1)}(x)$ es continua, y tomar en consideración que al sumar las integrales respecto de todos los segmentos parciales, todas las sustituciones dan cero.

y la convergencia de la serie (10.47) se deduce de las desigualdades elementales (10.44) y de la convergencia de las series (10.45), la primera de las cuales es convergente en virtud de la igualdad de Parseval para la función continua a trozos $f^{m+1}(x)$, y la segunda, en virtud del criterio de Cauchy—Maclaurin. El lema está demostrado.

Como corolario inmediato del lema 1 interviene el siguiente teorema.

Teorema 10.12. *Supongamos que una función $f(x)$ satisface las mismas condiciones que se aducen en el lema 1, y, además, $m \geqslant 1$. Entonces, la serie trigonométrica de Fourier de la función $f(x)$ puede diferenciarse término a término m veces sobre el segmento $[-\pi, \pi]$.*

DEMOSTRACIÓN. Sea s cualquiera de los números $1, 2, \ldots, m$. Como resultado de la diferenciación s veces término a término de la serie trigonométrica de Fourier de la función $f(x)$, se obtiene una serie

$$\sum_{k=1}^{\infty} k^s \left\{a_k \cos\left(kx - \frac{\pi s}{2}\right) + b_k \operatorname{sen}\left(kx - \frac{\pi s}{2}\right)\right\}. \qquad (10.48)$$

Notemos que para todo x del segmento $[-\pi, \pi]$ tanto la serie trigo nométrica de Fourier original, como también la serie (10.48) (con cualquier $s = 1, 2, \ldots, m$) puede mayorarse mediante la serie numérica convergente (10.47). De acuerdo con el criterio de Weierstrass (véase teorema 1.4 del cap. I), tanto la serie trigonométrica de Fourier original, como cada una de las series (10.48) (cuando $s = 1, 2, \ldots, m$) convergen uniformemente sobre el segmento $[-\pi, \pi]$ y esto asegura (en virtud del teorema 1.9 del capítulo I) la posibilidad de diferenciación m-múltiple término a término de la serie de Fourier. El teorema está demostrado.

§ 5. Condiciones más exactas de convergencia uniforme y condiciones de convergencia en un punto dado

1. Módulo de continuidad de una función. Clases de Hölder. Empecemos por aclarar los conceptos que caracterizan la suavidad de las funciones estudiadas y por determinar las clases de funciones en cuyos términos se enunciarán condiciones de convergencia de una serie trigonométrica de Fourier.

Sea $f(x)$ una función que está definida y es continua sobre el segmento $[a, b]$.

Definición 1. *Para cada $\delta > 0$, llamemos módulo de continuidad de la función $f(x)$ sobre el segmento $[a, b]$ la cota superior exacta del módulo de una diferencia $|f(x') - f(x'')|$ en el conjunto de todos los x' y x'' que pertenecen al segmento $[a, b]$ y satisfacen la condición $|x' - x''| < \delta$.*

Denotemos con un símbolo $\omega(\delta, f)$ el módulo de continuidad de la función $f(x)$ sobre el segmento $[a, b]$. Así pues, por definición [1]:

$$\omega(\delta, f) = \sup_{\substack{|x'-x''|<\delta \\ x', x'' \in [a,b]}} |f(x') - f(x'')|.$$

Del teorema de Cantor se deduce inmediatamente (véase el teorema 10.2) que *el módulo de continuidad* $\omega(\delta, f)$ *de cualquier función* $f(x)$, *continua sobre el segmento* $[a, b]$, *tiende hacia cero, cuando* $\delta \to 0$ [2].

Sin embargo, para una función $f(x)$ arbitraria, que es solamente continua sobre el segmento $[a, b]$, no podemos decir nada acerca del *orden* de su módulo de continuidad $\omega(\delta, f)$ respecto de δ pequeño.

Mostremos ahora que *si la función* $f(x)$ *es diferenciable sobre el segmento* $[a, b]$ *y si su derivada* $f'(x)$ *está acotada en dicho segmento, el módulo de continuidad* $\omega(\delta, f)$ *de la función* $f(x)$ *en el segmento mencionado es de orden* $\omega(\delta, f) = O(\delta)$ [3].

En efecto, del teorema de Lagrange [4] se deduce que para cualesquiera puntos x' y x'' del segmento $[a, b]$ existe un punto ξ, encerrado entre x' y x'', tal que se verifique la igualdad

$$|f(x') - f(x'')| = |f'(\xi)| \cdot |x' - x''|. \tag{10.49}$$

Por cuanto la derivada $f'(x)$ está acotada sobre el segmento $[a, b]$, se encontrará una constante M de tal índole que para todo x del segmento citado se verifique $|f'(x)| \leqslant M$, y, por lo tanto, $|f'(\xi)| \leqslant M$. De la última desigualdad y de (10.49) concluimos que $|f(x') - f(x'')| \leqslant M\delta$, cualesquiera que sean x' y x'' de $[a, b]$ que satisfagan la condición $|x - x''| < \delta$. Mas, esto significa precisamente que $\omega(\delta, f) \leqslant M\delta$, es decir, $\omega(\delta, f) = O(\delta)$.

Sea α cualquier número real del semisegmento $0 < \alpha < 1$.

Definición 2. *Diremos que una función* $f(x)$ *pertenece sobre el segmento* $[a, b]$ *a la clase de Hölder* C^α *con exponente* α $(0 < \alpha \leqslant 1)$, *si el módulo de continuidad de la función* $f(x)$ *sobre el segmento* $[a, b]$ *es de orden* $\omega(\delta, f) = O(\delta^\alpha)$.

Para expresar el hecho de que la función $f(x)$ pertenece en el segmento $[a, b]$ a la clase de Hölder C^α, se emplea corrientemente el símbolo: $f(x) \in C^\alpha[a, b]$.

---

[1] Recordemos que el símbolo $\in$ significa «pertenece a», de modo que la notación $x', x'' \in [a, b]$ dice que los puntos x' y x'' pertenecen al segmento $[a, b]$.

[2] Pues (en virtud del teorema de Cantor) para todo $\varepsilon > 0$ existe tal $\delta > 0$, que $|f(x') - f(x'')| < \varepsilon$ para todos los x' y x'' del segmento $[a, b]$ que satisfacen la condición $|x' - x''| < \delta$.

[3] Recordemos que el símbolo $\alpha = O(\delta)$ fue introducido en los caps. 3 y 4, v. I y significa la existencia de tal constante M que $|\alpha| \leqslant M\delta$.

[4] Véase el teorema 8.12, v. I.

Notemos ahora mismo que si una función $f(x)$ es diferenciable sobre el segmento $[a, b]$ y si su derivada está acotada en el mismo, dicha función a ciencia cierta pertenece sobre $[a, b]$ a la clase de Hölder C^1 [1] (esta afirmación se deduce directamente de la relación $\omega(\delta, f) = O(\delta)$ demostrada más arriba).

OBSERVACION. Sea $f(x) \in C^{\alpha}[a, b]$. La cota superior exacta de una fracción $\frac{|f(x')-f(x'')|}{|x'-x''|^{\alpha}}$ sobre el conjunto de todos los x' y x'', que pertenecen al segmento $[a, b]$ y que no son iguales entre sí, la llaman *constante de Hölder* (o *coeficiente de Hölder*) de la función $f(x)$ (sobre el segmento $[a, b]$). La suma de la constante de Hölder de la función $f(x)$ sobre el segmento $[a, b]$ con la cota superior exacta $|f(x)|$ en dicho segmento se denomina *norma de Hölder* de la función $f(x)$ en el segmento $[a, b]$ y se denota con el símbolo $\| f \|_{C^{\alpha}[a, b]}$.

EJEMPLO. Una función $f(x) = \sqrt{x}$ pertenece sobre el segmento $[0, 1]$ a la clase $C^{1/2}$, puesto que para cualesquiera x' y x'' de $[0, 1]$ entrelazados por la condición $x' > x''$ se cumple una desigualdad $|f(x') - f'(x'')| = \sqrt{x'-x''}\, \frac{\sqrt{x'-x''}}{\sqrt{x'}+\sqrt{x''}} \leqslant \sqrt{x'-x''}$ (en este caso la *constante de Hölder*, que es cota superior exacta en $[0, 1]$ de la fracción $\frac{\sqrt{x'-x''}}{\sqrt{x'}+\sqrt{x''}}$, es igual a la unidad, y la *norma de Hölder* es igual a dos).

2. Expresión para una suma parcial de la serie trigonométrica de Fourier. Sea $f(x)$ una función arbitraria, continua a trozos sobre el segmento $[-\pi, \pi]$. Hagamos prolongar esta función periódicamente (con el período 2π) a toda la recta infinita [2]. Denotemos con $S_n(x, f)$ la suma parcial de la serie trigonométrica de Fourier de la función $f(x)$ en un punto x que es igual a

$$S_n(x, f) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} (a_k \cos kx + b_k \operatorname{sen} kx). \qquad (10.50)$$

[1] Una clase de Hölder C^1 correspondiente al valor $\alpha = 1$ se denomina a menudo *clase de Lipschitz*.

[2] Según el convenio aceptado aún en el § 1, una función continua a trozos $f(x)$ debe tener en cada punto x un valor igual a la semisuma de los valores límites derecho e izquierdo. Para que esta propiedad subsista también para la función $f(x)$ prolongada periódicamente (con el período 2π) a toda la recta infinita, hemos de exigir que para la función prolongada tenga lugar una relación $f(\pi) = f(-\pi) = \frac{1}{2}[f(-\pi+0) + f(\pi-0)]$. De otras palabras, llamemos la función $f(x)$, definida en la recta infinita, *prolongación periódica* de la función $f(x)$, continua a trozos sobre el segmento $[-\pi, \pi]$, si ambas funciones citadas coinciden en el intervalo $-\pi < x < \pi$ y si la función $f(x)$, definida en la recta infinita, satisface la condición de periodicidad $f(x+2\pi) = f(x)$, y la condición $f(\pi) = f(-\pi) = \frac{1}{2}[f(-\pi+0) + f(\pi-0)$.

Introduciendo en el segundo miembro de (10.50) los valores de los coeficientes de Fourier [1])

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(y)\, dy,$$

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(y) \cos ky\, dy, \quad b_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(y) \operatorname{sen} ky\, dy \quad (k = 1, 2, \ldots)$$

y tomando en consideración las propiedades de la integral, llegamos a que para cualquier punto x de la recta infinita tenemos

$$S_n(x, f) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(y) \left[\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n} (\cos ky \cos kx + \operatorname{sen} ky \operatorname{sen} kx)\right] dy =$$
$$= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(y) \left[\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n} \cos k(y - x)\right] dy.$$

Al realizar en la última integral el cambio de variable $y = t + x$, obtenemos la siguiente expresión

$$S_n(x, f) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi-x}^{\pi-x} f(x+t) \left[\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n} \cos kt\right] dt. \qquad (10.51)$$

Notemos ahora que por cuanto cada una de las funciones $f(x+t$ y $\left[\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n} \cos kt\right]$ es función periódica de la variable t de período 2π, toda la función subintegral en (10.51) (designémosla brevemente con $F(t)$) es función periódica de t de período 2π. Señalemos, además, que la integración en (10.51) se realiza por el segmento $[-\pi - x, \pi - x]$ cuya longitud es igual a 2π, es decir, igual al período de la función subintegral. Hagamos uso de la siguiente *afirmación* elemental: *si $F(t)$ es una función periódica de período 2π, integrable por cualquier segmento finito, todas las integrales de esta función por cualquiera de los segmentos cuya longitud es igual a 2π,*

[1]) Véanse las fórmulas (10.23).

son iguales, es decir, para todo x

$$\int_{-\pi-x}^{\pi-x} F(t)\,dt = \int_{-\pi}^{\pi} F(t)\,dt\text{[1]}. \tag{10.52}$$

La igualdad (10.52) permite escribir la fórmula (10.51) del modo siguiente:

$$S_n(x,\ f) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x+t)\left[\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n} \cos kt\right] dt. \tag{10.53}$$

Calculemos la suma que figura entre corchetes en (10.53). Con este fin notemos que para cualquier número k y todo valor de t se verifica la igualdad

$$2 \operatorname{sen} \frac{t}{2} \cos kt = \operatorname{sen}\left(k+\frac{1}{2}\right) t - \operatorname{sen}\left(k-\frac{1}{2}\right) t.$$

Al sumar esta igualdad respecto de todos los números k, iguales a $1, 2, \ldots, n$, obtendremos

$$2 \operatorname{sen} \frac{t}{2} \cdot \sum_{k=1}^{n} \cdot \cos kt = \operatorname{sen}\left(n+\frac{1}{2}\right) t - \operatorname{sen}\frac{t}{2}.$$

De aquí

$$2 \operatorname{sen} \frac{t}{2}\left[\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n} \cos kt\right] = \operatorname{sen}\left(n+\frac{1}{2}\right) t$$

y, por consiguiente,

$$\left[\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n} \cos kt\right] = \frac{\operatorname{sen}\left(n+\frac{1}{2}\right) t}{2 \operatorname{sen} \frac{t}{2}}. \tag{10.54}$$

---

[1]) Para demostrar esta afirmación, resulta suficiente representar la integral $\int_{-\pi-x}^{\pi-x} F(t)\,dt$, aprovechando la propiedad de aditividad, en forma de una suma de tres integrales

$$\int_{-\pi-x}^{-\pi} F(t)\,dt + \int_{-\pi}^{\pi} F(t)\,dt + \int_{\pi}^{\pi-x} F(t)\,dt$$

y señalar que con ayuda de la condición de periodicidad $F(t) = F(t+2\pi)$ y del cambio de variable $t = y - 2\pi$, la primera de las tres integrales citadas se reduce a la tercera tomada con el signo menos. En efecto,

$$\int_{-\pi-x}^{-\pi} F(t)\,dt = \int_{-\pi-x}^{-\pi} F(t+2\pi)\,dt = \int_{\pi-x}^{\pi} F(y)\,dy = -\int_{\pi}^{\pi-x} F(y)\,dy.$$

Al sustituir (10.54) en (10.53), obtendremos en definitiva la siguiente expresión para la suma parcial de la serie trigonométrica de Fourier:

$$S_n(x, f) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x+t) \frac{\operatorname{sen}\left(n+\frac{1}{2}\right) t}{2 \operatorname{sen} \frac{t}{2}} dt, \qquad (10.55)$$

que es válida en cualquier punto x de la recta infinita.

OBSERVACION. De la fórmula (10.55) y de lo que todas las sumas parciales $S_n(x, 1)$ de la función $f(x) \equiv 1$ son iguales a la unidad [1]) se deduce la siguiente igualdad:

$$1 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\operatorname{sen}\left(n+\frac{1}{2}\right) t}{2 \operatorname{sen} \frac{t}{2}} dt. \qquad (10.56)$$

3. Módulo integral de continuidad de una función. Sea $f(x)$ una función integrable (en el sentido de la propia integral de Riemann) sobre el segmento $[-\pi, \pi]$. Hagamos prolongar esta función periódicamente (con el período de 2π) a toda la recta infinita.

Definición. *Para cualquier δ del semisegmento $0 < \delta \leqslant 2\pi$, llamemos módulo integral de continuidad de la función $f(x)$ sobre el segmento $[-\pi, \pi]$ la cota superior exacta de una integral*

$$\int_{-\pi}^{\pi} |f(t+u) - f(t)| \, dt$$

en el conjunto de todos los números y que satisfacen la condición $|u| \leqslant \delta$.

Denotemos con el símbolo $I(\delta, f)$ el módulo integral de continuidad de la función $f(x)$ sobre el segmento $[-\pi, \pi]$.

Así pues, por definición,

$$I(\delta, f) = \sup_{|u| \leqslant \delta} \int_{-\pi}^{\pi} |f(t+u) - f(t)| \, dt.$$

Es válida la siguiente afirmación.

Lema 2. *Si una función $f(x)$ es continua a trozos sobre el segmento $[-\pi, \pi]$ y está periódicamente (con el período 2π) prolongada a toda la recta infinita, el módulo integral de continuidad de esta función sobre dicho segmento $I(\delta, f)$ tiende a cero cuando $\delta \to 0$.*

DEMOSTRACION. Fijamos un $\varepsilon > 0$ arbitrario. De acuerdo con el teorema 10.10 (sobre el carácter cerrado de un sistema trigonométrico), existe para la función $f(x)$ un polinomio trigonométrico $T(x)$

---

[1]) Pues la magnitud (10.55) para la función $f(x) \equiv 1$ es igual a la suma 10.50), en la que $a_0 = 2$, $a_k = b_k = 0$, cuando $k = 1, 2, \ldots$

de tal índole que

$$\| f - T \| = \sqrt{\int_{-\pi}^{\pi} [f(t) - T(t)]^2 \, dt} < \varepsilon/3 \sqrt{2\pi},$$

y, por eso, en virtud de la desigualdad de Cauchy—Buniakovski [1]):

$$\int_{-\pi}^{\pi} |f(t) - T(t)| \, dt \leqslant \sqrt{\int_{-\pi}^{\pi} [f(t) - T(t)]^2 \, dt \int_{-\pi}^{\pi} dt} < \varepsilon/3. \qquad (10.57)$$

De la desigualdad (10.57) y de lo que $f(t)$ y $T(t)$ son funciones periódicas de período 2π, concluimos que para todo número u

$$\int_{-\pi}^{\pi} |f(t+u) - T(t+u)| \, dt < \varepsilon/3. \qquad (10.58)$$

Por cuanto el módulo de una suma de tres magnitudes no sobrepasa la suma de módulos de estas magnitudes, para cualquier número u se cumple la desigualdad

$$\int_{-\pi}^{\pi} |f(t+u) - f(t)| \, dt \leqslant \int_{-\pi}^{\pi} |f(t+u) - T(t+u)| \, dt +$$

$$+ \int_{-\pi}^{\pi} + |T(t+u) - T(t)| \, dt + \int_{-\pi}^{\pi} |T(t) - f(t)| \, dt. \qquad (10.59)$$

Resta por notar que debido a la continuidad del polinomio trigonométrico y al teorema de Cantor (véase teorema 1.2, v. II), para $\varepsilon > 0$ fijo se encontrará un $\delta > 0$ tal que con $|u| \leqslant \delta$

$$|T(t+u) - T(t)| < \varepsilon/6\pi,$$

cualquiera que sea t de $[-\pi, \pi]$, por lo cual

$$\int_{-\pi}^{\pi} |T(t+u) - T(t)| \, dt \leqslant \varepsilon/3. \qquad (10.60)$$

Cotejando la desigualdad (10.59) con las (10.57), (10.58) y (10.60), llegamos a que

$$\int_{-\pi}^{\pi} |f(t+u) - f(t)| \, dt < \varepsilon \qquad (10.61)$$

para todos los u, para los cuales $|u| \leqslant \delta$. El lema está demostrado.

---

[1]) Véase la desigualdad (1.33).

OBSERVACIÓN AL LEMA 2. Es fácil ver que *el módulo integral de continuidad* $I(\delta, f)$ *tiende a cero, cuando* $\delta \to 0$, *no sólo para cualquier función continua a trozos* $f(x)$, *sino también para toda función* $f(x)$ *integrable (en el propio sentido de Riemann) sobre el segmento* $[-\pi, \pi]$. Para domostrar esto, fijemos un $\varepsilon > 0$ arbitrario y notemos que, en virtud de la integrabilidad de $f(t)$ sobre un segmento $-\pi \leqslant t \leqslant \pi$, existe tal $\delta_0 > 0$ que, para *cualquier* partición del segmento $[-\pi, \pi]$ en segmentos parciales de longitud inferior a δ_0, la diferencia entre las sumas superior e inferior de la función $f(t)$ sea menos de $\varepsilon/4$. Fijamos una partición T del segmento $[-\pi, \pi]$ en segmentos parciales *de una misma* longitud $\delta < \delta_0$. De lo que $f(t)$ es una función periódica se deduce que para todo $|u| \leqslant \delta$ y para la partición fijada T del segmento $-\pi \leqslant t \leqslant \pi$ la diferencia entre las sumas superior e inferior de la función $f(t+u)$ (siendo δ suficientemente pequeño) por lo menos no sobrepasará $\varepsilon/2$. Mas, de aquí proviene que para la partición fija T la diferencia entre las sumas superior e inferior de la función $[f(t+u) - f(t)]$ será menos de $\frac{\varepsilon}{4} + \frac{\varepsilon}{2} = \frac{3}{4}\varepsilon$, cualquiera que sea $|u| \leqslant \delta$. Para la partición fija T, denotemos las sumas superior e inferior de la función $[f(t+u) - f(t)]$ con S y s, respectivamente, y las sumas superior e inferior de la función $|f(t+u) - f(t)|$, con $\overline{S}$ y $\overline{s}$, respectivamente. En el § 5 del cap. 1, v. II se ha establecido que, cualquiera que sea la partición, las sumas superior e inferior S y s de la propia función y las sumas superior e inferior $\overline{S}$ y $\overline{s}$ del módulo de la función citada están entrelazadas mediante una relación $\overline{S} - \overline{s} \leqslant S - s$. De este modo, para la partición fija T se cumple la desigualdad $\overline{S} - \overline{s} < 3\varepsilon/4$. Mas, esto es un testimonio de que para la partición fija T la diferencia entre cualquier suma integral de la función $|f(t+u) - f(t)|$ y la integral $\int\limits_{-\pi}^{\pi} |f(t+u) - f(t)|\,dt$ es menos del número $3\varepsilon/4$. Si en esta suma integral elegimos todos los puntos interiores ξ_k en el centro de los correspondientes segmentos parciales de longitud δ y exigimos que el número u satisfaga la desigualdad $|u| < \delta/2$, ambos puntos ξ_k y $\xi_k + u$ pertenecerán al k-ésimo segmento parcial, y, por eso, la diferencia $|f(\xi_k + u) - f(\xi_k)|$ no sobrepasará la oscilación $M_k - m_k$ de la función $f(t)$ sobre el k-ésimo segmento parcial [1]. Más en este caso, toda la suma integral mencionada no excederá la suma $\sum (M_k - m_k)\,\Delta t_k$, igual a la diferencia entre las sumas superior e inferior de la función $f(t)$ para la partición T, es decir, no sobrepasará el número $\varepsilon/4$. De aquí proviene que, para $|u| < \delta/2$, la integral $\int\limits_{-\pi}^{\pi} |f(t+u) - f(t)|\,dt$ no es mayor que el número ε, y esto demuestra precisamente que $I(\delta, f)$ tiende a cero cuando $\delta \to 0$.

He aquí una serie de corolarios que el lema 2 nos presta para la exposición ulterior.

Corolario 1. *Si $f(x)$ es una función continua a trozos sobre el segmento $[-\pi, \pi]$ y está periódicamente (con el período de 2π) prolongada a toda la recta infinita, y si x es cualquier punto fijo del segmento $[-\pi, \pi]$, se encontrará, para cualquier $\varepsilon > 0$, un $\delta > 0$ tal que se*

---

[1]) Con M_k y m_k denotamos las cotas exactas superior e inferior de la función $f(t)$ sobre el k-ésimo segmento parcial.

cumpla una desigualdad

$$\int_{-\pi}^{\pi} |f(x+t+u)-f(x+t)|\,dt<\varepsilon \qquad (10.62)$$

para $|u|<\delta$.

DEMOSTRACIÓN. Al cambiar la variable $\tau = x + t$ en la integral que figura en el primer miembro de (10.62):

$$\int_{-\pi}^{\pi} |f(x+t+u)-f(x+t)|\,dt = \int_{-\pi+x}^{\pi+x} |f(\tau+u)-f(\tau)|\,d\tau$$

y al constatar que (en virtud de la igualdad (10.52)),

$$\int_{-\pi+x}^{\pi+x} |f(\tau+u)-f(\tau)|\,d\tau = \int_{-\pi}^{\pi} |f(\tau+u)-f(\tau)|\,d\tau,$$

nos convencemos de que la desigualdad (10.62) es un corolario de (10.61).

Corolario 2. *Si cada una de las funciones* $f(t)$ *y* $g(t)$ *es continua a trozos sobre el segmento* $[-\pi, \pi]$ *y está periódicamente (con el período de* 2π*) prolongada a toda la recta infinita, la función*

$$I(x)=\int_{-\pi}^{\pi} f(x+t)\,g(t)\,dt$$

será función continua de x *sobre el segmento* $-\pi \leqslant x \leqslant \pi$.

DEMOSTRACIÓN. Sea x un punto cualquiera del segmento $[-\pi, \pi]$. Entonces,

$$I(x+u)-I(x)=\int_{-\pi}^{\pi} [f(x+t+u)-f(x+t)]\,g(t)\,dt,$$

y, puesto que la función $g(t)$, continua a trozos sobre el segmento $[-\pi, \pi]$ satisface en este segmento la condición acotada $|g(t)| \leqslant M$, tenemos

$$|I(x+u)-I(x)|\leqslant M\int_{-\pi}^{\pi} |f(x+t+u)-f(x+t)|\,dt,$$

por lo cual (en virtud de (10.62)) para todo $\varepsilon>0$

$$|I(x+u)-I(x)|<\varepsilon \text{ cuando } |u|<\delta(\varepsilon).$$

La continuidad de $I(x)$ en el punto x queda demostrada.

Corolario 3. *Si cada una de las funciones* $f(t)$ *y* $g(t)$ *es continua a trozos sobre el segmento* $[-\pi, \pi]$ *y está periódicamente (con el período*

de 2π) prolongada a toda la recta infinita, los coeficientes trigonométricos de Fourier de la función $F(x, t) = f(x+t)g(t)$, al desarrollar la última según la variable t,

$$a_n(x) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x+t)\,g(t)\cos nt\,dt, \tag{10.63}$$

$$b_n(x) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x+t)\,g(t)\,\mathrm{sen}\,nt\,dt \tag{10.64}$$

convergen hacia cero (para $n \to \infty$) uniformemente con relación a x en el segmento $[-\pi, \pi]$ (y, por lo tanto, también en toda la recta infinita).

DEMOSTRACIÓN. Para cualquier punto fijo x del segmento $[-\pi, \pi]$, la función $F(x, t) = f(x+t)g(t)$ es función continua a trozos del argumento t sobre el segmento $[-\pi, \pi]$ y, por tanto, para esta función se verifica la igualdad de Parseval [1])

$$\frac{a_0^2(x)}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}\left[a_k^2(x) + b_k^2(x)\right] = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f^2(x+t)\,g^2(t)\,dt. \tag{10.65}$$

De la igualdad (10.65) proviene la convergencia de la serie en el primer miembro de ella en cada punto fijo x del segmento $[-\pi, \pi]$. Ya que la serie citada se compone de términos no negativos, resulta, en virtud del teorema de Dini [2]), que para demostrar la convergencia uniforme en el segmento $[-\pi, \pi]$ de dicha serie, basta probar que tanto cada función $a_n(x)$ y $b_n(x)$, como también la suma de la serie (10.65) $\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f^2(x+t)\,g^2(t)\,dt$ son todas funciones continuas de x sobre el segmento $[-\pi, \pi]$, mas esto se deduce en seguida del corolario antecedente (basta tomar en consideración que el cuadrado de una función continua a trozos es función continua a trozos y que $\cos nt$ y $\mathrm{sen}\, nt$ son funciones continuas para cada número n fijo).

Corolario 4. *Si cada una de las funciones $f(t)$ y $g(t)$ es continua a trozos sobre el segmento $[-\pi, \pi]$ y está periódicamente (con el período de 2π) prolongada a toda la recta infinita, una sucesión*

$$c_n(x) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x+t)\,g(t)\,\mathrm{sen}\left(n+\frac{1}{2}\right)t\,dt \tag{10.66}$$

converge hacia cero uniformemente con relación a x sobre el segmento $[-\pi, \pi]$ (y, por tanto, en toda la recta infinita).

---

[1]) Véase corolario 1 del p. 3, § 3 de este capítulo.
[2]) Véase teorema 1.5 (formulación en términos de las series).

DEMOSTRACION. Basta tomar en consideración que

$$\operatorname{sen}\left(n+\frac{1}{2}\right)t=\cos nt\cdot\operatorname{sen}\frac{t}{2}+\operatorname{sen} nt\cdot\cos\frac{t}{2},$$

y aplicar el corolario antecedente, tomando en (10.63) en lugar de $g(t)$ una función $g(t)\cdot\operatorname{sen}\frac{t}{2}$, y en (10.64), en lugar de $g(t)$ una función $g(t)\cdot\cos\frac{t}{2}$.

4. Principio de localización. En este punto demostraremos que la cuestión de si es convergente o divergente la serie trigonométrica de Fourier de una función $f(x)$, continua a trozos sobre el segmento $[-\pi, \pi]$ y periódica (de período 2π), en un punto dado x_0 se resuelve *sólo a base de comportamiento de la función $f(x)$ en un entorno del punto x_0 tan pequeño como se quiera.* Esta propiedad notable de la serie trigonométrica de Fourier suele llamarse *principio de localización.*

Empecemos por demostrar un lema importante.

Lema 3 (de Riemann). *Si una función $f(x)$ es continua a trozos sobre el segmento $[-\pi, \pi]$ y está periódicamente (con el período de 2π) prolongada a toda la recta infinita y si dicha función se anula en cierto segmento $[a, b]$* [1]*, para cualquier número positivo δ, inferior a $\frac{b-a}{2}$, la serie trigonométrica de Fourier de la función $f(x)$ es uniformemente convergente sobre el segmento $[a+\delta, b-\delta]$ hacia cero.*

DEMOSTRACIÓN. Sea δ un número positivo arbitrario inferior a $\frac{b-a}{2}$. La suma parcial de la serie trigonométrica de Fourier de la función $f(x)$ en un punto arbitrario x de la recta infinita se define mediante la igualdad (10.55). Suponiendo

$$g(t)=\begin{cases}\dfrac{1}{2\operatorname{sen}\frac{t}{2}} & \text{para } \delta\leqslant|t|\leqslant\pi,\\[2ex] 0 & \text{para } |t|<\delta\end{cases}\tag{10.67}$$

y teniendo presente que $f(x+t)$ es igual a cero a condición de que x pertenece al segmento $[a+\delta, b-\delta]$, y t pertenece al segmento $|t|\leqslant\delta$ [2], podemos reescribir la igualdad (10.55) para cada punto x del segmento $[a+\delta, b-\delta]$ de una manera siguiente:

$$S_n(x, f)=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x+t)\,g(t)\operatorname{sen}\left(n+\frac{1}{2}\right)t\,dt.$$

---

[1] El segmento $[a, b]$ es sumamente arbitrario. En particular, puede ocurrir que este segmento no se contenga íntegramente en $[-\pi, \pi]$.

[2] En virtud de que la función $f(x)$ es nula en todo el segmento $[a, b]$.

Nos queda tomar en consideración que la sucesión en el segundo miembro de la última igualdad converge, en virtud del corolario 4 del p. 3, hacia cero uniformemente con relación a x en toda la recta infinita. El lema está demostrado.

Los siguientes dos teoremas constituyen corolarios inmediatos del lema demostrado.

Teorema 10.13. *Supongamos que una función $f(x)$ es continua a trozos sobre el segmento $[-\pi, \pi]$ y está periódicamente prolongada (con el período de 2π) a toda la recta infinita, y sea $[a, b]$ un segmento. Para que la serie trigonométrica de Fourier de la función $f(x)$ converja (hacia esta función) uniformemente sobre un segmento $[a+\delta, b-\delta]$ con cualquier δ positivo inferior a $\frac{b-a}{2}$, es suficiente que exista una función $g(x)$, continua a trozos en el segmento $[-\pi, \pi]$ y periódica (de período 2π), que posea una serie trigonométrica de Fourier uniformemente convergente sobre el segmento $[a, b]$ y que sea coincidente con la función $f(x)$ sobre el segmento $[a, b]$.*

DEMOSTRACIÓN. Aplicando el lema 3 a la diferencia $[f(x) - g(x)]$, llegamos a que la serie trigonométrica de Fourier de la diferencia $[f(x) - g(x)]$ converge, con cualquier δ del intervalo $0 < \delta < \frac{b-a}{2}$, hacia cero uniformemente en el segmento $[a+\delta, b-\delta]$ de aquí y de la convergencia uniforme en el segmento $[a, b]$ de la serie trigonométrica de Fourier de la función $g(x)$ se deduce la convergencia uniforme en el segmento $[a+\delta, b-\delta]$ de la serie trigonométrica de Fourier de la función $f(x)$. El hecho de que la última serie converge en el segmento $[a+\delta, b-\delta]$ *precisamente hacia la función $f(x)$* se deduce inmediatamente del corolario 5 del p. 3, § 3 de este capítulo. El teorema está demostrado.

Teorema 10.14. *Supongamos que una función $f(x)$ es continua a trozos sobre el segmento $[-\pi, \pi]$ y está periódicamente (con el período de 2π) prolongada a toda la recta infinita, y sea x_0 un punto de la recta infinita. Para que la serie trigonométrica de Fourier de la función $f(x)$ converja en el punto x_0, es suficiente que exista una función $g(x)$, continua a trozos en el segmento $[-\pi, \pi]$ y periódica (de período 2π), que posea una serie trigonométrica de Fourier uniformemente convergente en el punto x_0 y que sea coincidente con $f(x)$ en un δ-entorno del punto x_0 tan pequeño como se quiera.*

DEMOSTRACIÓN. Basta aplicar el lema 3 a la diferencia $[f(x) - g(x)]$ en el segmento $\left[x_0 - \frac{\delta}{2}, x_0 + \frac{\delta}{2}\right]$ y tener en cuenta que de la convergencia en el punto x_0 de las series trigonométricas de las funciones $[f(x) - g(x)]$ y $g(x)$ se deduce que en este punto converge también la serie trigonométrica de Fourier de la función $f(x)$. El teorema está demostrado.

El teorema 10.14 no establece un tipo particular de las condiciones que aseguren la convergencia de la serie trigonométrica de Fourier de la función $f(x)$ en el punto x_0. Sólo demuestra que estas condiciones se determinan únicamente por el comportamiento de $f(x)$ en un entorno del punto x_0 tan pequeño como se quiera (es decir, tienen carácter *local*).

5. Convergencia uniforme de una serie trigonométrica de Fourier para las funciones de la clase de Hölder. En este punto y en los siguientes preocupémonos de la precisión de las condiciones que aseguran la convergencia uniforme y convergencia en un punto dado de una serie trigonométrica de Fourier.

Demostremos el siguiente teorema *fundamental*.

Teorema 10.15. *Si una función $f(x)$ pertenece sobre el segmento $[-\pi, \pi]$ a la clase de Hölder C^α con cualquier exponente α $(0 < \alpha \leqslant 1)$ positivo, y si, además, $f(-\pi) = f(\pi)$, la serie trigonométrica de Fourier de la función $f(x)$ converge (hacia esta función) uniformemente en el segmento $[-\pi, \pi]$.*

DEMOSTRACIÓN. Convengamos en considerar, como antes, que la función $f(x)$ está periódicamente (con el período de 2π) prolongada a toda la recta infinita. La condición $f(-\pi) = f(\pi)$ asegura la pertenencia de la función prolongada del modo citado a la clase de Hölder C^α en toda la recta infinita.

Sea x un punto cualquiera del segmento $[-\pi, \pi]$. Multiplicando ambos miembros de la igualdad (10.56) por $f(x)$ y sustrayendo la igualdad que se obtiene de (10.55), obtenemos una igualdad

$$S_n(x, f) - f(x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} [f(x+t) - f(x)] \frac{\operatorname{sen}\left(n + \frac{1}{2}\right) t}{2 \operatorname{sen} \frac{t}{2}} dt. \quad (10.68)$$

De la condición de que $f(x)$ pertenece a la clase de Hölder C^α se deduce la existencia de una constante M tal que

$$|f(x+t) - f(x)| \leqslant M \cdot t^\alpha \quad (10.69)$$

en todo caso para cualesquiera x y todos los t del segmento $[-\pi, \pi]$.

Fijamos un $\varepsilon > 0$ arbitrario, y a base de éste, un $\delta > 0$ que satisfaga la desigualdad

$$\frac{M}{\alpha} \cdot \delta^\alpha < \frac{\varepsilon}{3}. \quad (10.70)$$

Al dividir el segmento $[-\pi, \pi]$ en la suma del segmento $|t| \leqslant \delta$ y el conjunto $\delta \leqslant |t| \leqslant \pi$, atribuyamos a la igualdad (10.68)

la forma

$$S_n(x, f) - f(x) = \frac{1}{\pi} \int\limits_{|t| \leqslant \delta} [f(x+t) - f(x)] \frac{\operatorname{sen}\left(n+\frac{1}{2}\right) t}{2 \operatorname{sen} \frac{t}{2}} dt +$$

$$+ \frac{1}{\pi} \int\limits_{\delta \leqslant |t| \leqslant \pi} f(x+t) \frac{\operatorname{sen}\left(n+\frac{1}{2}\right) t}{2 \operatorname{sen} \frac{t}{2}} dt - \frac{f(x)}{\pi} \int\limits_{\delta \leqslant |t| \leqslant \pi} \frac{\operatorname{sen}\left(n+\frac{1}{2}\right) t}{2 \operatorname{sen} \frac{t}{2}} dt. \tag{10.71}$$

Para estimar la primera de las integrales en el segundo miembro de (10.71), aprovechamos la desigualdad (10.69), teniendo presente que $\frac{1}{2\left|\operatorname{sen} \frac{t}{2}\right|} \leqslant \frac{\pi}{2|t|}$ para todos los t del segmento $[-\pi, \pi]$ [1]. Llegamos a que para todo número n y cualquier x del segmento $[-\pi, \pi]$

$$\left| \int\limits_{|t| \leqslant \delta} [f(x+t) - f(x)] \frac{\operatorname{sen}\left(n+\frac{1}{2}\right) t}{2 \operatorname{sen} \frac{t}{2}} dt \right| \leqslant$$

$$\leqslant \int\limits_{|t| \leqslant \delta} |f(x+t) - f(x)| \frac{\left|\operatorname{sen}\left(n+\frac{1}{2}\right) t\right|}{2\left|\operatorname{sen} \frac{t}{2}\right|} \cdot dt \leqslant$$

$$\leqslant \frac{M\pi}{2} \int\limits_{|t| \leqslant \delta} |t|^{\alpha-1} dt = M\pi \int\limits_0^\delta t^{\alpha-1} dt = \frac{M\pi}{\alpha} \cdot \delta^\alpha.$$

De aquí, en virtud de (10.70), para todo número n y todo x del segmento $[-\pi, \pi]$

$$\left| \frac{1}{\pi} \int\limits_{|t| \leqslant \delta} [f(x+t) - f(x)] \frac{\operatorname{sen}\left(n+\frac{1}{2}\right) t}{2 \operatorname{sen} \frac{t}{2}} dt \right| < \frac{\varepsilon}{2}. \tag{10.72}$$

La segunda de las integrales en el miembro derecho de (10.71) se escribe, con ayuda de la función (10.67) continua a trozos sobre el

[1] La desigualdad citada se deduce inmediatamente de lo que la función $\frac{\operatorname{sen} x}{x}$ *decrece*, al variar x de 0 a $\pi/2$, desde 1 hasta $2/\pi$. El hecho de que la función $\frac{\operatorname{sen} x}{x}$ decrece se deduce, a su vez, de lo que $\left(\frac{\operatorname{sen} x}{x}\right)' = \frac{\cos x}{x^2}(x - \operatorname{tg} x) < 0$, siempre cuando $0 < x < \pi/2$, pues $x < \operatorname{tg} x$ para $0 < x < \pi/2$ (véase p. 6, § 5, cap. 4, v. I).

segmento $[-\pi, \pi]$, en la forma

$$\frac{1}{\pi} \int\limits_{\delta \leqslant |t| \leqslant \pi} f(x+t) \frac{\operatorname{sen}\left(n+\frac{1}{2}\right) t}{2 \operatorname{sen} \frac{t}{2}} dt = \frac{1}{\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x+t) g(t) \operatorname{sen}\left(n+\frac{1}{2}\right) t.$$

En virtud del corolario 4 del p. 3, el segundo miembro de la última igualdad converge hacia cero (para $n \to \infty$) uniformemente con relación a x en el segmento $[-\pi, \pi]$. Por eso, para $\varepsilon > 0$ fijo existe un número N_1 tal que

$$\left| \frac{1}{\pi} \int\limits_{\delta \leqslant |t| \leqslant \pi} f(x+t) \frac{\operatorname{sen}\left(n+\frac{1}{2}\right) t}{2 \operatorname{sen} \frac{t}{2}} dt \right| < \frac{\varepsilon}{3} \qquad (10.73)$$

para todos $n \geqslant N_1$ y cualesquiera x del segmento $[-\pi, \pi]$.

Para estimar la última integral en el segundo miembro de (10.71) señalemos que con ayuda de la función continua a trozos (10.67) esta integral se escribe en la forma

$$\frac{f(x)}{\pi} \int\limits_{\delta \leqslant |t| \leqslant \pi} \frac{\operatorname{sen}\left(n+\frac{1}{2}\right) t}{2 \operatorname{sen} \frac{t}{2}} dt = \frac{f(x)}{\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} g(t) \operatorname{sen}\left(n+\frac{1}{2}\right) t \, dt.$$

La integral en el segundo miembro de la última igualdad converge hacia cero (para $n \to \infty$) debido al mismo corolario 4 del p. 3 (basta aplicar el corolario citado a la función $f(x) \equiv 1$). Teniendo presente, además, que la función $f(x)$ está acotada en todo caso sobre el segmento $[-\pi, \pi]$, llegamos a que para un $\varepsilon > 0$ fijo arbitrario existe un número N_2 tal que

$$\left| \frac{f(x)}{\pi} \int\limits_{\delta \leqslant |t| \leqslant \pi} \frac{\operatorname{sen}\left(n+\frac{1}{2}\right) t}{2 \operatorname{sen} \frac{t}{2}} dt \right| < \frac{\varepsilon}{3} \qquad (10.74)$$

para todos $n \geqslant N_2$ y cualesquiera x del segmento $[-\pi, \pi]$.

Al denotar con N el mayor de dos números N_1 y N_2, tendremos, en virtud de (10.71)—(10.74), que para un $\varepsilon > 0$ fijo arbitrario existe un número N tal que

$$|S_n(x, f) - f(x)| < \varepsilon$$

para todos $n \geqslant N$ y cualesquiera x del segmento $[-\pi, \pi]$. El teorema está demostrado.

OBSERVACIÓN 1. Es evidente que en las condiciones del teorema 10.15 la serie trigonométrica de Fourier converge uniformemente

no sólo en el segmento $[-\pi, \pi]$, sino también *uniformemente en toda la recta infinita* (hacia una función que es prolongación periódica (con el período de 2π) de $f(x)$ a toda la recta infinita).

OBSERVACIÓN 2. Notemos que al estimar las integrales (10.73) y (10.74), se ha aprovechado sólo la continuidad a trozos (y el carácter acotado que desprende de la continuidad) de la función $f(x)$ sobre el segmento $[-\pi, \pi]$ (no se usaba, al estimar dichas integrales, que $f(x)$ pertenece a la clase de Hölder).

OBSERVACIÓN 3. Surge, naturalmente, una pregunta de si podemos debilitar en el teorema 10.15 la exigencia de suavidad de la función $f(x)$, conservando intacta la afirmación de este teorema sobre la convergencia uniforme en el segmento $[-\pi, \pi]$ de la serie trigonométrica de Fourier de la función $f(x)$.

Recordemos que la pertenencia de $f(x)$ sobre el segmento $[-\pi, \pi]$ a la clase de Hölder C^α significa, por definición, que el módulo de continuidad de $f(x)$ en dicho segmento es de orden

$$\omega(\delta, f) = O(\delta^\alpha).$$

Demos a conocer sin demostración el así llamado *teorema de Dini—Lipschitz*, el cual afirma que *para la convergencia uniforme en el segmento $[-\pi, \pi]$ de la serie trigonométrica de Fourier de la función $f(x)$, es necesario que esta función satisfaga la condición $f(-\pi) = f(\pi)$ y que su módulo de continuidad sobre $[-\pi, \pi]$ sea de orden*

$$\omega(\delta, f) = \left(\frac{1}{\ln 1/\delta}\right),$$

es decir, represente, para $\delta \to 0$, una infinitésima de orden más elevado que $\frac{1}{\ln 1/\delta}$.

El teorema de Dini—Lipschitz contiene una condición *definitiva* (en términos del módulo de continuidad de una función) de convergencia uniforme de la serie trigonométrica de Fourier, pues se puede construir una función $f(x)$ que satisfaga la condición $f(-\pi) = f(\pi)$ con un módulo de continuidad que tenga sobre el segmento $[-\pi, \pi]$ el orden $O\left(\frac{1}{\ln 1/\delta}\right)$, y con la serie trigonométrica de Fourier que sea divergente sobre un conjunto de puntos siempre denso en el segmento $[-\pi, \pi]$ [1]).

En las condiciones del teorema 10.15, la función $f(x)$, siendo prolongada periódicamente (con el período de 2π), resultaba ser perteneciente a la clase de Hölder C^α *en toda la recta infinita*. Naturalmente, surge una cuestión de comportamiento de la serie trigonométrica de Fourier de la función $f(x)$ la que pertenece a la clase de Hölder *sólo en cierto segmento* $[a, b]$, satisfaciendo sólo la exigencia corriente de continuidad a trozos en todo punto fuera del segmento mencionado.

La respuesta a esta pregunta la ofrece el siguiente teorema.

---

[1]) La demostración del teorema de Dini—Lipschitz y construcción del ejemplo recién mencionado se pueden encontrar en el libro «Trigonometric Series» de A. Zygmund, v. I, Cambridge, 1959.

Teorema 10.16. *Sea $f(x)$ una función continua a trozos sobre el segmento $[-\pi, \pi]$ que está periódicamente (con el período de 2π) prolongada a toda la recta infinita. Supongamos, además, que en cierto segmento $[a, b]$ de longitud inferior a 2π, dicha función pertenece a la clase de Hölder C^α con el exponente positivo α $(0 < \alpha \leqslant 1)$. Entonces, para cualquier δ del intervalo $0 < \delta < \frac{b-a}{2}$ la serie trigonométrica de Fourier de la función $f(x)$ es uniformemente convergente (hacia $f(x)$) sobre el segmento $[a + \delta, b - \delta]$.*

DEMOSTRACIÓN. Construyamos la gráfica de una función $g(x)$ que coincide con $f(x)$ sobre el segmento $[a, b]$, y en el $[b, a + 2\pi]$

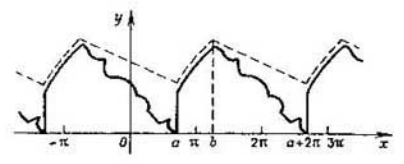


Fig. 10.1.

es una función lineal del tipo $Ax + B$, que se convierte en $f(b)$, cuando $x = b$, y en $f(a)$, cuando $x = a + 2\pi$ [1]) y que está periódicamente (con el período de 2π) prolongada del segmento $[a, a + 2\pi]$ a toda la recta infinita (en la fig. 10.1 la línea gruesa expone la gráfica de la función $f(x)$, y la rayada, la gráfica de $g(x)$ construida a base de $f(x)$).

Evidentemente, la función construida $g(x)$ satisface la condición $g(-\pi) = g(\pi)$ y pertenece a la clase de Hölder C^α (con el mismo exponente positivo α que tiene $f(x)$) en toda la recta infinita [2]). En virtud del teorema 10.15 y de la observación 1, la serie trigonométrica de Fourier de la función $g(x)$ converge uniformemente en toda la recta infinita, por lo cual, en vista del teorema 10.13, la serie trigonométrica de Fourier de la función $f(x)$ converge (hacia esta función) uniformemente sobre el segmento $[a + \delta, b - \delta]$, cualquiera que sea δ del intervalo $0 < \delta < \frac{b-a}{2}$. El teorema está demostrado.

---

[1]) La condición de conversión de la función $Ax + B$ en $f(b)$, para $x = b$, y en $f(a)$, para $x = a + 2\pi$ define unívocamente las constantes A y B: $A = \frac{f(a) - f(b)}{a + 2\pi - b}$, $B = \frac{(a + 2\pi) f(b) - bf(a)}{a + 2\pi - b}$.

[2]) Basta tener presente que $g(x)$ es siempre continua y que una función lineal tiene derivada acotada, por lo cual pertenece a la clase de Hölder C^α, cualquiera que sea $\alpha \leqslant 1$.

OBSERVACIÓN 4. La afirmación del teorema 10.16 queda válida también para el segmento $[a, b]$ cuya longitud es *igual* a 2π (es decir, para un caso de que $b = a + 2\pi$), mas, al demostrar en este caso el teorema, se debe tomar, fijando δ arbitrario del intervalo $0 < \delta < \pi$, una función $g(x)$ que coincida con $f(x)$ en un segmento $\left[a + \frac{\delta}{2}, a + 2\pi - \frac{\delta}{2}\right]$, sea lineal en el segmento $\left[a + 2\pi - \frac{\delta}{2}, a + 2\pi + \frac{\delta}{2}\right]$ y esté periódicamente (con el período de 2π) prolongada del segmento $\left[a + \frac{\delta}{2}, a + 2\pi + \frac{\delta}{2}\right]$ a toda la recta infinita. En cambio, si el segmento $[a, b]$ tiene longitud *superior* a 2π, de la pertenencia de $f(x)$ a la clase de Hölder C^α en tal segmento y de la condición de periodicidad de $f(x)$ (con el período de 2π) se deduce que $f(x)$ pertenece a la clase C^α en toda la recta infinita, es decir, en este caso llegamos al teorema 10.15.

6. Sobre la convergencia de la serie trigonométrica de Fourier de una función hölderiana a trozos.

Definición 1. *Llamemos una función $f(x)$ hölderiana a trozos sobre un segmento $[a, b]$, si esta función es continua a trozos en $[a, b]$, y si el segmento $[a, b]$ se divide, mediante un número finito de puntos $a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_n = b$, en segmentos parciales $[x_{k-1}, x_k]$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$, en cada uno de los cuales dicha función pertenece a la clase de Hölder C^{α_k} con cierto exponente positivo α_k $(0 < \alpha_k \leqslant 1)$, con la particularidad de que, al definir la clase de Hölder sobre un segmento parcial $[x_{k-1}, x_k]$, a título de valores de la función en los extremos del segmento han de tomarse los valores límites $f(x_{k-1} + 0)$ y $f(x_k - 0)$* [1].

Dicho de otro modo, el dominio de definición de toda función hölderiana a trozos se descompone en un número finito de segmentos, privados de puntos interiores comunes, en cada uno de los cuales la función en consideración pertenece a la clase de Hölder con cierto exponente positivo.

Cada uno de estos segmentos se denominará *sección de suavidad* de la función.

Definición 2. *Llamemos una función $f(x)$ suave a trozos sobre el segmento $[a, b]$, si esta función es continua a trozos en $[a, b]$ y tiene en el mismo segmento derivada continua a trozos* [2]*, es decir, si la función $f(x)$ es continua a trozos sobre el segmento $[a, b]$ y su derivada $f'(x)$ existe es continua en todo punto del segmento citado, a excepción,*

---

[1] Los valores de una función hölderiana a trozos (al igual que de cualquier función continua a trozos) deben ser iguales en cada punto x_k a la semisuma de los valores límites derecho e izquierdo en el punto citado, es decir, ha de verificarse la igualdad $f(x_k) = 1/2\,[f(x_k - 0) + f(x_k + 0)]$.

[2] Véase difinición 1 del p. 2, § 4 de este capítulo.

quizás, de un número finito de puntos, en cada uno de los cuales la función $f'(x)$ tiene valores límites finitos derecho e izquierdo.

Está claro que toda función suave a trozos sobre el segmento $[a, b]$ es hölderiana a trozos sobre este segmento.

Tiene lugar el siguiente teorema *fundamental.*

***Teorema* 10.17.** *Supongamos que una función $f(x)$, hölderiana a trozos sobre un segmento $[-\pi, \pi]$, está periódicamente (con el período de 2π) prolongada a toda la recta numérica. Entonces, la serie trigonométrica de Fourier de la función $f(x)$ converge en cada punto x de la recta infinita al valor de $f(x) = 1/2\,[f(x-0) + f(x+0)]$, con la particularidad de que la convergencia de esta índole es uniforme en cada segmento fijo dispuesto en el interior de la sección de suavidad de la función $f(x)$.*

DEMOSTRACIÓN. La afirmación del teorema acerca de la convergencia uniforme sobre todo segmento fijo, dispuesto en el interior de la sección de suavidad, se deduce inmediatamente del teorema 10.16, de donde se deduce también la convergencia de la serie trigonométrica de Fourier de la función $f(x)$ en cada punto *interior* de la sección de suavidad de la función $f(x)$ [1]. Resta por demostrar la convergencia de la serie trigonométrica de Fourier de la función $f(x)$ en cada punto de empalme de dos secciones de suavidad.

Fijemos uno de tales puntos y denotémoslo con x. Entonces, se encontrarán tales constantes M_1 y M_2 que, para cualquier t positivo suficientemente pequeño, se verifique la desigualdad

$$|f(x+t) - f(x+0| \leqslant M_1 t^{\alpha_1} \quad (0 < \alpha_1 \leqslant 1), \qquad (10.75)$$

y para cualquier t negativo suficientemente pequeño se verifique la desigualdad

$$|f(x+t) - f(x-0)| \leqslant M_2 \cdot |t|^{\alpha_2} \quad (0 < \alpha_2 \leqslant 1). \qquad (10.76)$$

Denotemos con M el mayor de los números M_1 y M_2, y con α, el mayor de los números α_1 y α_2. Entonces, cuando $|t| \leqslant 1$, en el segundo miembro de cada una de las desigualdades (10.75) y (10.76) podemos escribir $M \cdot |t|^{\alpha}$.

Fijamos arbitrariamente un $\varepsilon > 0$, y, a base de ε, un $\delta > 0$ que satisface la desigualdad (10.70) y es tan pequeño que, para $|t| \leqslant \delta$, son válidas ambas desigualdades (10.75) y (10.76), de modo que podemos escribir el número $M \cdot |t|^{\alpha}$ en el segundo miembro de estas desigualdades. Al repetir los razonamientos aducidos en la demostración del teorema 10.15, llegaremos a la igualdad (10.71) y para demostrar el teorema, nos queda convencerse de que en el punto fijo x son válidas las estimaciones (10.72), (10.73) y (10.74). En la observación 2, p. 5 se ha notado que las estimaciones (10.73) y (10.74) son válidas para cualquier función que sea *solamente*

[1]) Pues cada punto interior de la sección de suavidad puede ser incluido en un segmento dispuesto en el interior de dicha sección.

continua a trozos y periódica (*de período* 2π). Resta por demostrar la validez para todos los números n de la estimación (10.72).

Teniendo presente que $f(x) = 1/2\,[f(x-0) + f(x+0)]$ y que [1])

$$\int_{-\delta}^{\delta} \frac{\operatorname{sen}\left(n+\frac{1}{2}\right)t}{2\operatorname{sen}\frac{t}{2}}\,dt = \frac{1}{2}\int_{0}^{\delta} \frac{\operatorname{sen}\left(n+\frac{1}{2}\right)t}{2\operatorname{sen}\frac{t}{2}}\,dt = \frac{1}{2}\int_{-\delta}^{0} \frac{\operatorname{sen}\left(n+\frac{1}{2}\right)t}{2\operatorname{sen}\frac{t}{2}}\,dt,$$

podemos reescribir la integral en el primer miembro de (10.72) del modo siguiente:

$$\frac{1}{\pi}\int_{|t|\leqslant\delta} [f(x+t) - f(x)]\,\frac{\operatorname{sen}\left(n+\frac{1}{2}\right)t}{2\operatorname{sen}\frac{t}{2}}\,dt =$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\delta} [f(x+t) - f(x+0)]\,\frac{\operatorname{sen}\left(n+\frac{1}{2}\right)t}{2\operatorname{sen}\frac{t}{2}}\,dt +$$

$$+ \frac{1}{\pi}\int_{-\delta}^{0} [f(x+t) - f(x-0)]\,\frac{\operatorname{sen}\left(n+\frac{1}{2}\right)t}{2\operatorname{sen}\frac{t}{2}}\,dt. \qquad (10.77)$$

Para estimar las integrales que figuran en el segundo miembro de (10.77), hagamos uso de las desigualdades (10.75) y (10.76), escribiendo en el segundo miembro de estas desigualdades el número $M\,|t|^{\alpha}$. Al tomar en consideración la estimación $\dfrac{1}{2\left|\operatorname{sen}\frac{t}{2}\right|} \leqslant$

---

[1]) En vista de que una función $\varphi(t) = \dfrac{\operatorname{sen}\left(n+\frac{1}{2}\right)t}{2\operatorname{sen}\frac{t}{2}}$ es *par*, es decir, para cualquier t satisface la condición $\varphi(-t) = \varphi(t)$. Es fácil convencerse de que para tal función $\int_{0}^{\delta}\varphi(d)\,dt = \int_{-\delta}^{0}\varphi(t)\,dt$ (basta realizar $t = -\tau$ en una de estas integrales la sustitución), y, por eso,

$$\int_{-\delta}^{\delta}\varphi(t)\,dt = \frac{1}{2}\int_{0}^{\delta}\varphi(t)\,dt = \frac{1}{2}\int_{-\delta}^{0}\varphi(t)\,dt.$$

$\leqslant \frac{\pi}{2|t|}$ (para $|t| \leqslant \pi$), ya empleada en la demostración del teorema 10.5, y la desigualdad (10.70), tendremos

$$\left| \frac{1}{\pi} \int_{|t| \leqslant \delta} |f(x+t) - f(x)| \frac{\operatorname{sen}\left(n+\frac{1}{2}\right)t}{2 \operatorname{sen} \frac{t}{2}} dt \right| \leqslant$$

$$\leqslant \frac{M}{2} \left[\int_0^\delta t^{\alpha-1} dt + \int_{-\delta}^0 |t|^{\alpha-1} dt \right] = \frac{M}{\alpha} \cdot \delta^\alpha < \frac{\varepsilon}{3}.$$

La estimación (10.72) y, junto con ella, el teorema quedan demostrados.

Corolario 1. *La afirmación del teorema 10.17 será con mayor razón válida, si en su formulación se toma, en lugar de la función hölderiana a trozos, una función suave a trozos (sobre el segmento $[-\pi, \pi]$), periódicamente (con el período de 2π) prolongada a toda la recta infinita.*

Para poder formular un corolario más, introduzcamos una noción nueva. Sea $0 < \alpha \leqslant 1$.

Definición 3. *Diremos que una función $f(x)$ satisface en un punto dado x por la derecha (por la izquierda) la condición de Hölder de orden α, si la función $f(x)$ tiene en el punto x el valor límite derecho (izquierdo), y si existe tal constante M que con todo t positivo (negativo), suficientemente pequeño, se cumple la desigualdad*

$$\frac{|f(x+t) - f(x+0)|}{t^\alpha} \leqslant M \quad \left(\frac{|f(x+t) - f(x-0)|}{|t|^\alpha} \leqslant M \right).$$

Es evidente que si la función $f(x)$ tiene en el punto dado x derivada a la derecha (a la izquierda) entendida como un límite $\lim_{t \to 0+0} \frac{f(x+t) - f(x+0)}{t}$ $\left(\lim_{t \to 0-0} \frac{f(x+t) - f(x-0)}{t} \right)$, la función $f(x)$ a ciencia cierta satisface en este punto x por la derecha (por la izquierda) la condición de Hölder de cualquier orden $\alpha \leqslant 1$.

Corolario 2 (condición de convergencia de una serie trigonométrica de Fourier en un punto dado). *Para que una serie trigonométrica de Fourier de la función $f(x)$, continua a trozos y periódica (de período 2π) converja en un punto dado x de la recta infinita, es suficiente que la función $f(x)$ satisfaga en el punto x por la derecha la condición de Hölder de algún orden positivo α_1, y en el punto x por la izquierda, la condición de Hölder de algún orden positivo α_2 (y, con mayor razón, es suficiente que la función $f(x)$ tenga en el punto x las derivadas a la derecha y a la izquierda).*

DEMOSTRACIÓN. Basta señalar que de lo que la función $f(x)$ satisface en el punto x por la derecha (por la izquierda) la condición de Hölder de orden α_1 (de orden α_2) se deduce la existencia de una constante M_1 (constante M_2) tal que para todo t positivo (negativo),

suficientemente pequeño, quede válida la desigualdad (10.75) (desigualdad 10.76). Pero, la demostración expuesta del teorema 10.17 sólo aprovecha las desigualdades (10.75) y (10.76), y la continuidad a trozos y la periodicidad de $f(x)$.

EJEMPLO. Sin calcular los coeficientes de Fourier de la función

$$f(x)=\begin{cases}\cos x & \text{para } -\pi\leqslant x<0,\\ 1/2 & \text{para } x=0,\\ \sqrt{x} & \text{para } 0<x\leqslant\pi,\end{cases}$$

podemos afirmar que la serie trigonométrica de Fourier de esta función converge en el punto $x=0$ hacia el valor $1/2$, pues la función $f(x)$ tiene en este punto derivada a la izquierda y satisface en el mismo por la derecha la condición de Hölder de orden $\alpha_2=1/2$.

7. Sumabilidad de las series trigonométricas de Fourier de una función continua mediante los promedios. Ya se ha notado que la serie trigonométrica de Fourier de una función siempre continua y periódica (de período 2π) puede ser divergente (véase el p. 1). Demostremos que esta serie es, no obstante, siempre sumable (uniformemente en toda la recta infinita) por el método de Cesaro (o mediante los promedios) [1].

Teorema 10.18 (teorema de Fejér [2]). *Si una función $f(x)$ es continua sobre el segmento $[-\pi,\pi]$ y satisface la condición $f(-\pi)=f(\pi)$, el promedio de las sumas parciales de su serie trigonométrica de Fourier*

$$\sigma_n(x,f)=\frac{S_0(x,f)+S_1(x,f)+\ldots+S_{n-1}(x,f)}{n}$$

converge (hacia esta función) uniformemente en el segmento $[-\pi,\pi]$ (y en un caso en que la función de período 2π está prolongada a toda la recta infinita, uniformemente en toda la recta infinita).

DEMOSTRACIÓN. De la igualdad (10.55) para $S_n(x,f)$ obtenemos

$$\sigma_n(x,f)=\frac{1}{n\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{f(x+t)}{2\operatorname{sen}\frac{t}{2}}\left[\sum_{k=0}^{n-1}\operatorname{sen}\left(k+\frac{1}{2}\right)t\right]dt. \qquad (10.78)$$

Para calcular la suma que en (10.78) figura entre corchetes, sumemos una identidad

$$2\operatorname{sen}\frac{t}{2}\operatorname{sen}\left(k+\frac{1}{2}\right)t=\cos kt-\cos(k+1)t$$

respecto de todos los $k=0, 1, \ldots, n-1$. Obtendremos, como resultado,

$$2\operatorname{sen}\frac{t}{2}\sum_{k=0}^{n-1}\operatorname{sen}\left(k+\frac{1}{2}\right)t=1-\cos nt=2\operatorname{sen}^2\frac{nt}{2}.$$

[1]) Véase Complemento 3 al cap. 4, v. II.

[2]) L. Fejér (1880—1959), matemático húngaro. Demostró el teorema en 1904.

Con ayuda de la última igualdad, la expresión (10.78) se reduce a la forma

$$\sigma_n(x, f) = \frac{1}{n\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x+t) \frac{\operatorname{sen}^2 \frac{nt}{2}}{2 \operatorname{sen}^2 \frac{t}{2}} dt. \qquad (10.79)$$

De (10.79) se deduce inmediatamente que

$$\frac{1}{n\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\operatorname{sen}^2 \frac{nt}{2}}{2 \operatorname{sen}^2 \frac{t}{2}} dt = 1, \qquad (10.80)$$

pues, el primer miembro es (10.80) es igual al promedio de las sumas parciales de la serie trigonométrica de Fourier de la función $f(x) \equiv 1$, y todas las sumas parciales mencionadas son idénticamente iguales a la unidad (véase p. 2).

Fijamos un $\varepsilon > 0$ arbitrario. De conformidad con el teorema de Weierstrass 10.9, existe un polinomio trigonométrico $T(x)$ de tal índole que

$$|f(x) - T(x)| \leqslant \varepsilon/2 \qquad (10.81)$$

para cualquier x de la recta infinita. Por ser lineales los promedios, $\sigma_n(x, f) = \sigma_n(x, f - T) + \sigma_n(x, T)$, de suerte que

$$|\sigma_n(x, f) - T(x)| \leqslant |\sigma_n(x, f - T)| + |\sigma_n(x, T) - T(x)|. \qquad (10.82)$$

Al escribir la igualdad (10.79) para la función $[f(x) - T(x)]$, obtendremos, teniendo presente que una función $\dfrac{\operatorname{sen}^2 \frac{nt}{2}}{2 \operatorname{sen}^2 \frac{t}{2}}$, llamada *núcleo de Fejér*, es no negativa y aprovechando la estimación (10.81) y la igualdad (10.80):

$$|\sigma_n(x, f - T)| \leqslant \frac{1}{\pi n} \int_{-\pi}^{\pi} |f(x+t) - T(x+t)| \frac{\operatorname{sen}^2 \frac{nt}{2}}{2 \operatorname{sen}^2 \frac{t}{2}} dt \leqslant$$

$$\leqslant \frac{\varepsilon}{2} \cdot \frac{1}{\pi n} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\operatorname{sen}^2 \frac{nt}{2}}{2 \operatorname{sen}^2 \frac{t}{2}} dt = \frac{\varepsilon}{2}. \qquad (10.83)$$

La desigualdad (10.83) se cumple para todo número n. Señalemos ahora que la serie trigonométrica de Fourier del polinomio $T(x)$ *coincide con este polinomio*. De aquí proviene que todas las sumas parciales $S_n(x, T)$, a partir de cierto número n_0, son iguales a $T(x)$. Mas, esto no permite hallar, para $\varepsilon > 0$ fijo, un número N tal que se cumpla

$$|\sigma_n(x, T) - T(x)| < \varepsilon/2 \qquad (10.84)$$

para todos los $n \geqslant N$ y cada x.

De las desigualdades (10.82), (10.83) y (10.84) concluimos que $|\sigma_n(x, f) - f(x)| < \varepsilon$, cualesquiera que sean $n \geqslant N$ y x. El teorema está demostrado.

8. Notas conclusivas. 1°. Al resolver una serie de problemas concretos, nos ocurre a veces desarrollar una función en serie trigonométrica de Fourier no sobre el segmento $[-\pi, \pi]$, sino en un segmento $[-l, l]$, donde l es un número positivo arbitrario. Para poder analizar este caso, basta en todos los razonamientos aducidos sustituir la variable x por la $\frac{\pi}{l}x$. Con tal sustitución lineal de la variable quedan, por supuesto, válidos todos los resultados establecidos. Estos resultados se refieren a la serie trigonométrica de Fourier

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}\left(a_k\cos\frac{\pi}{l}kx+b_k\operatorname{sen}\frac{\pi}{l}kx\right) \tag{10.85}$$

con las siguientes expresiones para los coeficientes de Fourier

$$\left.\begin{array}{c} a_0=\frac{1}{l}\int\limits_{-l}^{l}f(t)\,dt,\\ a_k=\frac{1}{l}\int\limits_{-l}^{l}f(t)\cos\frac{\pi}{l}kt\,dt,\quad b_k=\frac{1}{l}\int\limits_{-l}^{l}f(t)\operatorname{sen}\frac{\pi}{l}kt\,dt\\ (k=1,\,2,\,\ldots). \end{array}\right\} \tag{10.86}$$

No somos propensos a formular de nuevo todos los teoremas establecidos, indicando solamente que en todas las formulaciones el segmento $[-\pi, \pi]$ ha de sustituirse por el segmento $[-l, l]$, y el período 2π, por el $2l$.

2°. Recordemos que una función $f(x)$ se llama *par*, si satisface la condición $f(-x) = f(x)$, e *impar*, si satisface la condición $f(-x) = -f(x)$.

De la forma (10.86) para los coeficientes trigonométricos de Fourier se deduce que para una función par $f(x)$ son nulos todos los coeficientes b_k $(k = 1, 2, \ldots)$, y para una función impar $f(x)$ son nulos todos los coeficientes a_k $(k = 0, 1, 2, \ldots)$. De este modo, *una función $f(x)$ par se desarrolla en serie trigonométrica de Fourier sólo respecto de los cosenos*

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}a_k\cos\frac{\pi}{l}kx,$$

y una función $f(x)$ impar se desarrolla en serie trigonométrica de Fourier sólo respecto de los senos

$$\sum_{k=1}^{\infty}b_k\operatorname{sen}\frac{\pi}{l}kx.$$

3°. Demos a conocer aquí *una forma compleja* de notación de la serie trigonométrica de Fourier (10.85) que en la práctica se usa muy a menudo.

Empleando las relaciones [1])

$$e^{-i\frac{\pi}{l}kx}=\cos\frac{\pi}{l}kx-i\,\mathrm{sen}\,\frac{\pi}{l}kx,\quad e^{i\frac{\pi}{l}kx}=\cos\frac{\pi}{l}kx+i\,\mathrm{sen}\,\frac{\pi}{l}kx,$$

es fácil convencerse de que la serie trigonométrica de Fourier (10.85) con el coeficiente de Fourier (10.86) se reduce a la forma

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{-i\frac{\pi}{l}kx}, \tag{10.87}$$

en la cual los coeficientes complejos c_k tienen por expresión

$$c_k=\frac{1}{2l}\int_{-l}^{l} f(t)\,e^{i\frac{\pi}{l}kt}\,dt \tag{10.88}$$

y se expresan en términos de los coeficientes (10.86) según las fórmulas

$$c_0=\frac{a_0}{2},\quad c_{-k}=\frac{a_k-ib_k}{2},\quad c_k=\frac{a_k+ib_k}{2}\quad (k=1,\ 2,\ \ldots).$$

4°. Es de importancia exclusiva para las aplicaciones un problema de cálculo de los valores de una función según los coeficientes de Fourier de esta función dados de un modo aproximado. La resolución de este problema con ayuda del llamado *método de regularización* se aduce en el Complemento al final de este libro.

§ 6. Integral de Fourier

Cuando la función $f(x)$ viene dada en toda la recta infinita y no es periódica con cualquier período finito, resulta natural desarrollar dicha función no en serie trigonométrica, sino en la llamada *integral de Fourier*.

Al estudio de tal desarrollo se dedica este párrafo, en el cual siempre se sobreentiende que la función $f(x)$ está subordinada a la exigencia de integrabilidad absoluta en la recta infinita $(-\infty,\ \infty)$, es decir, requerimos que exista una integral impropia

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|\,dx. \tag{10.89}$$

Convengamos en emplear los siguientes términos.

---

[1]) Estas relaciones son corolarios inmediatos de la fórmula de Euler, establecida en el p. 3, § 5, cap. 1.

Definición. *Diremos que una función $f(x)$ pertenece en la recta infinita $(-\infty, \infty)$ a la clase L_1 y escribamos $f(x) \in L_1(-\infty, \infty)$, si la función $f(x)$ es integrable (en el propio sentido de Riemann) sobre cualquier segmento y si es convergente la integral impropia* (10.89).

1. Imagen de Fourier y sus propiedades más simples.

Lema 4. *Si $f(x) \in L_1(-\infty, \infty)$, para cualquier punto y de la recta infinita $-\infty < y < \infty$ existe una integral impropia* [1])

$$\hat{f}(y) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{ixy} f(x)\,dx, \tag{10.90}$$

llamada imagen (o transformada) de Fourier de la función $f(x)$. Más aún, la función $\hat{f}(y)$ es continua respecto de y en cada punto de la recta infinita y tiende hacia cero para $|y| \to \infty$, es decir,

$$\lim_{|y|\to\infty} |\hat{f}(y)| = 0. \tag{10.91}$$

DEMOSTRACIÓN. De la igualdad $|e^{ixy} f(x)| = |f(x)|$, de la convergencia de la integral (10.89) y del criterio de Weierstrass (véase teorema 9.7) se deduce la convergencia uniforme respecto de y de la integral (10.90) en cada segmento de la recta infinita, y de aquí, en virtud de que la función e^{ixy} es continua respecto de y, del teorema 9.9 proviene la continuidad de la integral (10.90) respecto de y (en cada segmento, es decir, en cada punto de la recta infinita).

Resta por demostrar la relación (10.91). Fijamos arbitrariamente un $\varepsilon > 0$. Por ser convergente la integral (10.89), podemos fijar $A > 0$ tal que

$$\int_{-\infty}^{-A} |f(x)|\,dx + \int_{A}^{\infty} |f(x)|\,dx < \frac{\varepsilon}{3}. \tag{10.92}$$

Con tal A fijo será válida (en virtud de (10.92)), la desigualdad

$$\left|\int_{-\infty}^{\infty} e^{xiy} f(x)\,dx\right| \leqslant \left|\int_{-A}^{A} e^{ixy} f(x)\,dx\right| + \frac{\varepsilon}{3}, \tag{10.93}$$

y para demostrar la relación (10.91) queda probar que la integral en el segundo miembro de (10.93) es inferior a $\frac{2}{3}\varepsilon$ para todos los $|y|$ suficientemente grandes.

Por cuanto la función $f(x)$ es integrable sobre el segmento $[-A, A]$, podemos fijar tal partición T del segmento $[-A, A]$,

---

[1]) Una función compleja $\hat{f}(y) = u(y) + iv(y)$ del argumento real y se considera aquí como un par de funciones reales $u(y)$ y $v(y)$. La continuidad de $\hat{f}(y)$ en el punto dado y se entiende como la continuidad en este punto de cada una de las funciones $u(y)$ y $v(y)$.

que para la suma superior S_T de esta partición sea válida la desigualdad [1])

$$0 < S_T - \int_{-A}^{A} f(x)\,dx < \frac{\varepsilon}{3}. \tag{10.94}$$

Supongamos que esta partición T se realiza mediante los puntos $-A = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_n = A$, y que M_k es la cota superior exacta de la función $f(x)$ sobre un segmento parcial $[x_{k-1}, x_2]$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$.

Introduzcamos una función

$$\overline{f}_T(x) = \begin{cases} M_k & \text{para } x_{k-1} < x < x_k \quad (k = 1, 2, \ldots, n), \\ 0 & \text{para } x = x_k \quad\quad (k = 0, 1, 2, \ldots, n). \end{cases}$$

Por cuanto la integral no depende del valor de la función subintégral en un número finito de puntos, tendremos, obviamente:

$$\int_{-A}^{A} \overline{f}_T(x)\,dx = \sum_{k=1}^{n} M_k (x_k - x_{k-1}) = S_T,$$

de suerte que, en vista de (10.94),

$$\int_{-A}^{A} |\overline{f}_T(x) - f(x)|\,dx = \int_{-A}^{A} [\overline{f}_T(x) - f(x)]\,dx < \frac{\varepsilon}{3}. \tag{10.95}$$

Apoyándose en la desigualdad (10.95) y teniendo presente que $|e^{ixy}| = 1$ y que $\left|\int_{x_{k-1}}^{x_k} e^{ixy}\,dx\right| \leqslant 2/|y|$, tendremos

$$\left|\int_{-A}^{A} e^{ixy} f(x)\,dx\right| = \left|\int_{-A}^{A} e^{ixy} [f(x) - \overline{f}_T(x) + \overline{f}_T(x)]\,dx\right| \leqslant$$

$$\leqslant \left|\int_{-A}^{A} e^{ixy} \overline{f}_T(x)\,dx\right| + \left|\int_{-A}^{A} e^{ixy} [\overline{f}_T(x) - f(x)]\,dx\right| \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{k=1}^{n} |M_k| \cdot \left|\int_{x_{k-1}}^{x_k} e^{ixy}\,dx\right| + \int_{-A}^{A} |\overline{f}_T(x) - f(x)|\,dx \leqslant$$

$$\leqslant \frac{2}{|y|} \sum_{k=1}^{n} |M_k| + \frac{\varepsilon}{3} \leqslant \frac{2}{3}\varepsilon,$$

siempre que $|y| > \frac{6}{\varepsilon}\left[\sum_{k=1}^{n} |M_k|\right]$. El lema está demostrado.

[1]) Véanse §§ 2 y 3 del cap. 1, v. II.

Corolario. *Si $f(x) \in L_1(-\infty, \infty)$, resulta que*

$$\lim_{\lambda\to\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \cos\lambda x \cdot f(x)\,dx = 0, \quad \lim_{\lambda\to\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \operatorname{sen}\lambda x \cdot f(x)\,dx = 0.$$

2. Condiciones de desarrollo de una función en serie de Fourier.

Definición. *Para toda función $f(x)$ de la clase $L_1(-\infty, \infty)$ un límite*

$$\lim_{\lambda\to\infty} \frac{1}{2\pi} \int_{-\lambda}^{\lambda} e^{-ixy}\hat{f}(y)\,dy = \lim_{\lambda\to\infty} \frac{1}{2\pi} \int_{-\lambda}^{\lambda} \left[\int_{-\infty}^{\infty} e^{iy(u-x)} f(u)\,du \right] dy,$$

si existe, se llama desarrollo de esta función en una integral de Fourier.

Demostremos el siguiente teorema fundamental.

Teorema 10.19. **(*condición para el desarrollo de una función en un punto dado en integral de Fourier*).** *Si $f(x) \in L_1(-\infty, \infty)$ y si la función $f(x)$ satisface en el punto dado x por la derecha la condición de Hölder de algún orden positivo α_1 $(0 < \alpha_1 \leqslant 1)$, y por la izquierda, la condición de Hölder de algún orden positivo α_2 $(0 < \alpha_2 \leqslant 1)$, en el punto dado x se verifica la igualdad*

$$\lim_{\lambda\to\infty} \frac{1}{2\pi} \int_{-\lambda}^{\lambda} e^{-ixy}\hat{f}(y)\,dy = \frac{f(x+0)+f(x-0)}{2}. \tag{10.96}$$

OBSERVACIÓN 1. En todo punto x, en el que el valor de $f(x)$ es igual a la semisuma de los valores límites derecho e izquierdo (en particular, en cada punto de continuidad de $f(x)$), podemos escribir $f(x)$ en el segundo miembro de (10.96).

DEMOSTRACIÓN DEL TEOREMA 10.19. Por cuanto la imagen de Fourier $\hat{f}(y)$ (en virtud del lema 4) es una función continua de y, para cualquier λ *positivo* existe una integral

$$\int_{-\lambda}^{\lambda} e^{-ixy}\hat{f}(y)\,dy = \int_{-\lambda}^{\lambda} e^{-ixy} \left[\int_{-\infty}^{\infty} e^{iuy} f(u)\,du \right] dy. \tag{10.97}$$

En la integral que figura en el segundo miembro de (10.97) podemos cambiar el orden de integración respecto de y y u (puesto que la integral interior converge uniformemente respecto de y en cualquier segmento $[-\lambda, \lambda]$).

Cambiando el orden de integración respecto de y y u, aprovechando las igualdades $e^{iy(u-x)} = \cos y(u-x) + i \operatorname{sen} y(u-x)$, $\int_{-\lambda}^{\lambda} \cos y(u-x)\,dy = \frac{\operatorname{sen}\lambda(u-x)}{2(u-x)}$, $\int_{-\lambda}^{\lambda} \operatorname{sen} y(u-x)\,dy = 0$, y realizando

una sustitución $u = x + t$, tendremos

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\lambda}^{\lambda} e^{-ixy} \hat{f}(y)\, dy = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left[\int_{-\lambda}^{\lambda} e^{iy(u-x)}\, dy \right] f(u)\, du =$$

$$= \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\operatorname{sen} \lambda (u-x)}{u-x} f(u)\, du = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\operatorname{sen} \lambda t}{t} f(x+t)\, dt.$$

Así pues, para cualquier λ positivo

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\lambda}^{\lambda} e^{-ixy} \hat{f}(y)\, dy = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{0} \frac{\operatorname{sen} \lambda t}{t} f(x+t)\, dt +$$

$$+ \frac{1}{\pi} \int_{0}^{\infty} \frac{\operatorname{sen} \lambda t}{t} f(x+t)\, dt. \qquad (10.98)$$

Notemos ahora que para todo λ positivo se verifica la igualdad [1]) $\int_{0}^{\infty} \frac{\operatorname{sen} \lambda t}{t}\, dt = \frac{\pi}{2}$, y, por lo tanto, también $\int_{-\infty}^{0} \frac{\operatorname{sen} \lambda t}{t}\, dt = \frac{\pi}{2}$.

De las últimas dos igualdades se deduce que para todo λ positivo

$$\frac{f(x+0)}{2} = \frac{1}{\pi} \int_{0}^{\infty} f(x+0) \frac{\operatorname{sen} \lambda t}{t}\, dt, \qquad (10.99)$$

$$\frac{f(x-0)}{2} = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{0} f(x-0) \frac{\operatorname{sen} \lambda t}{t}\, dt. \qquad (10.100)$$

Al sustraer de (10.98) las igualdades (10.99) y (10.100), resulta que para todo λ positivo

$$\int_{-\lambda}^{\lambda} e^{-ixy} \hat{f}(y)\, dy - \frac{f(x+0) + f(x-0)}{2} =$$

$$= \frac{1}{\pi} \int_{0}^{\infty} [f(x+t) - f(x+0)] \frac{\operatorname{sen} \lambda t}{t}\, dt +$$

$$+ \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{0} [f(x+t) - f(x-0)] \frac{\operatorname{sen} \lambda t}{t}\, dt. \qquad (10.101)$$

Por cuanto la función $f(x)$ satisface en el punto x por la derecha la condición de Hölder de orden α_1, y, por la izquierda, la condición de Hölder de orden α_2, existen, pues, unas constantes M_1 y M_2 tales que para todos los t positivos, suficientemente pequeños, se

[1]) Véase cap. 9, § 3.

cumpla la desigualdad (10.75), y para todos los t negativos, suficientemente pequeños, se cumpla la desigualdad (10.76). Si denotamos con M el mayor de los números M_1 y M_2, y con α, el número menor de α_1 y α_2, en los miembros derechos de (10.75) y (10.76) podemos escribir $M \mid t \mid^\alpha$, con la particularidad de que dichas desigualdades serán válidas para todos los valores positivos (negativos, respectivamente) de t que satisfacen la condición $\mid t \mid \leqslant \delta$, donde δ es un número positivo arbitrario, suficientemente pequeño.

Ahora podemos reescribir del modo siguiente la relación (10.101):

$$\int_{-\lambda}^{\lambda} e^{-ixy}\hat{f}(y)\,dy - \frac{f(x+0)+f(x-0)}{2} =$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\delta} [f(x+t)-f(x+0)]\frac{\operatorname{sen}\lambda t}{t}\,dt +$$

$$+\frac{1}{\pi}\int_{-\delta}^{0} [f(x+t)-f(x-0)]\frac{\operatorname{sen}\lambda t}{t}\,dt + \frac{1}{\pi}\int_{|t|\geqslant\delta} f(x+t)\frac{\operatorname{sen}\lambda t}{t}\,dt -$$

$$-\frac{f(x+0)}{\pi}\int_{\delta}^{\infty}\frac{\operatorname{sen}\lambda t}{t}\,dt - \frac{f(x-0)}{\pi}\int_{-\infty}^{-\delta}\frac{\operatorname{sen}\lambda t}{t}\,dt. \qquad (10.102)$$

Fijamos un $\varepsilon > 0$ arbitrario y, según éste, un $\delta > 0$ tan p queño que se cumpla una desigualdad

$$\frac{M\delta^2}{\pi\alpha} < \frac{\varepsilon}{4}. \qquad (10.103)$$

Estimando las primeras dos integrales en el miembro derecho de (10.102) con ayuda de las desigualdades (10.75) y (10.76) (con la magnitud $M \mid t \mid^\alpha$ en los segundos miembros de estas desigualdades), tendremos

$$\left|\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\delta} [f(x+t)-f(x+0)]\frac{\operatorname{sen}\lambda t}{t}\,dt\right| \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\delta} |f(x+t)-f(x+0)|\frac{dt}{t} \leqslant \frac{M}{\pi}\int_{0}^{\delta} t^{\alpha-1}\,dt = \frac{M\delta^\alpha}{\pi^\alpha}$$

y, de manera sumamente análoga,

$$\left|\frac{1}{\pi}\int_{-\delta}^{0} [f(x+t)-f(x-0)]\frac{\operatorname{sen}\lambda t}{t}\,dt\right| \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{\pi}\int_{-\delta}^{0} |f(x+t)-f(x-0)|\frac{dt}{|t|} \leqslant \frac{M}{\pi}\int_{-\delta}^{0} |t|^{\alpha-1}\,dt = \frac{M\delta^\alpha}{\pi\alpha}.$$

De las últimas dos desigualdades y de (10.103), obtendremos

$$\left|\frac{1}{\pi}\int_0^\delta [f(x+t)-f(x+0)]\frac{\operatorname{sen}\lambda t}{t}\,dt\right|+$$
$$+\left|\frac{1}{\pi}\int_{-\delta}^0 [f(x+t)-f(x-0)]\frac{\operatorname{sen}\lambda t}{t}\,dt\right|<\frac{\varepsilon}{2}. \qquad (10.104)$$

Para estimar la tercera integral en el miembro derecho de (10.102), introduzcamos una función

$$g(t)=\begin{cases}\dfrac{1}{\pi}\dfrac{f(x+t)}{t} & \text{para } |t|\geqslant\delta,\\ 0 & \text{para } |t|<\delta.\end{cases}$$

Por cuanto $g(t)\in L_1(-\infty,\infty)$, entonces, en virtud del corolario del lema 4,

$$\lim_{\lambda\to\infty}\int_{-\infty}^{\infty} g(t)\operatorname{sen}\lambda t\,dt=\lim_{\lambda\to\infty}\frac{1}{\pi}\int_{|t|\geqslant\delta} f(x+t)\frac{\operatorname{sen}\lambda t}{t}\,dt=0,$$

mas, esto significa que para $\varepsilon>0$ fijo existe Λ_1 tal que

$$\left|\frac{1}{\pi}\int_{|t|\geqslant\delta} f(x+t)\frac{\operatorname{sen}\lambda t}{t}\,dt\right|<\frac{\varepsilon}{4}\ (\text{para } \lambda\geqslant\Lambda_1). \qquad (10.105)$$

Por fin, notemos que

$$\int_{-\infty}^{-\delta}\frac{\operatorname{sen}\lambda t}{t}\,dt=\int_{\delta}^{\infty}\frac{\operatorname{sen}\lambda t}{t}\,dt=\int_{\lambda\delta}^{\infty}\frac{\operatorname{sen}\tau}{\tau}\,d\tau\to 0$$

cuando $\lambda\to\infty$. De aquí proviene que para $\varepsilon>0$ fijo arbitrario y para el punto en consideración x se encontrará tal Λ_2 que

$$\left|\frac{f(x+0)}{\pi}\int_{\delta}^{\infty}\frac{\operatorname{sen}\lambda t}{t}\,dt\right|+\left|\frac{f(x-0)}{\pi}\int_{-\infty}^{-\delta}\frac{\operatorname{sen}\lambda t}{t}\,dt\right|<\frac{\varepsilon}{4}\ (\text{para } \lambda\geqslant\Lambda_2).$$
$$(10.106)$$

Denotemos con Λ el mayor de los números Λ_1 y Λ_2. De las relaciones (10.102), (10.104)—(10.106) concluimos que

$$\left|\int_{-\lambda}^{\lambda} e^{-ixy}\hat{f}(y)\,dy-\frac{f(x+0)+f(x-0)}{2}\right|<\varepsilon\ (\text{para } \lambda\geqslant\Lambda).$$

El teorema está demostrado.

Corolario. *La igualdad* (10.96) *es con mayor razón verídica, si* $f(x) \in L_1(-\infty, \infty)$ *y si la función* $f(x)$ *tiene en el punto dado* x *derivadas a la derecha y a la izquierda entendidas como límites de las relaciones* $\lim\limits_{t\to 0+0} \frac{f(x+t)-f(x+0)}{t}$ $\left(\lim\limits_{t\to 0-0} \frac{f(x+t)-f(x-0)}{t}\right)$.

OBSERVACIÓN 2. El límite que figura en el primer miembro de (10.96) puede escribirse en forma de una integral impropia

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ixy} \hat{f}(y)\, dy, \tag{10.107}$$

pero se debe recordar que esta integral impropia *es convergente en el sentido del valor principal*, es decir, es un límite de la correspondiente integral propia sólo bajo la condición de que los límites de integración en esta integral propia *son números simétricos con relación a cero*. No se puede entender la integral impropia (10.107) como límite

$$\lim_{\substack{\lambda' \to -\infty \\ \lambda'' \to +\infty}} \int_{\lambda'}^{\lambda''} e^{-ixy} \hat{f}(y)\, dy$$

cuando tienden independientemente: λ' hacia $-\infty$, y λ'' hacia ∞. En el punto que viene abajo escribiremos, en lugar del límite (10.96), la integral impropia (10.107), entendiéndola cada vez en el sentido mencionado.

3. Noción de las transformaciones de Fourier directa e inversa. Escribiendo el primer miembro de (10.96) en forma de la integral impropia (10.107) y considerando que el valor de la función $f(x)$ en un punto dado x es igual a la semisuma de los valores límites derecho e izquierdo, obtendremos una igualdad

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ixy} \hat{f}(y)\, dy, \tag{10.108}$$

que permite hallar la función $f(x)$ según su imagen de Fourier $\hat{f}(y)$ y que se denomina frecuentemente *transformación inversa de Fourier*. Con relación a esta igualdad, la fórmula (10.90), mediante la cual la imagen de Fourier $f(y)$ se expresa en términos de la propia función $f(x)$, se llama a menudo *transformación directa de Fourier*.

Por analogía con la serie trigonométrica de Fourier concluimos que la imagen de Fourier es un análogo del coeficiente de Fourier, y la transformación inversa de Fourier (10.108) es un análogo del desarrollo de una función en serie trigonométrica de Fourier.

Analicemos las transformaciones de Fourier directa e inversa. Para dos casos particulares de importancia: 1) para el caso en que la función $f(x)$ es *par* (es decir, satisface la condición $f(-x) = f(x)$),

y 2) para el caso en que la función $f(x)$ es *impar* (es decir, satisface la condición $f(-x) = -f(x)$.

1) Si $f(x)$ es una función par, de la fórmula (10.90), obtendremos con ayuda de la fórmula de Euler $e^{ixy} = \cos xy + i \operatorname{sen} xy$:

$$\hat{f}(y) = \int_{-\infty}^{\infty} \cos xy f(x)\, dx = 2\int_{0}^{\infty} f(x) \cos xy\, dx. \qquad (10.109)$$

De la fórmula (10.109) se deduce, a su vez, que la imagen de Fourier $\hat{f}(y)$ es también una función par de y. Por eso, la transformación inversa de Fourier (10.108) toma una forma

$$f(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(y) \cos yx\, dy = \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\infty} \hat{f}(y) \cos yx\, dy. \qquad (10.110)$$

La fórmula (10.109) se llama, a menudo, *coseno transformación directa de Fourier*, y la (10.110), *coseno transformación inversa de Fourier*.

2) Si $f(x)$ es una función impar, de un modo sumamente análogo obtendremos de las fórmulas (10.90) y (10.108) *la seno transformación directa de Fourier*

$$\hat{f}(y) = 2\int_{0}^{\infty} f(x) \operatorname{sen} xy\, dx$$

y *la seno transformación inversa de Fourier*

$$f(x) = \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\infty} \hat{f}(y) \operatorname{sen} yx\, dy.$$

En la práctica se encuentra frecuentemente un caso, cuando la función $f(x)$ viene dada *solamente en una semirrecta* $0 \leqslant x < \infty$. Según nuestro deseo, podemos hacer prolongar esta función a la semirrecta $-\infty < x \leqslant 0$ de un modo o bien par, o bien impar, y emplear para dicha función o bien el coseno transformación de Fourier, o bien el seno transformación de Fourier.

EJEMPLO. Veamos en la semirrecta $0 \leqslant x < \infty$ una función $f(x) = e^{-ax}$, donde $a > 0$. Haciendo prolongar la función de un modo par a la semirrecta $-\infty < x \leqslant 0$, obtendremos las coseno transformaciones de Fourier directa e inversa

$$\hat{f}(y) = 2\int_{0}^{\infty} e^{-ax} \cos xy\, dx = \frac{2a}{a^2+y^2} \;[1]$$

[1]) Recordemos que la integral $\int e^{-ax} \cos xy\, dx$ puede calcularse de un modo elemental, integrando por partes (véase cap. 6, v. I).

$\hat{f}(y)$ se llama, a veces, *coseno imagen de Fourier*)

$$f(x)=\frac{2}{\pi}a\int_0^\infty \frac{\cos yx}{a^2+y^2}\,dy=e^{-ax}\quad (x\geqslant 0).$$

Haciendo prolongar la misma función a la semirrecta $-\infty < x \leqslant 0$ de un modo impar, es decir, suponiendo

$$f(x)=\begin{cases} e^{-ax} & \text{para } x>0,\\ 0 & \text{para } x=0,\\ -e^{-a|x|} & \text{para } x<0,\end{cases}$$

obtendremos seno transformaciones de Fourier directa e inversa

$$\hat{f}(y)=2\int_0^\infty e^{-ax}\,\text{sen}\,xy\,dx=\frac{2y}{a^2+y^2}\;^{1)}$$

($\hat{f}(y)$ se llama, a veces, *seno-imagen de Fourier*),

$$f(x)=\frac{2}{\pi}\int_0^\infty \frac{y\,\text{sen}\,yx}{a^2+y^2}\,dy=\begin{cases} e^{-ax} & \text{para } x>0\\ 0 & \text{para } x=0.\end{cases}$$

4. Algunas propiedades adicionales de la transformación de Fourier. En este punto detengámonos en ciertas propiedades adicionales de la transformación de Fourier que se ponen de manifiesto frecuentemente en las aplicaciones.

Lema 5. *Supongamos que para cierto número entero no negativo k se tiene una función $(1+|x|)^k\cdot f(x)\in L_1(-\infty,\infty)$. Entonces, la imagen de Fourier* (10.90) *de la función $f(x)$ es k veces diferenciable respecto de la variable y, con la particularidad de que la derivada respecto de y de cualquier orden m ($m=1, 2, \ldots, k$) puede calcularse por diferenciación bajo el signo de integral* (10.90), *es decir, según la fórmula*

$$\frac{d^m}{dy^m}\hat{f}(y)=\int_{-\infty}^{\infty} e^{ixy}(ix)^m\cdot f(x)\,dx\quad (m=1,\ 2,\ \ldots,\ k)\qquad (10.111)$$

DEMOSTRACIÓN. De la desigualdad

$$\left|\frac{d^m}{dy^m}e^{ixy}f(x)\right|=|e^{ixy}\cdot(ix)^m f(x)|\leqslant(1+|x|)^k\cdot|f(x)|$$

que se verifica para m cualquiera ($m=0, 1, \ldots, k$) y de la convergencia de la integral impropia $\int_{-\infty}^{\infty}(1+|x|)^k\cdot|f(x)|\,dx$, en virtud del criterio de Weierstrass (es decir, del teorema 9.7), se deduce la convergencia, uniforme respecto de y (en cada segmento) de la integral que figura en el segundo miembro de (10.111), cualquier que sea $m=0, 1, \ldots, k$. Debido al teorema 9.10, esto asegura la existencia de la derivada respecto de y de cualquier orden $m = 1, 2, \ldots, k$ y la validez de la fórmula (10.111). El lema está demostrado.

---

[1]) Véase la nota anterior a pie de la página.

Lema 6. *Supongamos que una función $f(x)$ tiene en cada punto x todas las derivadas de hasta el orden $k \geqslant 1$ inclusive, con la particularidad de que la propia función $f(x)$ y la derivada de k-ésimo orden son absolutamente integrables en la recta infinita y para cualquier $m = 0, 1, \ldots, (k-1)$ es válida la relación*

$$\lim_{|x| \to \infty} \left[\frac{d^m f(x)}{dx^m}\right] = 0. \tag{10.112}$$

En este caso para la transformación de Fourier $\hat{f}(y)$ es válida, para $|y| \to \infty$, una estimación

$$|\hat{f}(y)| = o(|y|^{-k}). \tag{10.113}$$

DEMOSTRACIÓN. Analicemos para todo $\lambda > 0$ una integral

$$\int_{-\lambda}^{\lambda} e^{ixy} \frac{d^k f(x)}{dx^k}\, dx.$$

Integrándola k veces por partes, obtendremos la siguiente fórmula

$$\int_{-\lambda}^{\lambda} e^{ixy} \frac{d^k f(x)}{dx^k}\, dx = \left[e^{ixy} \frac{d^{k-1} f(x)}{dx^{k-1}}\right]\Bigg|_{-\lambda}^{\lambda} -$$

$$-\left[iy \cdot e^{ixy} \frac{d^{k-2} f(x)}{dx^{k-2}}\right]\Bigg|_{-\lambda}^{\lambda} + \ldots + (-i)^k \cdot y^k \int_{-\lambda}^{\lambda} e^{ixy} f(x)\, dx.$$

Haciendo tender λ hacia ∞ en la igualdad obtenida y considerando que en virtud de (10.112) todas las sustituciones se reducen a cero, obtenemos

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{ixy} \frac{d^k f(x)}{dx^k}\, dx = (-iy)^k \int_{-\infty}^{\infty} e^{ixy} \cdot f(x)\, dx = (-iy)^k \cdot \hat{f}(y).$$

Teniendo presente que la integral en el primer miembro de la última igualdad tiende, en virtud del lema 4, hacia cero, cuando $|y| \to \infty$, obtenemos precisamente la estimación (10.113). El lema está demostrado.

Teorema 10.20. *Supongamos que una función $f(x)$ y su segunda derivada son absolutamente integrables en una recta infinita $(-\infty, \infty)$, con la particularidad de que la propia función $f(x)$ y su primera derivada tienden hacia cero cuando $|x| \to \infty$. Admitamos, además, que una función $g(x)$ es absolutamente integrable en la recta infinita $(-\infty, \infty)$. Entonces, se verifica la siguiente igualdad*

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, g(x)\, dx = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(y)\, \hat{g}^*(y)\, dy, \tag{10.114}$$

llamada igualdad generalizada de Parseval o igualdad de Plancherel [1]. (En esta igualdad $\hat{f}(y)$ y $\hat{g}(y)$ denotan las imágenes de Fourier de las funciones $f(x)$ y $g(x)$, respectivamente, y $\hat{g}^*(y)$ es una magnitud compleja conjugada de $\hat{g}(y)$).

[1] M. Plancherel (n. 1885), matemático francés.

DEMOSTRACIÓN. En virtud del teorema 10.19, en cada punto x se verifica una igualdad

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ixy} \hat{f}(y)\, dy, \qquad (10.115)$$

y, además, en virtud del lema 6, es válida la estimación $|\hat{f}(y)| \leqslant C(1 + |y|)^{-2}$ que asegura la convergencia absoluta e uniforme (respecto de x) de la integral que figura en el segundo miembro de (10.115) en toda la recta infinita.

Multiplicando ambos miembros de (10.115) por $g(x)$ e integrando respecto de x en los márgenes de $-\lambda$ a λ, tendremos

$$\int_{-\lambda}^{\lambda} f(x) g(x)\, dx = \frac{1}{2\pi} \int_{-\lambda}^{\lambda} g(x) \left[\int_{-\infty}^{\infty} e^{-ixy} \hat{f}(y)\, dy \right] dx. \qquad (10.116)$$

En vista de la convergencia uniforme respecto de x (aducida más arriba) de la integral (10.115), podemos cambiar en el segundo miembro de (10.116) el orden de integración respecto de x e y, obteniendo como resultado:

$$\int_{-\lambda}^{\lambda} f(x) g(x)\, dx = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left[\int_{-\lambda}^{\lambda} e^{ixy} g(x)\, dx \right]^{*} \hat{f}(y)\, dy \qquad (10.117)$$

(el asterisco denota una conjugación compleja).

En virtud de la desigualdad

$$\left| \left[\int_{-\lambda}^{\lambda} e^{ixy} g(x)\, dx \right]^{*} \right| \cdot |\hat{f}(y)| \leqslant \int_{-\infty}^{\infty} |g(x)| \cdot dx \cdot C(1 + |y|)^{-2}$$

y del criterio de Weierstrass, la integral en el segundo miembro de (10.117) converge uniformemente respecto de λ en la recta infinita $-\infty < \lambda < \infty$. Por consiguiente, en (10.117) podemos pasar a un límite para $\lambda \to \infty$, realizando en el miembro de (10.117) el paso al límite bajo el signo de integral. El teorema está demostrado.

§ 7. Series trigonométricas múltiples e integrales de Fourier

1. Concepto de serie trigonométrica múltiple de Fourier y de sus sumas parciales rectangulares y esféricas. Supongamos que una función de N variables $f(x_1, x_2, \ldots, x_N)$ está definida y es integrable en un cubo N-dimensional $-\pi \leqslant x_k \leqslant \pi$ $(k = 1, 2, \ldots, N)$. Designemos dicho cubo por un símbolo Π. Resulta cómodo escribir la serie trigonométrica múltiple de tal función directamente en una forma compleja, empleando, para abreviar la notación, una noción de producto escalar de dos vectores N-dimensionales.

Sea $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_N)$ un vector que tiene coordenadas reales arbitrarias $x_1, x_2, \ldots, x_N$, y sea $\boldsymbol{n} = (n_1, n_2, \ldots, n_N)$ un vector con coordenadas de números *enteros* $n_1, n_2, \ldots, n_N$.

Se denomina *serie trigonométrica múltiple de Fourier de la función* $f(x) = f(x_1, x_2, \ldots, x_N)$ una serie de la forma

$$\sum_{n_1=-\infty}^{\infty} \cdots \sum_{n_N=-\infty}^{\infty} \hat{f}_n \cdot e^{-i(nx)}, \tag{10.118}$$

en la que los números $\hat{f}_n$, llamados *coeficientes de Fourier*, se definen mediante las igualdades

$$\hat{f}_n = \hat{f}_{n_1 n_2 \ldots n_N} =$$
$$= (2\pi)^{-N} \int \underset{\Pi}{\cdots} \int f(y_1, \ldots, y_N)\, e^{i(y_1 n_1 + \ldots + y_N n_N)}\, dy_1 \ldots dy_N, \tag{10.119}$$

y el símbolo (xn) denota producto escalar de los vectores x y n que es igual a $x_1 n_1 + \ldots x_N n_N$.

Por supuesto, la serie trigonométrica múltiple de Fourier (10.118) puede considerarse como una serie de Fourier con relación a un sistema [1]) ortonormalizado (en el cubo N-dimensional Π), formado con ayuda de toda clase de productos de elementos de un sistema trigonométrico unidimensional tomados según las variables $x_1, x_2, \ldots, x_N$, respectivamente. Este sistema ortonormalizado suele denominarse *sistema trigonométrico múltiple*.

Al igual que para todo sistema ortonormalizado, para un sistema trigonométrico múltiple es válida *la desigualdad de Bessel* que tiene por expresión

$$\sum_{n_1=-\infty}^{\infty} \cdots \sum_{n_N=-\infty}^{\infty} |\hat{f}_n|^2 \leqslant (2\pi)^{-N} \int \underset{\Pi}{\cdots} \int f^2(x_1, \ldots, x_N)\, dx_1 \ldots dx_N, \tag{10.120}$$

donde $f(x_1, \ldots, x_N)$ es cualquier función continua en el cubo N-dimensional Π.

Examinemos la cuestión de convergencia de la serie trigonométrica múltiple de Fourier. Si esta serie *no converge* en un punto dado $x = (x_1, \ldots, x_N)$ *absolutamente*, la cuestión de su convergencia depende (en virtud del teorema de Riemann 4.10, v. II) del orden en que siguen sus términos (o, que es lo mismo, del orden de sumación según los índices $n_1, n_2, \ldots, n_N$).

Son de amplio uso dos métodos de sumar la serie trigonométrica múltiple de Fourier: el método *esférico* y el *rectangular*.

Se llaman *sumas parciales esféricas* de la serie trigonométrica múltiple de Fourier (10.118) las sumas de la forma

$$S_\lambda(x, f) = \sum_{|n| \leqslant \lambda} \hat{f}_n e^{-i(xn)}$$

[1]) En este caso un producto escalar de dos cualesquiera funciones se define como integral del producto de estas funciones extendida al cubo Π.

tomadas según todos los valores de números enteros $n_1, n_2, \ldots, n_N$ que satisfacen la condición $|\boldsymbol{n}| = \sqrt{n_1^2 + n_2^2 + \ldots + n_N^2} \leqslant \lambda$.

Se dice que la serie trigonométrica múltiple de Fourier (10.118) *es sumable en un punto dado x por el método esférico, si en dicho punto existe un límite* $\lim\limits_{\lambda\to\infty} S_\lambda(x, f)$.

Se llaman *sumas parciales rectangulares* de la serie trigonométrica múltiple de Fourier (10.118) las sumas de la forma

$$S_{m_1 m_2 \ldots m_N}(x, f) = \sum_{n_1=-m_1}^{m_1} \ldots \sum_{n_N=-m_N}^{m_N} \hat{f}_n e^{-i(xn)}.$$

Se dice que la serie trigonométrica múltiple de Fourier (10.118) *es sumable en un punto dado x por el método rectangular* (*o por el método de Princegeime*), *si en dicho punto existe un límite*

$$\lim_{\substack{m_1\to\infty\\ m_2\to\infty\\ \cdots\cdots\\ m_N\to\infty}} S_{m_1 m_2 \ldots m_N}(x, f)$$

(*cuando tiende al infinito cada índice* $m_1, m_2, \ldots, m_N$).

Ambos métodos de sumación tienen tanto sus ventajas, como deficiencias. Si una serie trigonométrica múltiple de Fourier se analiza como serie de Fourier con relación a un sistema ortonormalizado, resulta natural disponer sus términos en el orden de crecimiento de $|\boldsymbol{n}|$ y utilizar las sumas parciales esféricas.

Las sumas parciales rectangulares se emplean al analizar el comportamiento de las series de potencias múltiples cerca de la frontera del dominio de convergencia. Conviene notar, que la definición de la suma de una serie como límite de las sumas rectangulares (contrariamente a la definición que se apoya en el límite de las sumas esféricas) no impone restricciones algunas en el conjunto infinito de sumas parciales de esta serie.

Antes de formular las condiciones de convergencia de una serie trigonométrica múltiple de Fourier, definamos ciertas características de suavidad de una función de N variables.

2. Módulo de continuidad y clases de Hölder para las funciones de N variables. Supongamos que una función de N variables $f(x) = f(x_1, x_2, \ldots, x_N)$ está definida y es continua en un dominio N-dimensional D.

Definición 1. *Para cada $\delta > 0$, llamemos módulo de continuidad de la función $f(x)$ en un dominio D la cota superior exacta del módulo de la diferencia $|f(x') - f(x'')|$ sobre el conjunto de todos los puntos x' y x'' que pertenecen al dominio D, y la distancia $\rho(x', x'')$ entre los cuales es inferior a δ.*

Denotemos con $\omega(\delta, f)$ el módulo de continuidad de la función $f(x)$ en el dominio D.

Definición 2. *Para cualquier $\varkappa$ de un semisegmento $0 < \varkappa \leqslant 1$ diremos que una función $f(x)$ pertenece en el dominio D a la clase de Hölder $C^\varkappa$ con el exponente $\varkappa$ y escribiremos $f(x) \in C^\varkappa(D)$, si el módulo de la función continua $f(x)$ en D es de orden $\omega(\delta, f) = o(\delta^\varkappa)$ para $0 < \varkappa < 1$, y $\omega(\delta, f) = O(\delta)$ para $\varkappa = 1$.*

Sea, ahora, α *cualquier* número *positivo* (no forzosamente entero). Este número podemos representarlo en la forma $\alpha = r + \varkappa$, donde r es un número entero, y $\varkappa$ pertenece al semisegmento $0 < \varkappa \leqslant 1$.

Definición 3. *Diremos que una función $f(x)$ pertenece en el dominio D a la clase de Hölder C^α con el exponente $\alpha > 0$, y escribiremos $f(x) \in C^\alpha(D)$, si todas las derivadas parciales de la función $f(x)$ de orden r son continuas en el dominio D y cada derivada parcial de orden r pertenece a la clase $C^\varkappa(D)$ introducida en la definición 2.*

3. Condiciones de convergencia de una serie trigonométrica múltiple de Fourier. Empecemos por establecer las condiciones más simples de convergencia absoluta y uniforme de la serie trigonométrica múltiple de Fourier.

Teorema 10.21. *Si una función $f(x)$ está periódicamente (con el período de 2π respecto de cada una de las variables) prolongada a todo el espacio E^N y tiene en E^N derivadas continuas de orden $s = [N/2] + 1$, donde $[N/2]$ es la parte entera del número $N/2$, la serie trigonométrica múltiple de Fourier de la función $f(x)$ converge (hacia esta función) absoluta y uniformemente en todo el espacio E^N.*

DEMOSTRACIÓN. Convengamos en denotar con el símbolo $\left(\widehat{\frac{\partial^m f}{\partial x_k^m}}\right)_{\mathbf{n}}$ el coeficiente de Fourier de la derivada $\frac{\partial^m f}{\partial x_k^m}$ con el número $\mathbf{n} = (n_1, \ldots, n_N)$. Integrando por partes, llegamos a que $\left(\widehat{\frac{\partial f}{\partial x_k}}\right)_{\mathbf{n}} = i n_k \hat{f}_{\mathbf{n}}$ (para cualquier $k = 1, 2, \ldots, N$) de suerte que $\left|\sum_{k=1}^{N} \left(\widehat{\frac{\partial f}{\partial x_k}}\right)_{\mathbf{n}}\right| = |\hat{f}_{\mathbf{n}}| (|n_1| + \ldots + |n_N|)$ y, por consiguiente

$$|\hat{f}_{\mathbf{n}}| = (|n_1| + \ldots + |n_N|)^{-1} \sum_{k=1}^{N} \left|\left(\widehat{\frac{\partial f}{\partial x_k}}\right)_{\mathbf{n}}\right|. \qquad (10.121)$$

La fórmula (10.121) es válida no sólo para la función f, sino también para cada derivada parcial de la función f de hasta el orden $(s - 1)$ inclusive.

De aquí se deduce en seguida una relación

$$|\hat{f}_{\mathbf{n}}| \leqslant (|n_1| + \ldots + |n_N|)^{-s} \sum_{s_1 + \ldots + s_N = s} \left|\left(\widehat{\frac{\partial^s f}{\partial x_1^{s_1} \ldots \partial x_N^{s_N}}}\right)_{\mathbf{n}}\right|, \qquad (10.122)$$

en cuyo segundo miembro la suma se toma según todos los $s_1, s_2, \ldots, s_N$ enteros no negativos que satisfacen la condición $s_1 + s_2 + \ldots + s_N = s$ (de modo que el número de sumandos en esta suma es igual a N^s). De (10.122) proviene [1]) a su vez:

$$|\hat{f}_n| \leqslant \frac{1}{2}(|n_1| + \ldots + |n_N|)^{-2s} + \frac{N^s}{2} \sum_{s_1+\ldots+s_N=s} \left| \left(\frac{\widehat{\partial^s f}}{\partial x_1^{s_1} \ldots \partial x_N^{s_N}} \right)_n \right|^2. \quad (10.123)$$

Tomando en consideración que $s = \frac{N}{2} + \varepsilon$, donde $\varepsilon = 1$ para N par y $\varepsilon = 1/2$, para N impar, y que

$$(|n_1| + \ldots + |n_N|)^{-2s} = (|n_1| + \ldots + |n_N|)^{-N-2\varepsilon} \leqslant \leqslant |n_1|^{-1-\frac{2\varepsilon}{N}} \ldots |n_N|^{-1-\frac{2\varepsilon}{N}},$$

obtenemos de (10.123)

$$|\hat{f}_n| \leqslant \frac{1}{2} |n_1|^{-1-\frac{2\varepsilon}{N}} \ldots |n_N|^{-1-\frac{2\varepsilon}{N}} + \frac{N^s}{2} \cdot \sum_{s_1+\ldots+s_N=s} \left| \left(\frac{\widehat{\partial^s f}}{\partial x_1^{s_1} \ldots \partial x_N^{s_N}} \right)_n \right|^2. \quad (10.124)$$

Con el fin de probar la convergencia absoluta y uniforme de la serie trigonométrica múltiple de Fourier (10.118), basta (en virtud del criterio de Weierstrass) demostrar la convergencia de una serie numérica que la mayora

$$\sum_{n_1=-\infty}^{\infty} \ldots \sum_{n_N=-\infty}^{\infty} |\hat{f}_n|,$$

pero, (en virtud de la desigualdad (10.124)) la convergencia de la última serie es una consecuencia directa de la convergencia, para cualquier k, de la serie numérica

$\sum_{n_k=-\infty}^{\infty} |n_k|^{-1-\frac{2\varepsilon}{N}}$, y de la convergencia, para cualesquiera s_1,

---

[1]) Empleamos las desigualdades $|a| \cdot |b| \leqslant \frac{a^2}{2} + \frac{b^2}{2}$ y $(|a_1| + \ldots \ldots |a_p|)^2 \leqslant p\,(a_1^2 + \ldots + a_p^2)$.

$s_2, \ldots, s_N$, de la serie

$$\sum_{n_1=-\infty}^{\infty} \cdots \sum_{n_N=-\infty}^{\infty} \left| \left(\frac{\widehat{\partial^s f}}{\partial x_1^{s_1} \ldots \partial x_N^{s_N}} \right)_n \right|^2 ,$$

que se deduce, a su vez, de la desigualdad de Bessel (10.120) escrita para la función continua $\frac{\partial^s f}{\partial x_1^{s_1} \ldots \partial x_N^{s_N}}$.

El hecho de que la serie trigonométrica de Fourier (10.118) converge precisamente hacia la función $f(x)$ lo determina la completitud del sistema trigonométrico múltiple [1]. Efectivamente, si la serie (10.118) fuera uniformemente convergente hacia cierta función $g(x)$, entonces de la posibilidad de integrar término a término tal serie se deduciría que todos los coeficientes de Fourier de la función $g(x)$ coincidirían con los coeficientes correspondientes de Fourier de la función $f(x)$. Mas, la diferencia $[f(x) - g(x)]$ sería ortogonal en tal caso a todos los elementos del sistema trigonométrico múltiple y (por ser el sistema completo) sería igual a cero. El teorema está demostrado.

OBSERVACIÓN 1. El teorema 10.21 puede ser precisado. Resulta válida la siguiente *afirmación* [2]: *si una función $f(x)$ es periódica con relación a cada una de las variables (con el período de 2π) y pertenece en E^N a la clase de Hölder C^α para $\alpha > N/2$, la serie trigonométrica múltiple de Fourier de $f(x)$ converge (hacia esta función) absoluta y uniformemente en todo el espacio E^N.*

La aclaración de las condiciones de convergencia *no absoluta* de la serie trigonométrica múltiple requiere que sea atraída la técnica más fina.

Formulemos sin demostración las condiciones de sumabilidad de una serie trigonométrica múltiple de Fourier por el método esférico y el rectangular.

Teorema 10.22. *Si una función de $N \geqslant 2$ variables $f(x_1, \ldots, x_N)$ es periódica con relación a cada una de las variables (con el período de 2π) y pertenece en el espacio E^N a la clase de Hölder C^α para $\alpha \geqslant \frac{N-1}{2}$, las sumas parciales esféricas*

---

[1] La completitud del sistema trigonométrico múltiple se deduce en seguida de la completitud de los sistemas trigonométricos unidimensionales que lo integran y de cuyo producto es el mismo.

[2] Esta afirmación se obtiene de un modo más simple a partir del lema 3.1, demostrado en la obra de V. Ilyín y Sh. Alimov «Condiciones de convergencia de los desarrollos espectrales correspondientes a las extensiones autoconjugadas de los operadores elípticos, I» (Ecuaciones diferenciales, v. 7, No. 4, 1971, págs. 670—710).

de una serie trigonométrica múltiple de Fourier de la función $f(x_1, \ldots, x_N)$ converge hacia esta función uniformemente en todo el espacio E^N [1].

Teorema 10.23. *Para todo α positivo inferior a $\frac{N-1}{2}$ y cualquier punto x_0 del cubo N-dimensional Π, existe una función de $N \geqslant 2$ variables $f(x_1, x_2, \ldots, x_N)$, periódica con relación a cada una de las variables (con el período de 2π), que pertenece en E^N a la clase C^α, se anula en cierto δ-entorno del punto x_0 y que es de tal índole que las sumas parciales esféricas de la serie trigonométrica múltiple de Fourier de esta función están privados de límite en el punto x_0* [2].

Los teoremas 10.22 y 10.23 establecen condiciones *definitivas* (en las clases de Hölder C^α) de convergencia de las sumas parciales esféricas de una función periódica $f(x_1, \ldots, x_N)$. De acuerdo con estos teoremas, para $\alpha \geqslant \frac{N-1}{2}$ tiene lugar la convergencia uniforme de las sumas parciales esféricas, y cuando $\alpha < \frac{N-1}{2}$, ni siquiera es válido, para las sumas parciales esféricas, el principio de localización (por suave que sea la función f en el entorno de un punto x_0, la pertenencia de esta función a la clase $C^\alpha(E^N)$ para $\alpha < \frac{N-1}{2}$ no asegura la convergencia de las sumas parciales esféricas de esta función en el punto x_0).

Las condiciones definitivas (en las clases de Hölder C^α) de convergencia de las sumas parciales rectangulares de una serie trigonométrica múltiple de Fourier están establecidas en las obra de L. V. Zhizhiashvili [3].

Teorema 10.24. *Si una función de N variables $f(x_1, \ldots, x_N)$ es periódica con relación a cada una de las variables (con el período de 2π) y pertenece en E^N a la clase C^α para cualquier $\alpha > 0$, las sumas parciales rectangulares de la serie trigonométrica múltiple de Fourier de la función $f(x_1, \ldots, x_N)$ converge (hacia esta función) uniformemente en E^N.*

OBSERVACIÓN. Observemos que aún en el año 1928 L. Tonelli [4]) estableció que una sola continuidad de una función de $N \geqslant 2$ variables $f(x_1, \ldots, x_N)$ no aseguraba no sólo la convergencia uniforme, sino tampoco el principio de localización de las sumas parciales rectangulares de su serie trigonométrica múltiple de Fourier (existe una función, periódica con relación a cada una de las variables (con el período de 2π) y continua en E^N que se anula en cierto δ-entorno del punto dado x_0 y es tal que las sumas parciales rectangulares de esta función divergen en x_0).

4. Sobre el desarrollo de una función en integral N-múltiple de Fourier. Supongamos que una función de $N \geqslant 2$ variables $f(x_1, \ldots, x_N) = f(x)$ admite la existencia de una integral im-

---

[1]) Este teorema se deduce de las afirmaciones más generales demostradas en la obra de V. Ilyin «Problemas de localización y convergencia de las series de Fourier respecto de los sistemas fundamentales de funciones del operador de Laplace» (Éxitos de la ciencia matemática, v. 23, 2, 1968, págs. 61—120) y en la obra de V. Ilyín y Sh. Alimov mencionada más arriba.

[2]) Este teorema es un caso particular de una afirmación más general demostrada en el cap. 3 de la obra de V. Ilyín mencionada más arriba.

[3]) L. V. Zhizhiashivili «Sobre las funciones conjugadas y series trigonométricas». Tesis de doctorado. Moscú, Universidad de Moscú Lomonósov, 1967.

[4]) L. Tonelli (1885—1946), matemático italiano.

propia

$$\int_{E^N} \cdots \int f(x_1, \ldots, x_N)\, dx_1 \ldots, dx_N. \qquad (10.125)$$

Llamemos *imagen* (o *transformada*) *de Fourier* de tal función a una magnitud

$$\hat{f}(y_1, \ldots, y_N) = \hat{f}(y) = \int_{E^N} \cdots \int e^{i(xy)} f(x_1, \ldots, x_N)\, dx_1 \ldots dx_N.$$

Por suma analogía con el lema 4 se demuestra que $\hat{f}(y)$ es una función continua de y en cada punto de E^N y tiende a cero cuando $|y| = \sqrt{y_1^2 + \ldots + y_N^2} \to \infty$.

Un límite

$$\lim_{\lambda \to \infty} \int_{|y| \leqslant \lambda} \cdots \int \hat{f}(y_1, \ldots, y_N)\, e^{-i(x, y)}\, dy_1 \ldots dy_N \qquad (10.126)$$

(si existe) se denomina *desarrollo de la función $f(x)$ en integral N-múltiple de Fourier.*

Son válidas las siguientes dos afirmaciones [1]).

1°. Si una función de $N \geqslant 2$ variables $f(x_1, \ldots, x_N)$ se anula fuera de cierto dominio acotado y pertenece en todo el espacio E^N a la clase de Hölder C^α para $\alpha \geqslant \frac{N-1}{2}$, el desarrollo de esta función en la integral N-múltiple de Fourier (10.126) converge (hacia esta función) uniformemente en todo el espacio E^N.

2°. Para todo α positivo inferior a $\frac{N-1}{2}$ y cualquier punto x_0, existe una función de $N \geqslant 2$ variables $f(x_1, \ldots, x_N)$, distinta de cero sólo en un dominio acotado y perteneciente en E^N a la clase C^α, que se anula en cierto δ-entorno del punto x_0 y es de tal índole que para esta función el límite (10.126) en el punto x_0 no existe.

Las afirmaciones 1° y 2° establecen las condiciones definitivas (en las clases de Hölder C^α) de convergencia del desarrollo en integral N-múltiple de Fourier de cualquier función igual a cero fuera de cierto dominio acotado del espacio E^N. De acuerdo con estas afirmaciones, para $\alpha \geqslant \frac{N-1}{2}$ tiene lugar convergencia uniforme (en cualquier dominio acotado) del desarrollo en integral N-múltiple de Fourier, y cuando $\alpha < \frac{N-1}{2}$, ni siquiera es válido, para el desarrollo en integral N-múltiple de Fourier, el principio de localización (por suave que sea la función f en el entorno del punto x_0, la pertenencia de esta función en todo el espacio E^N a la clase C^α para $\alpha < \frac{N-1}{2}$ no asegura la convergencia en el punto x_0 del desarrollo de esta función en integral N-múltiple de Fourier).

[1]) Ambas afirmaciones se deducen de las afirmaciones más generales demostradas en la obra de Sh. Alimov y V. A. Ilyín «Condiciones de convergencia de los desarrollos espectrales correspondientes a las extensiones autoconjugadas de los operadores elípticos, II». (Ecuaciones diferenciales, v. 7, No 5, 1971, págs. 851—882).

Capítulo 11

ESPACIO DE HILBERT

En este capítulo se estudia una clase importante de espacios euclídeos de dimensión infinita: los así llamados *espacios de Hilbert*.

Establecemos una representación especial, importante para las aplicaciones, de toda función lineal de los elementos de tal espacio (una función de esta índole suele llamarse *funcional lineal*), establecemos también que en cada conjunto infinito de elementos, acotado en norma, de un espacio de Hilbert puede elegirse una subsucesión convergente en cierto sentido débil (esta propiedad se denomina *compacticidad débil* de la bola en un espacio de Hilbert).

Una atención particular se dedica al estudio de los sistemas ortonormalizados de elementos de Hilbert. Establecemos la equivalencia para tales sistemas de las nociones del carácter cerrado y completitud, introducidas en el § 2, cap. 10, y demostramos el famoso teorema de Riesz—Ficher, de acuerdo con el cual, cualquier sucesión de números, una serie de cuyos cuadrados es convergente, representa una sucesión de los coeficientes de Fourier de cierto elemento de un espacio de Hilbert en un desarrollo con relación a un sistema, prefijado de antemano, ortonormalizado de elementos de dicho espacio. En el último párrafo se demuestra la existencia de los valores propios y de los así llamados *operadores ininterrumpidos totalmente autoconjugados* que actúan en un espacio de Hilbert.

§ 1. Espacio l^2

1. Concepto del espacio l^2. Examinemos un conjunto cuyos elementos están constituidos por toda clase de sucesiones de números reales $(x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots)$ tales que una serie compuesta de los cuadrados de estos números

$$\sum_{k=1}^{\infty} x_k^2 \tag{11.1}$$

es convergente. Los elementos de tal conjunto se denotarán (como vectores) con letras latinas semigruesas: $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots)$, $\mathbf{y} = (y_1, y_2, \ldots, y_n, \ldots)$, etc. Los números $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$ se llamarán coordenadas del elemento $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots)$.

Definamos las operaciones de sumación y multiplicación de los elementos por los números reales. Se llama *suma* de dos elementos $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots)$ e $\mathbf{y} = (y_1, y_2, \ldots, y_n, \ldots)$ un ele-

mento $z = (x_1 + y_1,\ x_2 + y_2,\ \ldots,\ x_n + y_n,\ \ldots)$ [1]). Este elemento lo denotemos con el símbolo $z = x + y$. Se llama *producto de un elemento* $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots)$ *por un número real* λ al elemento designado por el símbolo λx o $x\lambda$ e igual a $(\lambda x_1, \lambda x_2, \ldots, \lambda x_n, \ldots)$. Es fácil comprobar que el conjunto definido es un *espacio lineal*, es decir, comprobar el cumplimiento de todos los axiomas referentes a la sumación y multiplicación de los elementos por los números reales [2]).

Introduzcamos ahora en el conjunto citado un producto escalar de dos elementos cualesquiera $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots)$ e $y = (y_1, y_2, \ldots, y_n, \ldots)$, al definirlo como suma de una serie [3])

$$\sum_{k=1}^{\infty} x_k y_k.$$

Suponemos, pues, $(x, y) = \sum_{k=1}^{\infty} x_k y_k$. Es fácil comprobar el cumplimiento de todos los cuatro axiomas de un producto escalar. (Estos axiomas se tratan en § 1, cap. 10, y la comprobación de su validez para el espacio en consideración queda al cargo del lector).

De este modo, el conjunto introducido es *un espacio euclídeo*. Adheriéndonos a la tradición establecida, denotemos este conjunto con el símbolo l^2.

Al igual que en todo espacio euclídeo, introduzcamos en l^2 la norma de cada elemento $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots)$, poniéndola igual a

$$\| x \| = \sqrt{(x, x)} = \sqrt{\sum_{k=1}^{\infty} x_k^2}. \tag{11.2}$$

Por cuanto la serie (11.1) es convergente, tal definición tiene sentido).

---

[1]) La convergencia de la serie $\sum_{k=1}^{\infty} (x_k + y_k)^2$ se deduce en seguida de la desigualdad $(x_k + y_k)^2 \leqslant 2x_k^2 + 2y_k^2$ y de la convergencia de las series $\sum_{k=1}^{\infty} x_k^2$ y $\sum_{k=1}^{\infty} y_k^2$.

[2]) La formulación de los axiomas de un espacio lineal puede encontrarse en cualquier curso del álgebra lineal.

[3]) La convergencia de la serie citada se deduce de la desigualdad $| x_k y_k | \leqslant \frac{1}{2} (x_k^2 + y_k^2)$ y de la convergencia de las series $\sum_{k=1}^{\infty} x_k^2$ y $\sum_{k=1}^{\infty} y_k^2$.

Como siempre, llamemos dos elementos de l^2 ortonormalizados, si su producto escalar es igual a cero.

Recordemos que se llama *sistema ortonormalizado* en un espacio euclídeo arbitrario a una sucesión de elementos $\{e_k\}$ de dicho espacio que satisface dos exigencias: 1) cualesquiera dos elementos de esta sucesión son ortogonales; 2) la norma de cada elemento es igual a la unidad.

Demostremos que en el espacio l^2 existe un sistema ortonormalizado *cerrado* (y, por consiguiente, de acuerdo con el teorema 10.7, también *completo*) [1]. Cerciorémonos de que tal sistema es una sucesión de elementos

$$\left.\begin{array}{l} e_1=(1,\,0,\,0,\,\ldots,\,0,\,\ldots),\\ e_2=(0,\,1,\,0,\,\ldots,\,0,\,\ldots),\\ e_3=(0,\,0,\,1,\,\ldots,\,0,\,\ldots),\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}\right\} \qquad (11.3)$$

El hecho de que este sistema es ortonormalizado es obvio (la norma (11.2) para cada elemento e_k es igual a la unidad, y el producto escalar de cualesquiera dos elementos representa una suma infinita de productos, cada uno de los cuales es igual a cero). Para demostrar el carácter cerrado del sistema ortonormalizado (11.3) basta demostrar que para todo elemento $x=(x_1,\,x_2,\,\ldots,\,x_n,\,\ldots)$ del espacio l^2 la serie de Fourier de este elemento según el sistema (11.3) converge hacia dicho elemento en norma del espacio l^2 [2].

Por cuanto los coeficientes de Fourier $(x,\,e_k)$ del elemento x coinciden con las coordenadas x_k de este elemento, la n-ésima suma parcial de la serie de Fourier del elemento x es igual a $\sum\limits_{k=1}^{n} x_k e_k$, y nos queda probar que

$$\lim_{n\to\infty}\left\|\sum_{k=1}^{n} x_k e_k - x\right\| = 0. \qquad (11.4)$$

Pero, de la definición de la norma (11.2), de lo que el sistema $\{e_k\}$ es ortonormalizado y de las propiedades de un producto escalar se

[1]) Véase en § 2, cap. 10 definición de la completitud y del carácter cerrado de un sistema ortonormalizado.

[2]) Puesto que en tal caso todo elemento x del espacio l^2 puede aproximarse con cualquier grado de exactitud en norma de l^2 mediante las sumas parciales de la serie citada de Fourier.

deduce que

$$\left\| \sum_{k=1}^{n} x_k e_k - x \right\|^2 = \left(\sum_{k=1}^{n} x_k e_k - x, \sum_{k=1}^{n} x_k e_k - x \right) =$$
$$= \sum_{k=1}^{n} x_k^2 - 2 \sum_{k=1}^{n} x_k (e_k, x) + \| x \|^2 = \| x \|^2 - \sum_{k=1}^{n} x_k^2 =$$
$$= \sum_{k=1}^{\infty} x_k^2 - \sum_{k=1}^{n} x_k^2 = \sum_{k=n+1}^{\infty} x_k^2,$$

de suerte que la relación (11.4) se deduce de la convergencia de la serie (11.1).

2. Forma general de la funcional lineal en l^2. Examinaremos las funciones, de cuyos argumentos sirven los elementos de l^2, y de valores, unos números reales. Las funciones de este género suelen llamarse *funcionales* (definidas en el espacio l^2).

Hablando con mayor precisión, nuestro objetivo es el estudio detallado de una funcional más simple definida en el espacio l^2, a saber, de la así llamada funcional *lineal*.

Definición 1. *Una funcional $l(x)$ definida en el espacio l^2 se denomina lineal, si para cualesquiera elementos x e y del espacio l^2 y todos los números reales α y β se verifica una igualdad*

$$l(\alpha x + \beta y) = \alpha l(x) + \beta l(y).$$

Sea x_0 un elemento arbitrario del espacio l^2. Con el fin de geometrizar la terminología, este elemento x_0 se llamará a menudo *punto* del espacio l^2.

Definición 2. *Una diferencial arbitraria $l(x)$, definida en el espacio l^2, se llama continua en un punto x_0 del espacio l^2, si para toda sucesión de elementos $\{x_n\}$ del espacio l^2, convergente en norma del espacio l^2 hacia el elemento x_0, la sucesión numérica $l(x_n)$ converge hacia $l(x_0)$.*

Definición 3. *Una funcional $l(x)$ se llama continua, si lo es en todo punto x del espacio l^2.*

Notemos ahora mismo que *en el caso de una funcional lineal $l(x)$ la continuidad por lo menos en un solo punto x_0 predetermina la continuidad en cada punto x del espacio l^2.* Efectivamente, supongamos que una funcional lineal es continua en el punto x_0, y que x es un punto arbitrario del espacio l^2. Denotemos con $\{x_n\}$ una sucesión arbitraria de elementos de l^2 que converge en norma de l^2 hacia x. Entonces, la sucesión $\{x_0 + x_n - x\}$ converge en norma de l^2 hacia x_0, y de la continuidad de la funcional en el punto x_0 proviene que

$$l(x_0 + x_n - x) \to l(x_0) \quad \text{para} \quad n \to \infty. \tag{11.5}$$

Pero, de lo que la funcional es lineal se deduce que $l(x_0 + x_n - x) = l(x_0) + l(x_n) - l(x)$. A partir de la última igualdad y de

(11.5) obtenemos: $l(x_n) \to l(x)$, cuando $n \to \infty$, lo que significa precisamente la continuidad de la funcional en el punto x.

Definición 4. *Una funcional $l(x)$ se llama acotada, si existe una constante C tal que para todos los elementos x del espacio l^2 se cumple una desigualdad*

$$|l(x)| \leqslant C \|x\|. \tag{11.6}$$

Teorema 11.1. *Para que una funcional lineal $l(x)$ sea continua, es necesario y suficiente que sea acotada.*

DEMOSTRACIÓN. 1. NECESIDAD. Supongamos que la funcional lineal $l(x)$ es continua. Supongamos, además, que no existe una constante C que asegure el cumplimiento de la desigualdad (11.6). Entonces, se encontrará una sucesión de elementos no nulos x_n [1]) tal que $|l(x_n)| \geqslant n^2 \|x_n\|$. Pongamos $y_n = \frac{1}{n\|x_n\|} x_n$. Por cuanto $\|y_n - 0\| = \|y_n\| = \frac{1}{n} \to 0$ cuando $n \to \infty$, resulta que, en virtud de que la funcional es continua, $l(y_n) \to l(\mathbf{0}) = 0$, cuando $n \to \infty$, lo que contradice la desigualdad $l(y_n) = \frac{1}{n\|x_n\|} \times$ $\times\, l(x_n) \geqslant n$. La necesidad está demostrada.

2. SUFICIENCIA. Supongamos que la funcional lineal $l(x)$ es acotada, es decir, existe una constante C tal que para todo elemento x se verifique la desigualdad (11.6). Ahora, sea x_0 un punto arbitrario de l^2, y sea $\{x_n\}$ una sucesión arbitraria de elementos de l^2 que converge en norma de l^2 hacia x_0. Entonces, por ser la funcional lineal, $l(x_n) - l(x_0) = l(x_n - x_0)$, de suerte que, en virtud de la desigualdad (11.6), $|l(x_n) - l(x_0)| = |l(x_n - x_0)| \leqslant C \|x_n -$ $- x_0\|$. De la última desigualdad proviene que $l(x_n) \to l(x_0)$ cuando $n \to \infty$. La suficiencia está demostrada.

El teorema demostrado permite introducir la norma de una funcional lineal continua.

Definición 5. *Se llama norma de una funcional lineal continua $l(x)$ la cota superior exacta de la relación $\frac{|l(x)|}{\|x\|}$ sobre el conjunto de todos los elementos x del espacio l^2.*

La norma de una funcional lineal continua $l(x)$ se denotará con el símbolo $\|l\|$.

Así pues, por definición,

$$\|l\| = \sup_{x \in l^2} \frac{|l(x)|}{\|x\|}. \tag{11.7}$$

Es válido el siguiente teorema fundamental.

Teorema 11.2 (teorema de Riesz). *Para toda funcional lineal continua $l(x)$ existe un (y sólo uno) elemento $\mathbf{a}$ del espacio l^2 de tal*

---

[1]) Para un elemento nulo $\mathbf{0}$ la desigualdad (11.6) se cumple con cualquier constante C, pues, por ser lineal la funcional, $l(\mathbf{0}) = l(0x) = 0 \cdot l(x) = 0$.

índole que para todos los elementos x del espacio l^2 se verifica una igualdad

$$l(x) = (a, x), \tag{11.8}$$

con la particularidad de que $\| l \| = \| a \|$.

DEMOSTRACION. Sea $\{e_k\}$ un sistema ortonormalizado cerrado (11.3), y $a_k = l(e_k)$ $(k = 1, 2, \ldots)$. Cerciorémonos de que una sucesión de números reales $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ representa un elemento del espacio l^2, es decir, de lo que la serie $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k^2$ es convergente.

Para cualquier número n pongamos $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} a_k e_k$.

Entonces, en virtud de que la funcional es lineal, tenemos

$$l(S_n) = \sum_{k=1}^{n} a_k l(e_k) = \sum_{k=1}^{n} a_k^2 = \| S_n \|^2. \tag{11.9}$$

Por otro lado, del teorema 11.1 y de la definición de norma de la funcional lineal continua (11.7) se deduce que

$$| l(S_n) | \leqslant \| l \| \cdot \| S_n \|. \tag{11.10}$$

De (11.9) y (11.10) obtenemos que $\| S_n \| \leqslant \| l \|$, o, que es lo mismo,

$$\sum_{k=1}^{n} a_k^2 \leqslant \| l \|^2. \tag{11.11}$$

La última desigualdad, válida para cualquier número n, demuestra la convergencia de la serie $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k^2$, es decir, demuestra que la sucesión $(a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots)$ representa cierto elemento de l^2, el cual se denotará con a.

Sea, ahora, $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots)$ un elemento arbitrario de l^2. Entonces, por ser cerrado el sistema ortonormalizado (11.3), la suma parcial de la serie de Fourier $\sum\limits_{k=1}^{n} x_k e_k$ converge en norma de l^2 hacia x, cuando $n \to \infty$. En virtud de que la funcional es continua, de aquí se deduce que

$$l\left(\sum_{k=1}^{n} x_k e_k\right) \to l(x) \text{ para } n \to \infty.$$

Pero, de lo que la funcional es lineal y de la igualdad $a_k = l(e_k)$ proviene que

$$l\left(\sum_{k=1}^{n} x_k e_k\right) = \sum_{k=1}^{n} x_k l(e_k) = \sum_{k=1}^{n} x_k a_k.$$

Por consiguiente, hemos demostrado que

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} x_k a_k = l(x),$$

y esto significa precisamente que se ha establecido la igualdad (11.8) con el elemento *unívocamente* definido $\boldsymbol{a}$, cuyas coordenadas son iguales a $l(\boldsymbol{e}_k)$.

Resta por cerciorarse de que $\| l \| = \| \boldsymbol{a} \|$. De la desigualdad (11.11), válida para cualquier número n, proviene en seguida que

$$\| \boldsymbol{a} \| \leqslant \| l \|. \tag{11.12}$$

Por otro lado, de la igualdad (11.8), ya demostrada, obtenemos, con ayuda de la desigualdad de Cauchy—Buniakovski [1]) $| (\boldsymbol{a}, x) | \leqslant \leqslant \| \boldsymbol{a} \| \cdot \| x \|$, que $| l(x) | \leqslant \| \boldsymbol{a} \| \cdot \| x \|$, de donde proviene, en virtud de la definición de la norma (11.7), que

$$\| l \| \leqslant \| \boldsymbol{a} \|. \tag{11.13}$$

De (11.12) y (11.13) concluimos que $\| l \| = \| \boldsymbol{a} \|$. El teorema está completamente demostrado.

El teorema demostrado establece la forma general de cualquier funcional lineal continua en el espacio l^2.

3. Sobre la compacticidad débil de un conjunto acotado en la norma de l^2.

***Definición* 1.** *Un conjunto E de elementos de l^2 se denomina acotado (o acotado en norma), si existe una constante M tal que $\| x \| \leqslant M$ para todos los elementos x del conjunto E.*

***Definición* 2.** *Un conjunto infinito E de elementos de l^2 se llama compacto, si en cualquier sucesión de elementos $\{x_n\}$, perteneciente al conjunto E, puede elegirse una subsucesión $\{x_{n_k}\}$ que sea convergente en norma de l^2.*

Es obvio que *todo conjunto compacto E de elementos de l^2 es acotado* [2]).

En un espacio euclídeo de un número *finito* de dimensiones es cierta también la afirmación inversa: *todo conjunto acotado E que contiene un número infinito de elementos es compacto* (teorema de Bolzano—Weierstrass). Pero, en un espacio de dimensión *infinita*, como es l^2, de lo que un conjunto infinito de elementos de E está acotado ya no proviene la compacticidad de dicho conjunto.

Por ejemplo, un conjunto $\{\boldsymbol{e}_k\}$ de todos los elementos del sistema

---

[1]) Según el teorema 10.1, la desigualdad de Cauchy — Buniakovski es válida para cualesquiera dos elementos de todo espacio euclídeo.

[2]) En efecto, de lo que el conjunto E está acotado se deduciera la existencia de una sucesión de elementos, pertenecientes a E, para los cuales la sucesión de tal sucesión diverge en la norma de l^2, lo que contradice la condición de compacticidad del conjunto E.

ortonormalizado (11.3) es acotado (pues, las normas de todos los elementos son iguales a la unidad), pero no es compacto (pues, para que la sucesión de elementos converja en norma de l^2, es necesario que la norma de la diferencia de dos elementos con los números k y $k+1$ tienda hacia cero cuando $k \to \infty$, y para cualquier subsucesión, formada de los elementos de (11.3), se verifique la igualdad $\| e_k - e_l \|^2 = \| e_k \|^2 + \| e_l \|^2 = 2$, cualesquiera que sean k y l desiguales).

Es natural tratar de introducir el concepto de compacticidad de un conjunto en el sentido más débil (que en la definición 2), con tal de que todo conjunto acotado (que contiene un número infinito de elementos) sea compacto en el sentido débil.

***Definición* 3.** *Una sucesión $\{x_n\}$ de elementos del espacio l^2 se denomina débilmente convergente hacia un elemento x_0 de este espacio, si para cualquier elemento a del espacio l^2 resulta válida la relación*

$$(x_n, a) \to (x_0, a) \quad \text{para} \quad n \to \infty.$$

Notemos que de la convergencia de $\{x_n\}$ hacia x_0 en la norma de l^2 y de la desigualdad de Cauchy—Buniakovski se deduce convergencia débil de $\{x_n\}$ hacia x_0, puesto que $|(x_n, a) - (x_0, a)| = |(x_n - x_0, a)| \leqslant \sqrt{\| x_n - x_0 \| \cdot \| a \|}$ para todo elemento a. La débil convergencia de $\{x_n\}$ hacia x_0 no lleva consigo, en el caso general, la convergencia de $\{x_n\}$ hacia x_0 en norma de l^2. Por ejemplo, la sucesión $\{e_k\}$ de todos los elementos del sistema ortonormalizado (11.3) converge débilmente hacia un elemento nulo $\mathbf{0}$, pues para todo elemento a del espacio l^2 se cumple la desigualdad de Bessel [1])

$$\sum_{k=1}^{\infty} (e_k, a)^2 \leqslant \| a \|^2, \quad \text{de acuerdo con la cual}$$

$e_n, a) \to (0, a) = 0$, cuando $n \to \infty$. Además, se ha demostrado anteriormente que la sucesión $\{e_k\}$ no converge en la norma de l^2.

La convergencia en la norma de l^2 (en diferencia de la convergencia débil) se llama a menudo *convergencia fuerte.*

***Definición* 4.** *Un conjunto infinito E de elementos de l^2 se llama débilmente compacto, si en cualquier sucesión de elementos $\{x_n\}$, perteneciente al conjunto E, puede elegirse una subsucesión débilmente convergente.*

Es válido el siguiente teorema fundamental.

***Teorema* 11.3.** *Todo conjunto acotado en l^2, compuesto de un número infinito de elementos, es débilmente compacto.*

---

[1]) De acuerdo con el teorema 10.4, la desigualdad de Bessel es válida para cada elemento y cualquier sistema ortonormalizado en un espacio euclídeo arbitrario.

DEMOSTRACION. Sea E un subconjunto acotado arbitrario de l^2 que contiene un número infinito de elementos, y sea $\{x_n\}$ una sucesión arbitraria de elementos de E. El carácter acotado del conjunto E permite afirmar que $\| x_n \| \leqslant M$, donde M es una constante. Pero, en tal caso, de la relación $\| x_n \|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} x_{nk}^2$ se desprende que la sucesión numérica de las k-ésimas coordenadas x_{nk} de los elementos x_n es acotada para cualquier número k. Por consiguiente, en virtud del teorema de Bolzano—Weierstrass (véase teorema 3.3, v. I), en la sucesión $\{x_n\}$ puede elegirse tal subsucesión de elementos $\{x_n^{(1)}\}$ que las primeras coordenadas de estos elementos formen una sucesión numérica convergente; después, a partir de $\{x_n^{(1)}\}$ puede elegirse una subsucesión de elementos $\{x_n^{(2)}\}$ tal que tanto las primeras, como las segundas coordenadas de estos elementos formen las sucesiones numéricas convergentes, etc. Realizados k pasos, elegimos una subsucesión de elementos $\{x_n^{(k)}\}$, en la cual cada una de las primeras coordenadas forma una sucesión numérica convergente.

Pongamos $y_n = x_n^{(n)}$. Es evidente que $\{y_n\}$ es una subsucesión de la sucesión original de elementos $\{x_n\}$ y que una sucesión formada por *cualquier* coordenada de los elementos y_n es sucesión numérica convergente, es decir, si $y_n = (y_{n1}, y_{n2}, \ldots, y_{nk}, \ldots)$, para todo k, la sucesión y_{nk} converge cuando $n \to \infty$. Denotemos con ξ_k el límite de la sucesión de las k-ésimas coordenadas de los elementos y_n, es decir, pongamos $\xi_k = \lim\limits_{n\to\infty} y_{nk}$ $(k = 1, 2, \ldots)$ y cerciorémonos de que la sucesión $(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_k, \ldots)$ es un elemento del espacio l^2, es decir, de que la serie $\sum_{k=1}^{\infty} \xi_k^2$ es convergente. Por cuanto $\| y_n \| \leqslant M$ para todos los números n, tenemos para todo n

$$\sum_{k=1}^{N} y_{nk}^2 \leqslant M^2 \tag{11.14}$$

y, con mayor razón,

$$\sum_{k=1}^{N} y_{nk}^2 \leqslant M^2 \tag{11.15}$$

(para *cualquier* número fijo N y para todos los números n).

Pasando en (11.15) al límite para $n \to \infty$, obtendremos que $\sum_{k=1}^{N} \xi_k^2 \leqslant M^2$ con cualquier número N, y esto es indicio de que la sucesión $(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_k, \ldots)$ representa cierto elemento de l^2, que se designará por ξ.

Resta demostrar que la sucesión $\{y_n\}$ es débilmente convergente hacia este elemento ξ, es decir, probar que para todo elemento

$a = (a_1, a_2, \ldots, a_k, \ldots)$ del espacio l^2 es válida la relación $\lim\limits_{n\to\infty} (y_n, a) = (\xi, a)$, o bien, que es igual, la relación

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{\infty} y_{nk}a_k = \sum_{k=1}^{\infty} \xi_k a_k.$$

En vista de que $\lim\limits_{n\to\infty} y_{nk} = \xi_k$, y, en virtud del teorema sobre el paso al límite término a término (véase teorema 1.6), basta mostrar que la serie

$$\sum_{k=1}^{\infty} y_{nk}\cdot a_k \tag{11.16}$$

converge uniformemente respecto de todos los números n. Fijamos arbitrariamente $\varepsilon > 0$. De la convergencia de la serie $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k^2$ se deduce la existencia de tal número m_0 que

$$\sum_{k=m+1}^{m+p} a_k^2 < \frac{\varepsilon^2}{M^2} \tag{11.17}$$

para todos los $m \geqslant m_0$ y para cada p natural ($p = 1, 2, \ldots$).

Aplicando al resto de la serie (11.16) la desigualdad de Cauchy—Buniakovski para las sumas [1])

$$\left|\sum_{k=m+1}^{m+p} y_{nk}a_k\right| \leqslant \left[\sum_{k=m+1}^{m+p} y_{nk}^2 \sum_{k=m+1}^{m+p} a_k^2\right]^{1/2}$$

y aprovechando las desigualdades (11.14) y (11.17), llegamos a que

$$\left|\sum_{k=m+1}^{m+p} y_{nk}a_k\right| < \varepsilon$$

para cualesquiera $m \geqslant m_0$, p naturales y, simultáneamente, para todos los números n. Mas, esto significa precisamente que la serie (11.16) converge uniformemente respecto de todos los números n. El teorema está demostrado.

El teorema demostrado es de muy amplio uso. En particular, se emplea frecuentemente en la teoría de los métodos de variación en la resolución de los problemas de la física matemática.

§ 2. Espacio L^2

1. Propiedades más simples del espacio L^2. El espacio L^2 ya lo conocimos en el p. 7, § 4, cap. 8, dedicado al estudio de las clases L^p para $p \geqslant 1$.

[1]) Esta desigualdad se ha establecido en el Complemento 1 al capítulo 1, v. II.

Recordemos que se denomina espacio $L^2(E)$ a un conjunto de todas las funciones $\{f(x)\}$ de tal género que cada función $f(x)$ es medible sobre el conjunto E, y cada función $f^2(x)$, sumable (es decir, integrable en el sentido de Lebesgue) sobre el conjunto E, con la particularidad de que no distinguimos funciones equivalentes sobre E, considerándolas como un solo elemento de $L^2(E)$.

$L^2(E)$ se llama brevemente *espacio de funciones con un cuadrado sumable* (sobre el conjunto E).

Notemos ahora mismo que todas las integrales en este párrafo se entienden en el sentido de Lebesgue, y por el conjunto E se entiende un conjunto medible de medida finita positiva en la recta infinita, aunque toda la teoría que se expone se extiende sin complicaciones algunas al caso de un conjunto arbitrario de medida positiva E en un espacio de cualquier número n de mediciones.

En el p. 7, § 4, cap. 8 se ha establecido que el espacio $L^2(E)$ es espacio normado lineal con la norma de cualquier elemento $f(x)$ de la forma

$$\|f\| = \left(\int_E f^2(x)\,dx\right)^{1/2} \tag{11.18}$$

El espacio $L^2(E)$ se diferencia esencialmente de todos los demás espacios $L^p(E)$ para $p \neq 2$ en lo que $L^2(E)$ es un espacio euclídeo dotado de producto escalar de cualesquiera dos elementos $f(x)$ y $g(x)$ de la forma [1])

$$(f, g) = \int_E f(x)\,g(x)\,dx. \tag{11.19}$$

La validez en $L^2(E)$ de todos los cuatro axiomas del producto escalar[2]) proviene con facilidad de la independencia del producto $f(g)\,g(x)$ del orden de los factores, de las propiedades lineales de la integral y de la condición de equivalencia a cero de una función $f^2(x)$ medible, sumable y no negativa.

Indiquemos, además, que de (11.18) y (11.19) se deduce que (al igual que en todo espacio euclídeo) la norma y el producto escalar en L^2 están ligados entre sí mediante una relación

$$\|f\| = \sqrt{(f, f)}.$$

Por fin, recordemos que en el p. 7. § 4, cap. 8 se ha demostrado que el espacio $L^2(E)$ es completo. [3])

[1]) La definición de espacio euclídeo y de producto escalar se da en el § 1, cap. 10.

[2]) Véanse en el § 1, cap. 10 los axiomas de un producto escalar.

[3]) Recordemos que un espacio normalizado lineal se llama *completo*, si para cualquier sucesión fundamental $\{f_n\}$ de elementos de este espacio (es decir, para la sucesión $\{f_n\}$, para la cual $\lim\limits_{n\to\infty} \sup\limits_{m\geqslant n} \|f_m - f_n\| = 0$) existe un elemento f del espacio R, hacia el cual converge en R esta sucesión.

Pasemos, ahora, al esclarecimiento de las propiedades más profundas del espacio $L^2(E)$.

2. Separabilidad del espacio L^2. Veamos al principio un espacio normalizado lineal arbitrario R.

Definición 1. *Un conjunto M de elementos de un espacio normalizado lineal R se denomina siempre denso (o denso en R), si para todo elemento f del espacio R podemos separar una sucesión de elementos $\{f_n\}$ de M que converja en la norma de R hacia f.*

Definición 2. *Un espacio normalizado lineal R se llama separable, si en el mismo existe un conjunto numerable de elementos M siempre denso.*

El objetivo de este punto consiste en demostrar la separabilidad del espacio L^2.

Teorema 11.4. *Un conjunto de funciones continuas sobre E es siempre denso en $L^2(E)$.*

DEMOSTRACIÓN. Sea $f(x)$ una función arbitraria de $L^2(E)$. Sin limitar la generalidad de los razonamientos, podemos considerar que $f(x) \geqslant 0$. En efecto, al introducir dos funciones no negativas

$$f^+(x) = \frac{1}{2}(|f(x)| + f(x)), \quad f^-(x) = \frac{1}{2}(|f(x)| - f(x)),$$

es fácil convencerse de la validez del teorema para toda función $f \in L_2$ a condición de que para las funciones no negativas el mismo está demostrado.

Además, podemos suponer que $f(x)$ toma siempre los valores finitos. Así pues, sea $f(x) \in L_2(E)$ y $0 \leqslant f(x) < \infty$.

Para cada número n, veamos una sucesión de conjuntos [1]) disjuntos

$$E_n^k = E\left[\frac{k}{2^n} \leqslant f(x) < \frac{k+1}{2^n}\right] \quad (k = 0, 1, 2, \ldots).$$

Entonces, evidentemente, para todo número n ($n = 1, 2, \ldots$) la suma de los conjuntos mencionados respecto de todos los $k = 0, 1, \ldots$ da el conjunto E, es decir, $E = \bigcup_{k=0}^{\infty} E_n^k$.

Construyamos una sucesión $\{f_n(x)\}$ de funciones, definidas sobre el conjunto E, al poner para cada número n que $f_n(x) = k/2^n$, cualquiera que sea x perteneciente a E_n^k. De este modo, cada función $f_n(x)$ es función «escalonada» sobre el conjunto E (que toma a lo sumo un número numerable de valores).

Ahora, es también obvio que para todos los números n y todos los puntos x del conjunto E queda válida una desigualdad

$$0 \leqslant f(x) - f_n(x) < 1/2^n,$$

---

[1]) Recordemos que el símbolo E [f satisface la condición A] denota un conjunto de todos los puntos de E, para los cuales la función $f(x)$ satisface la condición A.

de la cual proviene que la sucesión $\{f_n(x)\}$ converge hacia $f(x)$ uniformemente sobre el conjunto E. Pongamos $\Psi_n(x) = \min\{n, f_n(x)\}$.

Toda función $\Psi_n(x)$ toma sobre el conjunto E sólo un número *finito* de valores, con la particularidad de que la sucesión $\{\Psi_n(x)\}$ converge hacia $f(x)$ *en todo punto* de E. Además, por cuanto en cada punto de E se cumple la desigualdad $0 \leqslant f(x) - \Psi_n(x) \leqslant f(x)$, de la cual proviene que $[f(x) - \Psi_n(x)]^2 \leqslant f^2(x)$ en todo punto de E, entonces, en virtud del corolario del teorema 8.19, la sucesión $[f(x) - \Psi_n(x)]^2$ converge hacia cero en $L^1(E)$, es decir, la sucesión $\Psi_n(x)$ converge hacia $f(x)$ en $L^2(E)$.

Queda por demostrar que toda función $\Psi_n(x)$ puede aproximarse en la norma de $L^2(E)$ mediante una función continua con cualquier grado de exactitud. Recordemos que cada función $\Psi_n(x)$ toma sólo un número finito de valores, es decir, tiene por expresión $\Psi_n(x) = \sum_{k=1}^{m} a_k\omega_k(x)$, donde a_k $(k = 1, 2, \ldots, m)$ son unos números constantes, y $\omega_k(x)$, las así llamadas funciones *características* del conjunto E_k:

$$\omega_k(x) = \begin{cases} 1 \text{ sobre el conjunto } E_k, \\ 0 \text{ fuera del conjunto } E_k. \end{cases}$$

De este modo, para finalizar la demostración del teorema es suficiente construir una sucesión de funciones continuas que converja en $L^2(E)$ hacia la función $\omega(x)$ de la forma

$$\omega(x) = \begin{cases} 1 \text{ sobre el conjunto } E_0, \\ 0 \text{ fuera del conjunto } E_0, \end{cases}$$

donde E_0 es un conjunto medible contenido en E.

Para el conjunto E_0 y para todo número n existen un conjunto abierto G_n que contiene E_0, y un conjunto cerrado F_n contenido en E_0 de tal género que la medida de la diferencia $G_n - F_n$ sea inferior a $1/n$ [1]).

Denotemos con el símbolo $\widetilde{F}_n$ un complemento del conjunto G_n y pongamos

$$\varphi_n(x) = \frac{\rho(x, \widetilde{F}_n)}{\rho(x, \widetilde{F}_n) + \rho(x, F_n)},$$

donde el símbolo $\rho(x, F)$ denota la distancia del punto x al conjunto F.

Evidentemente, toda función $\varphi_n(x)$ es continua en E, es igual a la unidad en F_n, igual a cero en $\widetilde{F}_n$ y satisface siempre la condición

[1]) En virtud de la definición de mensurabilidad del conjunto E_0 y del corolario del teorema 8.5 (véase p. 2, § 2, cap. 8).

$0 \leqslant \varphi_n(x) \leqslant 1$. De aquí obtenemos la siguiente estimación para la norma de la diferencia $\varphi_n(x) - \omega(x)$:

$$\|\varphi_n - \omega\|^2_{L^2(E)} = \int_E [\varphi_n(x) - \omega(x)]^2 \, dx \leqslant \int_{G_n \setminus F_n} dx < \frac{1}{n}, \qquad (11.20)$$

la cual da por terminado la demostración del teorema.

Demostremos ahora el siguiente teorema *fundamental*.

***Teorema* 11.5.** *Para cualquier conjunto medible acotado E el espacio $L^2(E)$ es separable.*

DEMOSTRACIÓN. Demostremos primero un caso en que el conjunto E es un segmento $[a, b]$. Probemos que podemos tomar a título de conjunto numerable siempre denso en $L^2([a, b])$ un conjunto M de todos los polinomios de coeficientes racionales [1]).

De acuerdo con el teorema 11.4, toda función $f(x)$ de $L^2([a, b])$ puede aproximarse con cualquier grado de exactitud en la norma de $L^2([a, b])$ mediante una función continua. Luego, de acuerdo con el teorema de Weierstrass 1.18, toda función continua en el segmento $[a, b]$ puede uniformemente aproximarse en dicho segmento (y, por tanto, también en la norma de $L^2([a, b])$) con cualquier grado de exactitud mediante un polinomio algebraico de coeficientes reales.

Por fin, es obvio que un polinomio algebraico de coeficientes reales puede uniformemente aproximarse en $[a, b]$, y, por consiguiente, en la norma de $L^2([a, b])$ con cualquier grado de exactitud mediante un polinomio de coeficientes racionales. Con esto queda finalizada la demostración del teorema en el caso, cuando el conjunto E es el segmento $[a, b]$.

Ahora, sea E un conjunto medible acotado arbitrario. Por cuanto el conjunto E es acotado, se encontrará un segmento $[a, b]$ que contenga el conjunto E.

Supongamos que $f(x)$ es una función arbitraria de $L^2(E)$. Hagamos prolongar esta función al segmento $[a, b]$, poniéndola igual a cero fuera de E. Resta notar que la función $f(x)$, prolongada de la manera indicada, pertenece a la clase $L^2([a, b])$, y, por eso, de conformidad con lo demostrado más arriba, puede aproximarse con cualquier grado de exactitud en la norma de $L^2([a, b])$ (y, con mayor razón, en la norma de $L^2(E)$) mediante los polinomios de coeficientes racionales. Por consiguiente, en este caso también los polinomios de coeficientes racionales forman un conjunto siempre denso en $L^2(E)$. El teorema está completamente demostrado.

3. Existencia en L^2 de un sistema ortonormalizado cerrado compuesto de un número numerable de elementos. Para construir en L^2 un sistema ortonormalizado cerrado de elementos, partiremos de

---

[1]) El hecho de que este conjunto M es numerable se desprende de numerabilidad de todos los números racionales y de numerabilidad del número de todos los polinomios de diferentes grados.

lo que en L^2 existe un conjunto siempre denso de elementos $f_1, f_2, \ldots, f_n, \ldots$

Demostremos que un sistema normalizado cerrado puede ser construido con ayuda de las combinaciones [1]) lineales finitas de elementos del conjunto siempre denso $f_1, f_2, \ldots, f_n, \ldots$

Este método de construir un sistema ortonormalizado se llama, de ordinario, *proceso de ortogonalización*.

Convengamos en considerar que entre los elementos $f_1, f_2, \ldots, f_n, \ldots$ no hay linealmente dependientes [2]) (de lo contrario, al aumentar sucesivamente el número n, tendríamos que eliminar en la $\{f_n\}$ cada elemento f_n que es una combinación lineal de elementos $f_1, f_2, \ldots, f_{n-1}$).

Construyamos un sistema de elementos no nulos ortogonales dos a dos $\Psi_1, \Psi_2, \ldots, \Psi_n, \ldots$ tales que para todo número n cada uno de los elementos $\Psi_1, \Psi_2, \ldots, \Psi_n$ sea una combinación lineal de elementos $f_1, f_2, \ldots, f_n$, y, viceversa, cada uno de los elementos $f_1, f_2, \ldots, f_n$ sea una combinación lineal de elementos $\Psi_1, \Psi_2, \ldots, \Psi_n$ [3]).

Demostremos, empleando el método de inducción matemática, que el citado sistema de elementos $\Psi_1, \Psi_2, \ldots, \Psi_n, \ldots$ puede ser sucesivamente definido mediante las relaciones

$$\Psi_1 = f_1, \tag{11.21}$$

$$\Psi_n = \begin{vmatrix} (f_1, \Psi_1) & (f_1, \Psi_2) & \ldots & (f_1, \Psi_{n-1}) & f_1 \\ (f_2, \Psi_1) & (f_2, \Psi_2) & \ldots & (f_2, \Psi_{n-1}) & f_2 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ (f_n, \Psi_1) & (f_n, \Psi_2) & \ldots & (f_n, \Psi_{n-1}) & f_n \end{vmatrix} \quad \text{para } n \geqslant 2. \tag{11.22}$$

Está claro que el elemento Ψ_1, definido por la relación (11.21), es no nulo (pues, de lo contrario, para todo número n resultarían ser linealmente dependientes los elementos $f_1, f_2, \ldots, f_n$.

De este modo, cuando $n = 1$, quedan cumplidas todas las exigencias mencionadas anteriormente. Supongamos ahora que el sistema $\Psi_1, \Psi_2, \ldots, \Psi_{n-1}$, construida con ayuda de las relaciones (11.21) y (11.22), satisface todos los requisitos citados más arriba y cerciorémonos de que en este caso se satisfacen también por el sistema $\Psi_1, \Psi_2, \ldots, \Psi_n$, construido con ayuda de las mismas relaciones.

De (11.22) se pone claro que un elemento Ψ_n es una combinación

---

[1]) Se dice que un elemento Ψ_n es combinación lineal de elementos $f_1, f_2, \ldots, f_m$, si existen tales números reales $\alpha_m, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$ que $\Psi_n = \alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2 + \ldots + \alpha_m f_m$.

[2]) Esto significa que ninguno de los elementos f_n de $\{f_n\}$ es combinación lineal de un número finito de otros elementos de $\{f_n\}$.

[3]) En el lenguaje del álgebra lineal esto significa que la cápsula lineal tendida sobre los elementos $\Psi_1, \Psi_2, \ldots, \Psi_n$ coincide con la cápsula lineal tendida sobre los elementos $f_1, f_2, \ldots, f_n$.

lineal de elementos $f_1, f_2, f_3, \ldots, f_n$, y, por lo tanto, no es nulo (de lo contrario, sería un elemento nulo la citada combinación lineal, es decir, los elementos $f_1, f_2, \ldots, f_n$ resultarían ser linealmente dependientes).

Luego, por cuanto los elementos $f_1, f_2, \ldots, f_{n-1}$ se expresan linealmente en términos de $\Psi_1, \Psi_2, \ldots, \Psi_{n-1}$, y como el menor en la esquina derecha inferior del determinante (11.22) de f_n es igual a $\| \Psi_{n-1} \|$ [1]), y, por eso, es distinto de cero, de la igualdad (11.22) concluimos que también el elemento f_n se expresa linealmente en términos de $\Psi_1, \Psi_2, \ldots, \Psi_n$.

Por fin, de (11.22) se deduce inmediatamente que el elemento Ψ_n es ortogonal con relación a cada uno de los elementos $\Psi_1, \Psi_2, \ldots$ $\ldots, \Psi_{n-1}$. En efecto, si k es cualquiera de los números $1, 2, \ldots$ $\ldots, n-1$, entonces, al multiplicar ambos miembros de (11.22) escalarmente por Ψ_k, obtendremos en el segundo miembro un determinante cuyas columnas k-ésima y n-ésima son iguales. De lo que tal determinante es igual a cero proviene que $(\Psi_n, \Psi_k) = 0$ para todo $k = 1, 2, \ldots, n-1$.

Queda finalizada la inducción y el sistema $\Psi_1, \Psi_2, \ldots, \Psi_n, \ldots$, que satisface las exigencias mencionadas, está construido.

Ahora, al poner, para cada número n, $\varphi_n = \Psi_n / \| \Psi_n \|$, obtenemos un sistema ortonormalizado $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n, \ldots$

El carácter cerrado del sistema construido $\{\varphi_n\}$ se deduce en seguida de lo que todo elemento del conjunto siempre denso $\{f_n\}$ es una combinación lineal de un número finito de elementos del sistema $\{\varphi_n\}$.

De la numerabilidad del conjunto siempre denso de elementos $f_1, f_2, \ldots, f_n, \ldots$ se desprende que el sistema ortonormalizado cerrado construido contiene *a lo sumo un número numerable* de elementos. Mas, el número de elementos de este sistema *no puede ser finito*, pues, esto significaría que el espacio L^2 es de dimensión finita [2]).

Con esto queda definitivamente demostrada la existencia en L^2 de un sistema ortonormalizado cerrado compuesto de un número numerable de elementos.

Señalemos en conclusión que un sistema ortonormalizado cerrado de elementos en L^2 se denomina, a menudo, *base ortonormalizada* [3]).

---

[1]) Para cerciorarse de esto, basta escribir la igualdad (11.22) para el número $(n-1)$ y multiplicarla escalarmente por Ψ_{n-1}.

[2]) El hecho de que la dimensión del espacio $L^2(E)$ es infinita se deduce directamente de que para cualquier número n, prefijado de antemano en este espacio, existen n elementos linealmente independientes $1, x, x^2, \ldots, x^{n-1}$.

[3]) Un sistema de elementos $\{\varphi_n\}$ se llama *base* del espacio $L^2(E)$, si a todo elemento f de $L^2(E)$ le corresponde unívocamente un desarrollo de este elemento en serie $\sum_{n=1}^{\infty} c_n \varphi_n$ con coeficientes constantes c_n, convergente hacia el elemento f en la norma del espacio $L^2(E)$.

4. Isomorfismo de los espacios L^2 y l^2 y corolarios. Al igual que en el espacio l^2, se introduce en el espacio $L^2(E)$ el concepto de convergencia débil de una sucesión de elementos y el de compacticidad débil de un conjunto de elementos.

Definición 1. *Una sucesión $\{f_n(x)\}$ de elementos del espacio $L^2(E)$ se denomina débilmente convergente hacia un elemento $f(x)$ de este espacio, si para cualquier elemento $g(x)$ de $L^2(E)$ es válida la relación*

$$(f_n, g) \to (f, g) \quad para \quad n \to \infty,$$

o bien, que es lo mismo,

$$\int_E f_n(x)\, g(x)\, dx \to \int_E f(x)\, g(x)\, dx \quad para \ n \to \infty.$$

De un modo elemental, por suma analogía con el caso de l^2, se demuestra que de la convergencia de $\{f_n(x)\}$ hacia $f(x)$ en la norma de $L^2(E)$ se deduce la convergencia débil de $\{f_n(x)\}$ hacia $f(x)$. Por supuesto, la convergencia débil de los elementos de $L^2(E)$ no lleva consigo la convergencia en la norma de $L^2(E)$ (de ejemplo puede servir cualquier sucesión ortonormalizada de elementos del espacio $L^2(E)$).

Definición 2. *Un conjunto infinito M de elementos del espacio $L^2(E)$ se llama débilmente compacto, si en cualquier sucesión de elementos $\{f_n(x)\}$, perteneciente al conjunto M, puede separarse una subsucesión débilmente convergente.*

Por suma analogía con lo que se ha hecho para el espacio l^2, en el espacio L^2 se introduce el concepto de funcional lineal continua.

Definición 3. *Una funcional $l(f)$, definida sobre los elementos f del espacio $L^2(E)$, se llama lineal, si para cualesquiera dos elementos f y g del espacio $L^2(E)$ y para cualesquiera números reales α y β se verifica la igualdad $l(\alpha f + \beta g) = \alpha l(f) + \beta l(g)$.*

Convengamos en llamar los elementos f de $L^2(E)$ *puntos* de este espacio (en los casos cuando ello sea cómodo).

Definición 4. *Una funcional $l(f)$, definida sobre los elementos f del espacio $L^2(E)$, se llama continua en un punto f_0 de dicho espacio, si para cualquier sucesión $\{f_n\}$ de elementos de $L^2(E)$, convergente en la norma de $L^2(E)$ hacia el elemento f_0, una sucesión numérica $l(f_n)$ converge hacia $l(f_0)$.*

Definición 5. *Una funcional $l(f)$ se denomina simplemente continua, si es continua en cada punto f del espacio $L^2(E)$.*

Lo mismo que en el caso de l^2, es fácil demostrar que si una funcional lineal en $L^2(E)$ es continua al menos en un solo punto de $L^2(E)$, será continua en todo punto de $L^2(E)$, es decir, es simplemente continua.

Surge, naturalmente, la cuestión de aplicación en el espacio $L^2(E)$ del teorema **11.2** sobre la forma general de la funcional lineal

continua y del 11.3 sobre la compacticidad débil de todo conjunto acotado (en norma), demostrados ambos para el espacio l^2.

Establezcamos una relación profunda existente entre los espacios L^2 y l^2, que nos permitirá constatar inmediatamente la validez para el espacio L^2 de los teoremas que acabamos de citar.

Introduzcamos la siguiente noción fundamental.

Definición 6. *Dos espacios euclídeos arbitrarios R y R' se llaman isomorfos, si entre los elementos de dichos espacios se puede establecer una correspondencia biunívoca de un modo tal que, a condición de que los elementos x' e y' del espacio R' son imágenes de los elementos x e y del espacio R, se cumplan los siguientes requisitos: 1) un elemento $x' + y'$ del espacio R' es la imagen del elemento $x + y$ del espacio R; 2) con cualquier λ real, un elemento $\lambda x'$ del espacio R' es la imagen del elemento λx del espacio R; 3) los productos escalares (x', y') y (x, y) son iguales.*

En el curso de álgebra lineal se establece que todos los espacios euclídeos n-dimensionales son isomorfos entre sí e isomorfos al espacio E^n.

El objetivo principal de este punto consiste en establecer el isomorfismo de los espacios euclídeos de dimensión infinita $L^2(E)$ y l^2. Pero, demostremos, ante todo, el siguiente teorema notable.

Teorema 11.6 (teorema de Riesz—Fisher). *Sea $\{\varphi_n\}$ un sistema ortonormalizado arbitrario en $L^2(E)$ [1]. Entonces, para toda sucesión de números reales $(c_1, c_2, \ldots, c_n, \ldots)$ que satisface una condición $\sum_{k=1}^{\infty} c_k^2 < \infty$, es decir, es un elemento de l^2, existe una, y sólo una, función $f(x)$ del espacio $L^2(E)$ tal que $c_n = (f, \varphi_n) = \int f(x)\varphi_n(x)\,dx$*

y $\sum_{k=1}^{\infty} c_k^2 = \|f\|^2 = \int_E f^2(x)\,dx.$

DEMOSTRACIÓN. Pongamos $f_n = \sum_{k=1}^{n} c_k\varphi_k$. La sucesión $\{f_n\}$ es fundamental, puesto que para $m \geqslant n$ se verifica la igualdad $\|f_m - f_n\|^2 = \sum_{k=n+1}^{m} c_k^2$ y, por hipótesis, la serie $\sum_{k=1}^{\infty} c_k^2$ es convergente. Mas, en este caso, por ser completo el espacio $L^2(E)$ (la completitud fue establecida en el p. 7, § 4, cap. 8) existe un elemento f del espacio $L^2(E)$ de tal género que

$$\lim_{n\to\infty} \|f_n - f\| = \lim_{n\to\infty} \left\| \sum_{k=1}^{n} c_k\varphi_k - f \right\| = 0. \qquad (11.23)$$

[1] No se presupone la completitud, ni menos aún, el carácter cerrado de este sistema.

De la última relación y de la identidad de Bessel (10.17), obtenida en el § 1, cap. 10 [1]), se deduce que

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} c_k^2 = \| f \|^2, \text{ es decir, } \sum_{k=1}^{\infty} c_k^2 = \| f \|^2.$$

Demostremos que $(f, \varphi_k) = c_k$ para todo número k. Con este fin notemos que en virtud de que el sistema $\{\varphi_k\}$ es ortonormalizado para todo $n \geqslant k$, se verifica la igualdad

$$(f_n, \varphi_k) = \left(\sum_{l=1}^{n} c_l \varphi_l, \varphi_k \right) = \sum_{l=1}^{n} c_l (\varphi_l, \varphi_k) = c_k, \qquad (11.24)$$

y tomemos en consideración que, en virtud de la desigualdad de Cauchy—Buniakovski,

$$|(f_n, \varphi_k) - (f, \varphi_k)| = |(f_n - f, \varphi_k)| \leqslant \sqrt{\| f_n - f \| \cdot \| \varphi_k \|} = \sqrt{\| f_n - f \|}$$

y, en vista de (11.23), es válida la relación

$$(f_n, \varphi_k) \to (f, \varphi_k) \quad \text{para} \quad n \to \infty. \qquad (11.25)$$

De (11.24) y (11.25) obtenemos que $(f, \varphi_k) = c_k$ para todo número k.

Resta por demostrar que f es el *único* elemento de $L^2(E)$ que satisface todas las condiciones del teorema. Sea g cualquier otro elemento de $L^2(E)$ que satisface todas las condiciones del teorema. De la desigualdad de Cauchy—Buniakovski $|(f_n - f, g)| \leqslant \leqslant \sqrt{\| f_n - f \|} \cdot \sqrt{\| g \|}$ y de (11.23) se deduce que

$$(f_n - f, g) \to 0 \quad \text{para} \quad n \to \infty. \qquad (11.26)$$

Pero, de la igualdad $(g, \varphi_k) = c_k$ y de los axiomas del producto escalar proviene que

$$(f_n - f, g) = \left(\sum_{k=1}^{n} c_k \varphi_k - f, g \right) = \sum_{k=1}^{n} c_k (g, \varphi_k) - (f, g) = \sum_{k=1}^{n} c_k^2 - (f, g),$$

de suerte que, en vista de (11.26),

$$\sum_{k=1}^{\infty} c_k^2 = (f, g). \qquad (11.27)$$

De (11.27) y de las relaciones $\sum_{k=1}^{\infty} c_k^2 = \| f \|^2$ y $\sum_{k=1}^{\infty} c_k^2 = \| g \|^2$ obtenemos

$$\| f - g \| = (f - g, f - g) = \| f \|^2 - 2(f, g) + \| g \|^2 = 0.$$

[1]) La citada desigualdad de Bessel se cumple para todo sistema ortonormalizado en cualquier espacio euclídeo.

Mas, esto significa precisamente que la diferencia $f - g$ es un elemento nulo de $L^2(E)$, es decir, $f = g$. El teorema está completamente demostrado.

OBSERVACIÓN. Si un sistema ortonormalizado $\{\varphi_n\}$ está cerrado o, por lo menos completo, la unicidad del elemento f tendrá lugar incluso sin la exigencia de que $\sum_{k=1}^{\infty} c_k^2 = \|f\|^2$ (véase con esto motivo el teorema 10.8).

Apoyándonos en el teorema de Riesz—Fisher, demostremos el siguiente teorema *fundamental*.

Teorema 11.7. *Los espacios $L^2(E)$ y l^2 son isomorfos.*

DEMOSTRACIÓN. Elijamos en el espacio $L^2(E)$ un sistema ortonormalizado cerrado $\{\varphi_k\}$ y pongamos en correspondencia a todo elemento f del espacio $L^2(E)$ un elemento $\boldsymbol{c} = (c_1, c_2, \ldots, c_n, \ldots)$ del espacio l^2 cuyas coordenadas c_k tienen por expresión $c_k = (f, \varphi_k)$ $(k = 1, 2, \ldots)$. En virtud del teorema 11.6, tal correspondencia es biunívoca.

Queda por demostrar que si a los elementos f y g del espacio $L^2(E)$ les corresponden, respectivamente, los elementos $\boldsymbol{c} = (c_1, c_2, \ldots, c_n, \ldots)$ y $\boldsymbol{d} = (d_1, d_2, \ldots, d_n, \ldots)$ del espacio l^2, entonces: 1) al elemento $f + g$ le corresponde el elemento $\boldsymbol{c} + \boldsymbol{d} = (c_1 + d_1, c_2 + d_2, \ldots, c_n + d_n, \ldots)$, 2) para todo λ real, al elemento λf le corresponde un elemento $\lambda \boldsymbol{c} = (\lambda c_1, \lambda c_2, \ldots, \lambda c_n, \ldots)$, 3) se verifica la igualdad

$$(f, g) = (\boldsymbol{c}, \boldsymbol{d}) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k d_k, \tag{11.28}$$

llamada, corrientemente, *igualdad generalizada de Parseval*.

Las exigencias 1) y 2) se deducen de las propiedades del producto escalar [1]). Demostremos la igualdad (11.28). Por ser cerrado el sistema $\{\varphi_k\}$, para cada una de las funciones f, g y $f + g$ son válidas las igualdades de Parseval

$$(f, f) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k^2, \quad (g, g) = \sum_{k=1}^{\infty} d_k^2, \tag{11.29}$$

$$(f + g, f + g) = \sum_{k=1}^{\infty} (c_k + d_k)^2. \tag{11.30}$$

Al sustraer (11.29) de (11.30), obtendremos

$$2(f, g) = 2 \sum_{k=1}^{\infty} c_k d_k.$$

El teorema está completamente demostrado.

---

[1]) Para demostrar 1), basta notar que $(f + g, \varphi_k) = (f, \varphi_k) + (g, \varphi_k) = c_k + d_k$.

El teorema demostrado permite considerar l^2 como una forma coordenada de notación de los elementos del espacio $L^2(E)$. Este teorema hace extender a $L^2(E)$ todas las afirmaciones establecidas para l^2, y viceversa.

En particular, del teorema 11.7 se deducen las siguientes afirmaciones.

1°. El espacio l^2 es completo.

2°. Cualquier conjunto acotado en norma de $L^2(E)$, que contiene un número infinito de elementos de $L^2(E)$, es débilmente compacto.

3°. Para toda funcional lineal continua $l(f)$, definida sobre los elementos f del espacio $L^2(E)$, existe uno, y sólo un elemento g del espacio $L^2(E)$ de tal género que para todos los elementos f del espacio $L^2(E)$ se verifique la igualdad $l(f) = (f, g)$, con la particularidad de que

$$\| l \| = \sup_{f \in L^2(E)} \frac{|l(f)|}{\| f \|} = \| g \|.$$

Desde el punto de vista de la mecánica cuántica, el teorema 11.7 es una argumentación matemática de la equivalencia existente entre la «mecánica matricial» de Heisenberg y la «mecánica ondulatoria» de Schrödinger, la primera de las cuales empleaba como aparato matemático el espacio coordenado l^2, y la segunda, un espacio de funciones con cuadrado integrable L^2.

El teorema 11.7 sugiere, naturalmente, una idea de que ambos espacios, l^2 y L^2, son sólo dos diferentes realizaciones concretas de un mismo espacio abstracto, y nosotros pasamos al análisis de dicho espacio.

§ 3. Espacio abstracto de Hilbert

1. Concepto de espacio abstracto de Hilbert. Un espacio de Hilbert H, el que ya conocimos en forma de dos sus realizaciones concretas l^2 y L^2, se introduce axiomáticamente como una totalidad de elementos X, Y, Z, . . . de cualquier género que satisfacen un sistema determinado de axiomas.

He aquí todos los axiomas a los cuales han de satisfacer los elementos del espacio abstracto de Hilbert H.

1. a) Axioma sobre la existencia de una regla, por medio de la cual a cualesquiera dos elementos X e Y del espacio H se les pone en correspondencia un elemento de este espacio Z, llamado suma de X e Y.

b) Axioma sobre la existencia de una regla, por medio de la cual a todo elemento X del espacio H y a todo número real λ se les pone en correspondencia un elemento del espacio H, llamado producto de X por λ.

c) Ocho axiomas del espacio lineal [1]).

II. a) Axioma sobre la existencia de una regla, por medio de la cual a cualesquiera dos elementos X e Y del espacio H se les pone en correspondencia un número, llamado producto escalar de estos elementos y denotado con el símbolo (X, Y).

b) Cuatro axiomas del producto escalar [2]).

III. Axioma sobre la completitud del espacio H respecto de la norma definida mediante una igualdad $\| X \| = \sqrt{(X, X)}$ [3]).

IV. Axioma sobre la existencia en H de cualquier número prefijado de antemano de elementos linealmente independientes.

V. Axioma sobre la existencia en H de un conjunto numerable de elementos siempre denso (en el sentido de la norma de H).

Dicho de otro modo, *se llama espacio de Hilbert H todo espacio euclídeo lineal completo separable de dimensión infinita.*

En el espacio de Hilbert H se introducen: 1) concepto de convergencia de una sucesión de elementos *en norma y de convergencia débil* (se dice que una sucesión de elementos $\{X_n\}$ es débilmente convergente hacia el elemento X, si para todo elemento Y es válida la relación $(X_n, Y) \to (X, Y)$ cuando $n \to \infty$); 2) concepto de *compacticidad débil* del conjunto M de elementos de H (que se define como la posibilidad de elegir en cualquier sucesión de elementos de M una subsucesión débilmente convergente); 3) concepto de funcionales *lineal* y *continua* $l(X)$, definidas sobre los elementos X del espacio H (una funcional $l(X)$ se llama *lineal*, si $l(\alpha X + \beta Y) = \alpha l(X) + \beta l(Y)$ para cualesquiera elementos X e Y del espacio H y para

[1]) Los ocho axiomas mencionados pueden encontrarse en cualquier curso de álgebra lineal. Para mayor comodidad damos aquí estos axiomas.

1°. $X + Y = Y + X$ (para cualesquiera elementos X e Y).

2°. $X + (Y + Z) = (X + Y) + Z$ (para cualesquiera elementos X, Y y Z).

3°. Existe un elemento $\mathbf{0}$ tal que $X + \mathbf{0} = X$ para todo elemento X.

4°. Para cada elemento X existe un elemento X' tal que $X + X' = \mathbf{0}$.

5°. $\alpha(\beta X) = (\alpha\beta) \cdot X$ para todo elemento X y cualesquiera números reales α y β.

6°. $1 \cdot X = X$ para todo elemento X.

7°. $(\alpha + \beta) X = \alpha X + \beta X$ para todo elemento X y cualesquiera números reales α y β.

8°. $\alpha(X + Y) = \alpha X + \alpha Y$ para cualesquiera elementos X e Y y todo número real α.

[2]) Los axiomas del producto escalar se tratan en el § 1, cap. 10. Para mayor comodidad damos aquí estos axiomas.

1°. $(X, Y) = (Y, X)$ para cualesquiera X e Y.

2°. $(X + Y, Z) = (X, Z) + (Y, Z)$ para cualesquiera elementos X, Y, Z.

3°. $(\alpha X, Y) = \alpha (X, Y)$ para cualesquiera elementos X e Y y todo número real α.

4°. $(X, X) > 0$ para todo elemento no nulo X, $(0, 0) = 0$.

[3]) Véase la definición de espacio normalizado lineal en el p. 7, § 4, cap. 8.

todos los números reales α y β; una funcional $l(X)$ se llama *continua en un «punto»* X_0, si $l(X_n) \to l(X_0)$ para toda sucesión $\{X_n\}$ de elementos de H, para la cual $\| X_n - X_0 \| \to 0$; simplemente *continua* se denomina una funcional $l(X)$ que es continua en todo punto X del espacio H).

Por suma analogía con lo que se ha hecho en el p. 3, § 2 para el espacio L^2, en el caso del espacio de Hilbert H se demuestra la existencia de *un sistema de elementos ortonormalizado cerrado* $\{\Phi_n\}$ (con este fin se realiza el proceso de ortogonalización de un conjunto de elementos de H siempre denso).

Para el espacio abstracto de Hilbert H (al igual que para L^2 también) es válido *el teorema de Riesz—Fisher*: si $\{\Phi_n\}$ es un sistema ortonormalizado arbitrario en H, y $(c_1, c_2, \ldots, c_n, \ldots)$, una sucesión arbitraria de números reales que satisfacen la condición $\sum\limits_{k=1}^{\infty} c_k^2 < \infty$, existe en H, y, además, el único elemento X tal que

$c_k = (X, \Phi_k)$ y $\sum\limits_{k=1}^{\infty} c_k^2 = \| X \|^2$.

La demostración de este teorema se diferencia de la del teorema 11.6 sólo en lo que en todos los razonamientos conviene tomar los elementos de H en lugar de los elementos del espacio L^2.

El teorema de Riesz—Fisher permite establecer el siguiente teorema fundamental.

Teorema 11.8. *Todos los espacios de Hilbert son isomorfos uno al otro.*

Basta demostrar que todo espacio de Hilbert H es isomorfo al espacio l^2, y con este fin es suficiente repetir la demostración del teorema 11.7, sustituyendo en todos los razonamientos los elementos de L^2 por los de H.

Del teorema 11.8 se deducen en seguida las siguientes *afirmaciones*.

1°. *Todo conjunto acotado en norma de H que contiene un número infinito de elementos de H es débilmente compacto.*

2°. *Para cada funcional lineal continua $l(X)$, definida sobre los elementos X del espacio de Hilbert H, existe uno (y sólo un) elemento Y de este espacio tal que para todos los elementos X del espacio H se verifique la desigualdad $l(X) = (X, Y)$, con la particularidad de que* $\| l \| = \sup\limits_{x \in H} \frac{| l(X) |}{\| X \|} = \| Y \|$.

OBSERVACIÓN. Se puede mostrar que todo conjunto M débilmente compacto de un número infinito de elementos de H es acotado (en la norma de H). De otras palabras, se puede demostrar que *el carácter acotado de un subconjunto M de H que contiene un número infinito de elementos constituye una condición necesaria y suficiente de la compacticidad débil de dicho subconjunto.*

2. Equivalencia de los conceptos de completitud y de carácter cerrado de un sistema ortonor malizado en el espacio de Hilbert. De acuerdo con el teorema 10.7, en cualquier espacio euclídeo (y, por lo tanto, en cualquier espacio de Hilbert) todo sistema ortonormalizado cerrado es completo. Ahora demostremos que en el espacio de Hilbert es válida también la afirmación inversa.

Teorema 11.9. *Todo sistema ortonormalizado completo de elementos de un espacio arbitrario de Hilbert es cerrado.*

DEMOSTRACIÓN. Sea $\{\Phi_n\}$ un sistema ortonormalizado completo arbitrario de elementos de H, y sea Ψ cualquier elemento de H. Es suficiente mostrar que la n-ésima suma parcial S_n de la serie de Fourier del elemento Ψ según el sistema $\{\Phi_n\}$ converge hacia dicho elemento Ψ en norma de H.

Sea $c_k = (\Psi, \Phi_k)$, $S_n = \sum_{k=1}^{n} c_k \Phi_k$. Por cuanto la serie $\sum_{k=1}^{\infty} c_k^2$ es convergente[1]) (en virtud de los axiomas del producto escalar y de lo que el sistema $\{\Phi_n\}$ es ortonormalizado) y puesto que, para todo $m \geqslant n$

$$\| S_m - S_n \| = \left\| \sum_{k=n+1}^{m} c_k \Psi_k \right\| = \left(\sum_{k=n+1}^{m} c_k \Psi_k,\ \sum_{k=n+1}^{m} c_k \Psi_k \right) = \sum_{k=n+1}^{m} c_k^2,$$

la sucesión $\{S_n\}$ es *fundamental*.

Mas, en este caso, por ser completo el espacio H, existe un elemento de este espacio Ψ_0 tal que

$$\| S_n - \Psi_0 \| \to 0 \quad \text{para} \quad n \to \infty. \tag{11.31}$$

Resta por demostrar que $\Psi_0 = \Psi$. Con este fin es suficiente probar que los elementos Ψ y Ψ_0 tienen iguales coeficientes de Fourier[2]). Fijemos un número arbitrario k. Para todo $n \geqslant k$, en virtud del carácter ortonormalizado del sistema $\{\Phi_n\}$ y de los axiomas del producto escalar,

$$(S_n, \Phi_k) = \left(\sum_{l=1}^{n} c_l \Phi_l,\ \Phi_k \right) = \sum_{l=1}^{n} c_l (\Phi_l, \Phi_k) = c_k. \tag{11.32}$$

Por otra parte, dado que, en vista de la desigualdad de Cauchy—Buniakovski,

$$\begin{aligned} |(S_n, \Phi_k) - (\Psi_0, \Phi_k)| &= |(S_n - \Psi_0, \Phi_k)| \leqslant \\ &\leqslant \sqrt{\| S_n - \Psi_0 \| \cdot \| \Phi_k \|} = \sqrt{\| S_n - \Psi_0 \|}, \end{aligned}$$

---

[1]) La convergencia de esta serie proviene, por ejemplo, de la desigualdad de Bessel (véase teorema 10.10).

[2]) En efecto, la coincidencia de todos los coeficientes de Fourier de los elementos Ψ y Ψ_0 significaría que el elemento $\Psi - \Psi_0$ es ortogonal a todos los Φ_n, y, por tanto, es *nulo*, por ser completo el sistema Φ_n.

de (11.31) se desprende que

$$(S_n, \Phi_k) \to (\Psi_0, \Phi_k) \quad \text{cuando} \quad n \to \infty.$$

De esta relación y de (11.32) obtenemos que $(\Psi_0, \Phi_k) = c_k = (\Psi, \Phi_k)$. El teorema está demostrado.

Corolario. *En el espacio de Hilbert H la completitud de un sistema ortonormalizado es equivalente a su carácter cerrado.*

OBSERVACIÓN. Para un espacio euclídeo no completo el teorema 11.9 no es, en el caso general, válido.

Ilustremos este hecho con el siguiente ejemplo [1].

Examinemos un espacio euclídeo C^0 de todas las funciones $f(x)$, *continuas* sobre un segmento $[-\pi, \pi]$, con un producto escalar definido mediante la igualdad

$$(f, g) = \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\, g(x)\, dx.$$

Por supuesto, este espacio no es completo [2] (y, por lo tanto, no es de Hilbert). Construyamos en este espacio un sistema ortonormalizado completo de elementos que no sea cerrado. El proceso de construcción de tal sistema se subdivide en dos etapas.

1°. Primero demostremos que en el espacio de Hilbert $L^2[-\pi, \pi]$ existe un sistema ortonormalizado completo $\varphi_0, \varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n, \ldots$ tal que la función $\varphi_0(x)$ es *discontinua* sobre el segmento $[-\pi, \pi]$ y todas las funciones $\varphi_n(x)$, $n = 1, 2, \ldots$, son *continuas* sobre dicho segmento.

Pongamos

$$\Psi_0(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt{\pi}} & \text{para } 0 \leqslant x \leqslant \pi, \\ 0 & \text{para } -\pi \leqslant x < 0, \end{cases} \tag{11.33}$$

$$\Psi_{2n}(x) = \frac{\sqrt{2}\cos nx}{\sqrt{\pi}} \quad (n = 1, 2, \ldots),$$

$$\Psi_{2n-1} = \begin{cases} \dfrac{\sqrt{2}\,\mathrm{sen}\, nx}{\sqrt{\pi}} & \text{para } -\pi \leqslant x \leqslant 0, \\ 0 & \text{para } 0 \leqslant x \leqslant \pi \end{cases} \quad (n = 1, 2, \ldots).$$

---

[1] Este ejemplo nos proporcionó Sh. A. Alímov.

[2] Es suficiente fijar una función $f_0(x)$ sobre el segmento $[-\pi, \pi]$ que sea continua a trozos (pero no estrictamente continua) y observar que (en virtud del corolario 2 del p. 3, § 3, cap. 10) la sucesión de sumas parciales de la serie trigonométrica de Fourier de la función $f_0(x)$ converge hacia esta función en la norma de $L^2[-\pi, \pi]$. Por ser completo el espacio $L^2[-\pi, \pi]$, la citada sucesión de sumas parciales es fundamental. Aunque todo elemento de dicha sucesión es una función continua en $[-\pi, \pi]$, su límite en $L^2[-\pi, \pi]$ (es decir, la función $f_0(x)$) no pertenece a C^0.

Indiquemos ahora mismo que la función $\Psi_0(x)$ es *discontinua* sobre el segmento $[-\pi, \pi]$, mientras que todas las demás funciones $\Psi_n(x)$ $(n = 1, 2, \ldots)$ son continuas en el mismo. Además, es fácil comprobar que la función $\Psi_0(x)$ es ortogonal en $[-\pi, \pi]$ a cada una de las funciones $\Psi_n(x)$ (para todo $n = 1, 2, \ldots$).

Cerciorémonos de que aunque el sistema $\{\Psi_n(x)\}$ $(n = 0, 1, 2, \ldots)$ no es ortonormalizado en $L^2[-\pi, \pi]$, es, sin embargo, completo en el sentido de que cualquier elemento $f(x)$ del espacio $L^2[-\pi, \pi]$, ortogonal a todas las $\Psi_n(x)$ (para $n = 0, 1, 2, \ldots$), será idénticamente igual a cero.

En efecto, sea $f(x)$ un elemento cualquiera del espacio $L^2[-\pi, \pi]$, ortogonal a todas las $\Psi_n(x)$ $(n = 0, 1, 2, \ldots)$.

De la ortogonalidad de $f(x)$ a todos los elementos de $\{\Psi_{2n-1}(x)\}$ $(n = 1, 2, \ldots)$ se deduce que sobre el segmento $[-\pi, 0]$ la función $f(x)$ es ortogonal al sistema $\left\{\frac{\sqrt{2}\operatorname{sen} nx}{\sqrt{\pi}}\right\}$ $(n = 1, 2, \ldots)$, y, por consiguiente, por ser completo este sistema en $[-\pi, 0]$ (la completitud está establecida en la observación 1 del p. 2, §3, cap. 10) la función $f(x)$ es equivalente a cero sobre $[-\pi, 0]$.

En este caso de la ortogonalidad de $f(x)$ a todos los elementos $\Psi_{2n}(x)$ $(n = 0, 1, 2, \ldots)$ se deduce que en el segmento $[0, \pi]$ la función $f(x)$ será ortogonal al sistema $\frac{1}{\sqrt{\pi}}$ $\frac{\sqrt{2}\cos nx}{\sqrt{\pi}}$ $(n = 1, 2, \ldots)$, y, por ser completo este sistema en $[0, \pi]$ (la completitud está establecida en la misma observación 1, p. 2, § 3, cap. 10) la función $f(x)$ será también equivalente a cero en el segmento $[0, \pi]$.

De este modo, la función $f(x)$ es equivalente a cero sobre todo el segmento $[-\pi, \pi]$.

Así pues, el sistema $\{\Psi_n(x)\}$ $(n = 0, 1, 2, \ldots)$ es completo en $L^2[-\pi, \pi]$. Al aplicar el proceso de ortogonalización al sistema $\Psi_1, \Psi_2, \Psi_3, \ldots, \Psi_n, \ldots$, obtendremos un sistema ortogonal $\Psi_0, \overline{\Psi}_1, \overline{\Psi}_2, \ldots, \overline{\Psi}_n, \ldots$ Resta normalizar este último sistema, es decir, poner [1]) $\varphi_0 = \Psi_0$, $\varphi_n = \frac{\overline{\Psi}_n}{\|\overline{\Psi}_n\|}$ (para $n = 1, 2, \ldots$).

Obtendremos un sistema ortonormalizado completo $\{\varphi_n\}$ $(n = 0, 1, 2, \ldots)$, cuyo elemento nulo $\varphi_0(x) = \Psi_0(x)$ se define mediante la fórmula (11.33) y representa una función discontinua sobre el segmento $[-\pi, \pi]$, mientras que todos los demás elementos son continuos en $[-\pi, \pi]$, puesto que son combinaciones lineales de las funciones continuas.

2°. Volvamos ahora al análisis del espacio C^0 de todas las funciones continuas sobre el segmento $[-\pi, \pi]$ y demostremos que el

[1]) Tenemos presente que $\|\Psi_0\| = 1$.

sistema $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n, \ldots$ es completo en este espacio, pero no es en C^0 cerrado.

Primero cerciorémonos de que el sistema $\{\varphi_n\}$ $(n = 1, 2, \ldots)$ es completo en C^0. Sea Ψ un elemento arbitrario de C^0, ortogonal a todas las φ_n para $n = 1, 2, \ldots$, es decir, de tal índole que

$$(\Psi, \varphi_n) = 0 \quad \text{para} \quad n = 1, 2, \ldots \tag{11.34}$$

Entonces, la función

$$f = \Psi - \varphi_0 (\Psi, \varphi_0) \tag{11.35}$$

será un elemento de $L^2[-\pi, \pi]$ y satisface las condiciones [1])

$$(f, \varphi_n) = 0 \quad \text{para todo} \quad n = 0, 1, 2, \ldots \tag{11.36}$$

Por ser el sistema $\{\varphi_n\}$ $(n = 0, 1, 2, \ldots)$ completo en $L^2[-\pi, \pi]$, de (11.36) se deduce que f es un elemento nulo, y, entonces, de (11.35) y de lo que la función $\Psi(x)$ es continua y la función $\varphi_0(x)$, discontinua sobre $[-\pi, \pi]$ se deduce que $(\Psi, \varphi_0) = 0$. La última igualdad considerada junto con (11.34) deja constancia de que Ψ es un elemento nulo, es decir, demuestra la completitud en C^0 del sistema $\{\varphi_n\}$ $(n = 1, 2, \ldots)$.

Demostremos ahora que el sistema $\{\varphi_n\}$ $(n = 1, 2, \ldots)$ no es cerrado en C^0. Sea P un polinomio de la forma $P = \sum_{k=1}^{n} a_k\varphi_k$ con unos coeficientes sumamente arbitrarios a_k $(k = 1, 2, \ldots, n)$. Por ser ortonormalizado el sistema $\{\varphi_k\}$ $(n = 0, 1, \ldots)$ y en vista de los axiomas del producto escalar, tenemos

$$\| \varphi_0 - P \| = \sqrt{(\varphi_0 - P, \varphi_0 - P)} = \sqrt{\| \varphi_0 \|^2 + \| P \|^2} \geqslant 1. \tag{11.37}$$

Por cuanto un conjunto de funciones continuas es siempre denso en $L^2[-\pi, \pi]$, para un elemento φ_0 se encontrará tal función continua $f(x)$ que

$$\| \varphi_0 - f \| < 1/2. \tag{11.38}$$

Pero, de (11.37) y (11.38) proviene que $\| f - P \| > 1/2$ para un polinomio sumamente arbitrario (con cualesquiera coeficientes) y esto quiere decir precisamente que el elemento f del espacio C^0 no puede aproximarse en la norma de $L^2[-\pi, \pi]$ mediante una combinación lineal de elementos de $\{\varphi_n\}$ $(n = 1, 2, \ldots)$, es decir, significa que el sistema $\{\varphi_n\}$ $(n = 1, 2, \ldots)$ no es cerrado en C^0.

---

[1]) En efecto, cuando $n = 1, 2, \ldots$ (11.36) se deduce en seguida de (11.34) y de la ortogonalidad de φ_0 a todas las φ_n $(n = 1, 2, \ldots)$. La igualdad $(f, \varphi_0) = 0$ proviene de (11.35), de los axiomas del producto escalar y de lo que $(\varphi_0, \varphi_0) = 1$.

§ 4. Operadores autoconjugados totalmente continuos en el espacio de Hilbert

1. Concepto de operador lineal continuo. Sea H un espacio de Hilbert arbitrario. Los elementos de este espacio se denotarán, para mayor comodidad, mediante letras latinas pequeñas x, y, z, ...

Si se conoce una regla, por medio de la cual a todo elemento x del espacio H se le pone en correspondencia cierto elemento de espacio citado y, suele decirse que en H está definido *un operador* A que actúa de H en H, y se escribe $y = Ax$.

Definición 1. *Un operador A se llama lineal, si para cualesquiera elementos x e y del espacio H y para todos los números reales α y β se verifica la igualdad*

$$A(\alpha x + \beta y) = \alpha \cdot Ax + \beta \cdot Ay.$$

Al igual que en el caso de una funcional, llamemos (cuando sea cómodo) los elementos del espacio H *puntos* del mismo.

Definición 2. *Un operador arbitrario A que actúa de H en H se llama continuo en el punto x_0 del espacio H, si para cualquier sucesión $\{x_n\}$ de elementos de H que converge en la norma de H hacia el elemento x_0, la correspondiente sucesión $\{Ax_n\}$ converge en la norma de H hacia un elemento Ax_0.*

Definición 3. *Un operador A se llama continuo, si es continuo en todo punto x del espacio H.*

Definición 4. *Un operador arbitrario A que actúa de H en H se llama acotado, si existe una constante C tal que para todos los elementos x del espacio H se cumple la desigualdad $\| Ax \| < C \| x \|$.*

Las definiciones enunciadas 1—4 son completamente análogas a las definiciones correspondientes 1—4 para una funcional formuladas en el p. 2 § 1 de este capítulo.

Esta analogía permite ofrecer sin demostración la siguiente afirmación: *un operador lineal A que actúa de H en H es continuo cuando, y sólo cuando, es acotado.*

La demostración de esta afirmación es absolutamente idéntica a la del teorema 11.1.

Para un operador continuo lineal (lo mismo que para una funcional continua lineal) se introduce el concepto de *norma*.

Definición 5. *Se llama norma de un operador continuo lineal A la cota superior exacta de la relación $\| Ax \| / \| x \|$ sobre un conjunto de todos los elementos $x \neq 0$ del espacio H.* (*o bien* (que es lo mismo) *la cota superior exacta de una magnitud $\| Ax \|$ sobre el conjunto de todos los elementos x del espacio H, cuya norma $\| x \|$ es igual a la unidad*).

La norma del operador continuo lineal A se denotará con el símbolo $\| A \|$. Así pues, por definición,

$$\| A \| = \sup_{\substack{\| x \| = 1 \\ x \in H}} \| Ax \|. \tag{11.39}$$

En lo que sigue más abajo en este párrafo se analizan siempre los operadores continuos lineales.

Aduzcamos un ejemplo de operador continuo lineal en el espacio de Hilbert.

Estudiemos un espacio de Hilbert $L^2 [a \leqslant t \leqslant b]$ y supongamos que está dada una función de dos variables $K(t, s)$, definida y continua en un cuadrado $[a \leqslant t \leqslant b] \times [a \leqslant s \leqslant b]$. Demostremos que un operador integral A, definido sobre los elementos $x(t)$ del espacio $L^2 [a \leqslant t \leqslant b]$ mediante una igualdad

$$Ax(t) = \int_a^b K(t, s)\, x(s)\, ds, \tag{11.40}$$

es lineal y continua. La linealidad de este operador se deduce inmediatamente de la propiedad de linealidad de la integral.

Para demostrar la continuidad del operador (11.40), basta demostrar su carácter acotado, para lo cual es suficiente establecer que su norma (11.39) es finita. Denotemos con M un número

$$M = \left[\int_a^b \int_a^b K^2(t, s)\, dt\, ds \right]^{1/2} \tag{11.41}$$

y cerciorémonos de que $\| A \| \leqslant M$. En virtud de la desigualdad de Cauchy—Buniakovski y de la definición de la norma, tenemos

$$| Ax(t) |^2 \leqslant \int_a^b K^2(t, s)\, ds \int_a^b x^2(s)\, ds = \| x \|^2 \int_a^b K^2(t, s)\, ds.$$

Al integrar la última desigualdad respecto de t dentro de los límites desde a hasta b, y al aprovechar la designación (11.41), tendremos

$$\| Ax \| \leqslant M \| x \|.$$

Mas, esto es precisamente un testimonio de que el operador A es acotado y la desigualdad $\| A \| < M$ para su norma es válida. Notemos que para algunos operadores integrales (11.40) la norma $\| A \|$ es exactamente igual a M.

2. Concepto de operador conjugado. Introduzcamos ahora una noción importante de operador *conjugado*.

Supongamos que en un espacio de Hilbert H está definido arbitrariamente un operador continuo lineal A que actúa de H en H.

Fijemos un elemento arbitrario y del espacio H y estudiemos una funcional $f(x) = f_y(x) = (Ax, y)$, definida sobre todos los elementos x del espacio H. Es evidente que esta funcional es continua y lineal.

Según el teorema de Riesz sobre la forma general de una funcional lineal, existe el único elemento $h = h_y$ del espacio H tal que para todos los elementos x del espacio H se verifique una igualdad $f(x) = (x, h)$.

Por consiguiente, a todo elemento y del espacio H se ha puesto en correspondencia uno, y sólo un, elemento de este espacio h de tal índole que $f_y(x) = (x, h)$, es decir, hemos definido en H cierto operador A^* tal que $h = A^*y$. El citado operador A^* se denomina *operador conjugado de operador A*.

Dicho de otro modo, llegamos a la siguiente definición.

Definición 1. *Un operador A^* se llama conjugado de operador A que actúa de H en H, si para cualesquiera elementos x e y del espacio H se verifica la igualdad*

$$(Ax, y) = (x, A^*y). \tag{11.42}$$

De los razonamientos aducidos proviene que para cada operador continuo lineal A existe, y, además, el único operador conjugado A^*.

Directamente de la definición 1 se deduce que si para el operador A^* existe un operador conjugado $(A^*)^*$, es válida la igualdad $(A^*)^* = A$.

Cerciorémonos, ahora, de que para el caso en que el operador A es continuo y lineal, el operador A^* es también continuo y lineal (por lo cual para A^* existe un operador conjugado y se verifica la igualdad $(A^*)^* = A$ que permite llamar los operadores A y A^* *recíprocamente conjugados*).

Teorema 11.10. *Un operador A^*, conjugado del operador continuo lineal A, es también lineal y continuo, con la particularidad de que las normas de los operadores A^*, y A están entrelazadas mediante una relación*

$$\| A^* \| = \| A \| . \tag{11.43}$$

DEMOSTRACIÓN. La linealidad del operador A^* proviene inmediatamente de la relación (11.42) y de los axiomas del producto escalar. Resta demostrar el carácter acotado del operador A^* y la igualdad (11.43).

En vista de la igualdad (11.42), la relación $\| Ay \| \leqslant \| A \| \, \|y\|$ [1]) y la desigualdad de Cauchy—Buniakovski, para cualesquiera elementos x e y del espacio H es válida la desigualdad

$$| (A^* x, y) | = | (x, Ay) | \leqslant \| x \| \cdot \| Ay \| \leqslant \| A \| \cdot \| x \| \times \times \| y \| .$$

[1]) La relación citada, válida para todo elemento y del espacio H, se deduce de la definición de la norma de un operador continuo lineal A.

Al tomar en esta desigualdad a título de y el elemento A^*x, llegamos a que para todo elemento x del espacio H es válida la desigualdad

$$\| A^*x \|^2 = (A^*x, A^*x) \leqslant$$

$$\leqslant \| A \| \cdot \| x \| \cdot \| A^*x \| ,$$

o bien $\| A^*x \| \leqslant \| A \| \cdot \| x \|$.

La última desigualdad significa que el operador A^* es acotado y que su norma $\| A^* \|$ satisface la condición

$$\| A^* \| \leqslant \| A \| . \qquad (11.44)$$

La linealidad y el carácter acotado (o, que es igual, la continuidad del operador A^* demostradas por nosotros aseguran la existencia de un operador conjugado $(A^*)^* = A$. Al repetir para este operador los razonamientos aducidos más arriba, obtendremos, en lugar de (11.44), una desigualdad

$$\| A \| \leqslant \| A^* \| . \qquad (11.45)$$

De (11.44) y (11.45) se deduce la igualdad (11.43). El teorema está demostrado.

Definición 2. *Un operador arbitrario A que actúa de H en H se denomina autoconjugado, si para A existe un operador conjugado A^* coincidente con el operador A* (es decir, para cualesquiera dos elementos x e y del espacio H se verifica una igualdad $(Ax, y) = (x, Ay)$).

Veamos de nuevo a título de ejemplo el operador integral (11.40) con cierta función $K(t, s)$ continua sobre el cuadrado $[a \leqslant t \leqslant b] \times \times [a \leqslant s \leqslant b]$ (dicha función $K(t, s)$ suele llamarse *núcleo* del operador integral (11.40)).

Cerciorémonos de que un operador integral A^*, definido por la igualdad

$$A^*x(t) = \int_a^b K(s, t)\, x(s)\, ds, \qquad (11.46)$$

será conjugado del operador A que se define mediante la igualdad (11.40). (Por $K(s, t)$ en (11.46) ha de entenderse la misma función que figura en (11.40), pero en (11.46), a diferencia de (11.40), esta función se integra respecto del primer argumento).

De (11.40) y (11.46) se deduce que para cualesquiera elementos

$x(t)$ e $y(t)$ del espácio $L^2[a, b]$ se verifican las igualdades

$$(Ax, y) = \int_a^b \left(\int_a^b K(t, s)\, x(s)\, ds \right) y(t)\, dt, \qquad (11.47)$$

$$(x, A^*y) = \int_a^b \left(\int_a^b K(t, s)\, y(t)\, dt \right) x(s)\, ds. \qquad (11.48)$$

Los segundos miembros de (11.47) y (11.48) se diferencian sólo en orden de integración respecto de las variables t y s, y, por esta razón, coinciden [1]). Por consiguiente, son coincidentes también los primeros miembros de las igualdades (11.47) y (11.48), lo que es precisamente un indicio de que el operador A^*, definido mediante la igualdad (11.46), es conjugado del operador A definido mediante la igualdad (11.40).

De las relaciones (11.40) y (11.46) se deduce que el operador integral A, definido mediante la igualdad (11.40), es autoconjugado, cuando, y sólo cuando, para todos los t y s de $[a, b]$ se verifica la igualdad $K(t, s) = K(s, t)$. El núcleo $K(t, s)$ que satisface la igualdad mencionada se denomina *simétrico*.

Demostremos ahora la siguiente afirmación.

Teorema 11.11. *La norma $\| A \|$ de un operador continuo lineal autoconjugado A representa la cota superior exacta de la magnitud $|(Ax, x)|$ sobre un conjunto de todos los elementos x del espacio H. que tienen norma igual a la unidad, es decir, la norma de A se determina por la igualdad*

$$\| A \| = \sup_{\substack{\|x\|=1 \\ x \in H}} |(Ax, x)|. \qquad (11.49)$$

DEMOSTRACION. Denotemos con μ la magnitud que figura en el segundo miembro de (11.49) (la existencia de la citada cota superior exacta no causa dudas algunas). Con el fin de demostrar que $\mu = \| A \|$, basta probar dos desigualdades $\mu \leqslant \| A \|$ y $\mu \geqslant \| A \|$.

La primera de estas desigualdades se deduce inmediatamente de lo que, en virtud de la definición de norma y de la desigualdad de Cauchy—Buniakovski, para todos los elementos x del espacio H, para los cuales $\| x \| = 1$, se tiene

$$|(Ax, x)| \leqslant \| Ax \| \cdot \| x \| = \| Ax \| \leqslant \| A \|.$$

[1]) En efecto, para las funciones continuas $x(t)$ e $y(t)$ la equivalencia de los segundos miembros en (11.47) y (11.48) es obvia. Mas, en virtud del teorema 11.4 y de la desigualdad de Cauchy — Buniakovski, la igualdad mencionada será en este caso válida también para los elementos arbitrarios $x(t)$ e $y(t)$ del espacio $L^2[a, b]$.

Resta por demostrar que $\mu \geqslant \| A \|$. Por cuanto el operador A es lineal, para cada elemento x del espacio H se cumple una desigualdad [1])

$$| (Ax, x) | \leqslant \mu \cdot \| x \|^2. \tag{11.50}$$

Ahora, de los axiomas del producto escalar y de lo que el operador lineal A es autoconjugado (es decir, de la igualdad $(Ax, y) = (x, Ay)$) proviene que para cualesquiera dos elementos x e y del espacio H se verifica la igualdad

$$4 (Ax, y) = (A (x + y), x + y) - (A (x - y), x - y).$$

De esta igualdad y de (11.50) se deduce que

$$4 \, | (Ax, y) | \leqslant \mu \cdot \| x + y \|^2 + \mu \| x - y^2 \| = \\ = 2\mu (\| x \|^2 + \| y \|^2).$$

De la última desigualdad proviene que para los elementos arbitrarios x e y del espacio H, para los cuales $\| x \| = \| y \| = 1$,

$$| (Ax, y) | \leqslant \mu. \tag{11.51}$$

Al poner en (11.51) $y = Ax/\| Ax \|$, llegamos a que para todos los elementos x, para los cuales $\| x \| = 1$, se cumple la desigualdad $(Ax, Ax)/ \| Ax \| \leqslant \mu$, y, por lo tanto, también la desigualdad $\| Ax \| \leqslant \mu$. De este modo, $\| A \| \leqslant \mu$. El teorema queda demostrado.

3. Concepto de operador totalmente continuo.

Definición. *Un operador A que actúa de H en H se denomina totalmente continuo, si aplica todo conjunto acotado (en norma) de elementos de H en un conjunto compacto.*

En otras palabras, el operador A se llama totalmente continuo, si para cualquier sucesión $\{x_n\}$ de elementos de H de tal índole que $\| x_n \| \leqslant C = \text{const}$, existe una subsucesión $\{x_{n_k}\}$ $(k = 1, 2, \ldots)$ tal que la correspondiente subsucesión $\{Ax_{n_k}\}$ converja en la norma de H.

Recordemos que el operador lineal A es continuo cuando, y sólo cuando, está acotado, es decir, cuando, y sólo cuando, todo conjunto acotado (en norma de H) se aplica por él en un conjunto también acotado. Por cuanto un conjunto compacto es acotado [2]), todo operador totalmente continuo es continuo. Conviene, sin embargo, añadir que no todo operador lineal continuo es totalmente continuo. Por ejemplo, un operador idéntico E del tipo $Ex = x$ es continuo, pero no es

---

[1]) Pues, para todo elemento $x_0 = \frac{1}{\| x \|} \cdot x$, cuya norma es igual a la unidad, se cumple la desigualdad $| (Ax_0, x_0) | \leqslant \mu$.

[2]) Véase p. 3, § 1.

totalmente continuo: basta ver la aplicación de un conjunto acotado que no es compacto. Demostremos el siguiente lema.

Lema. *Sea A un operador lineal totalmente continuo que actúa de H en H. Supongamos, además, que $\{x_n\}$ es una sucesión arbitraria de elementos de H que es débilmente convergente hacia un elemento x_0 y de tal índole que $\| x_n \| = 1$, cualquiera que sea el número n. Entonces, la sucesión $\{Ax_n\}$ converge hacia el elemento Ax_0 en la norma de H.*

DEMOSTRACIÓN. Por cuanto el operador A es lineal y totalmente continuo [1]), existe, de acuerdo con el punto anterior, un operador conjugado A^*, y para todo elemento x_n y un elemento arbitrario y se verifica la igualdad $(Ax_n, y) = (x_n, A^*y)$. De esta igualdad y de la convergencia débil de $\{x_n\}$ hacia x_0 llegamos a una deducción de que, cuando $n \to \infty$, para cada elemento y del espacio H tenemos: $(Ax_n, y) \to (x_0, A^*y) = (Ax_0, y)$, lo que significa la convergencia débil de la sucesión $\{Ax_n\}$ hacia el elemento Ax_0.

Demostremos, ahora, que la sucesión $\{Ax_n\}$ también converge hacia Ax_0 en la norma de H.

Supongamos que $\{Ax_n\}$ no converge hacia Ax_0 en la norma de H. Entonces, existe un $\varepsilon > 0$ tal que para cierta subsucesión de elementos $\{x_{m_k}\}$ $(k = 1, 2, \ldots)$ se cumpla una desigualdad

$$\| Ax_{m_k} - Ax_0 \| \geqslant \varepsilon. \tag{11.51'}$$

En vista de que el operador A es totalmente continuo y de que $\| x_n \| = 1$, en la sucesión $\{x_{m_k}\}$ puede elegirse una subsucesión $\{x_{n_p}\}$ $(p = 1, 2, \ldots)$ tal que la correspondiente subsucesión $\{Ax_{n_p}\}$ converja en la norma de H. Por cuanto, en virtud de lo demostrado más arriba, la subsucesión $\{Ax_{n_p}\}$ es débilmente convergente hacia el elemento Ax_0, la misma en la norma de H también converge hacia el elemento Ax_0. Mas, la desigualdad (11.51'), válida para todos los números m_k (y, con mayor razón, para todos los números n_p) contradice la deducción obtenida, lo que demuestra el lema.

OBSERVACIÓN. *El lema demostrado es un corolario de una afirmación más general: un operador A que actúa de H en H es totalmente continuo, cuando, y sólo cuando, aplica cualquier sucesión débilmente convergente $\{x_n\}$ de elementos de H en la sucesión $\{Ax_n\}$ convergente en la norma de H.*

Se omite aquí la demostración de esta afirmación.

Cerciorémonos ahora de que el operador integral A definido mediante la igualdad (11.40) (con el núcleo $K(t, s)$ continuo dentro del cuadrado $[a \leqslant t \leqslant b] \times [a \leqslant s \leqslant t]$) es totalmente continuo.

Sea $\{x_n(t)\}$ una sucesión arbitraria de elementos de $L^2[a, b]$, acotada en la norma de $L^2[a, b]$, es decir tal que para todo número n se tiene

$$\| x_n(t) \| \leqslant C. \tag{11.52}$$

[1]) Y, por consiguiente, continuo.

Es suficiente mostrar que la correspondiente sucesión de funciones $y_n(t) = Ax_n(t)$ es uniformemente acotada y equicontinua sobre $[a, b]$. (Entonces, en virtud del teorema de Arzelà 1.12, en esta sucesión puede elegirse una subsucesión que sea convergente uniformemente sobre $[a, b]$ y, con mayor razón, en la norma de $L^2[a, b]$). De (11.52) y de la desigualdad de Cauchy—Buniakovski se deduce la desigualdad

$$|y_n(t)| = \left| \int_a^b K(t, s)\, x_n(s)\, ds \right| \leqslant \left[\int_a^b K^2(t, s)\, ds \right]^{1/2} \cdot \|x_n\|,$$

la cual demuestra que en $[a, b]$ la sucesión $\{y_n(t)\}$ es uniformemente acotada [1]).

Notemos ahora que de la continuidad y de la continuidad uniforme (que proviene de la primera) del núcleo $K(t, s)$ sobre el cuadrado $[a \leqslant t \leqslant b] \times [a \leqslant s \leqslant b]$ se deduce que para un $\varepsilon > 0$ *arbitrario* existe tal $\delta > 0$ que

$$|K(t_1, s) - K(t_2, s)| < \frac{\varepsilon}{C\sqrt{b-a}} \tag{11.53}$$

con todo s de $[a, b]$ y todos los t_1 y t_2 de $[a, b]$ de tal índole que $|t_1 - t_2| < \delta$.

De (11.52) y (11.53) y de la desigualdad de Cauchy-Buniakovski obtendremos que

$$|y_n(t_2) - y_n(t_1)| \leqslant \int_a^b |K(t_2, s) - K(t_1, s)| \cdot |x_n(s)|\, ds \leqslant$$

$$\leqslant \frac{\varepsilon}{C\sqrt{b-a}} \int_a^b |x_n(s)|\, ds \leqslant \frac{\varepsilon}{C\sqrt{b-a}} \cdot \|x_n\| \cdot \sqrt{\int_a^b ds} = \varepsilon$$

para todos los t_1 y t_2 de $[a, b]$ tales que $|t_1 - t_2| < \delta$.

La última desigualdad demuestra la equicontinuidad de la sucesión $\{y_n(t)\}$ sobre $[a, b]$ y da por terminado, en virtud de lo dicho más arriba, la demostración de lo que el operador (11.40) es totalmente continuo.

4. Existencia de los valores propios de un operador autoconjugado lineal totalmente continuo.

Definición. *Un número real λ se llama valor propio del operador A, si existe un elemento no nulo del espacio H que satisface la condición $Ax = \lambda x$.*

El citado elemento x se llama en este caso elemento propio del operador A correspondiente al valor propio λ.

---

[1]) Basta notar que el núcleo $K(t, s)$ es continuo sobre el cuadrado $[a \leqslant t \leqslant b] \times [a \leqslant s \leqslant b]$.

Si el operador A es lineal, de la condición de que x es un elemento propio de A correspondiente al valor propio λ se deduce que, cualquiera que sea un número real α distinto de cero, un elemento αx será también elemento propio de A correspondiente al valor propio λ. Por eso, todos los elementos propios del operador lineal A se consideran, naturalmente, *normalizados*, es decir, satisfacen la condición $\| x \| = 1$.

La importancia del concepto de elementos propios radica en lo que la actuación de un operador sobre ellss se reduce a la multiplicación por cierta constante λ.

No todo operador A cuenta con los valores propios [1]).

Demostremos el siguiente teorema *fundamental*.

***Teorema* 11.12.** *Todo operador lineal autoconjugado totalmente continuo A tiene por lo menos un valor propio λ que satisface la condición $| \lambda | = \| A \|$. Entre todos los valores propios del operador A el citado valor propio es mayor en módulo.*

DEMOSTRACIÓN. Denotemos con M y m las cotas exactas superior e inferior, respectivamente, de un producto escalar (Ax, x) sobre un conjunto de todos los elementos x del espacio H que satisfacen la condición $\| x \| = 1$, es decir, pongamos

$$M = \sup_{\substack{\|x\|=1 \\ x\in H}} (Ax, x), \quad m = \inf_{\substack{\|x\|=1 \\ x\in H}} (Ax, x). \tag{11.54}$$

---

[1]) Por ejemplo, el operador integral (11.40) no tiene ningún valor propio cuando $a = 0$, $b = \pi$. $K(x, s) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} 2^{-n} \operatorname{sen}(n+1)x \operatorname{sen} ns$. En efecto, sea $\varphi(x)$ un elemento arbitrario de $L^2[0, \pi]$, para el cual $\int\limits_0^{\pi} K(x, s)\, \varphi(s)\, ds = \lambda\varphi(x)$, y sean $\{b_n\}$ los coeficientes de Fourier en el desarrollo de $\varphi(x)$ según un sistema $\left\{\dfrac{\sqrt{2} \operatorname{sen} nx}{\sqrt{\pi}}\right\}$ *completo* y ortonormalizado sobre $[0, \pi]$. Si $\lambda = 0$, entonces, en vista de la igualdad generalizada de Parseval tenemos $\sum\limits_{n=1}^{\infty} 2^{-n} b_n \times \operatorname{sen}(n+1)x = 0$, de donde proviene que todos los $b_n = 0$ y $\varphi(x) = 0$. En cambio, si $\lambda \neq 0$, de la igualdad $\int\limits_0^{\pi} K(x, s)\, \varphi(s)\, ds = \lambda\varphi(x)$ y de las propiedades del núcleo $K(x, s)$, que aseguran la convergencia uniforme de la serie de Fourier de la función $\varphi(x)$, obtenemos que $\sum\limits_{n=1}^{\infty} 2^{-n} b_n \operatorname{sen}(n+1)x = \lambda \sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n \operatorname{sen} nx$. Por cuanto $\lambda \neq 0$, de la última igualdad se deduce que $b_n = 0$ y $\varphi(x) = 0$.

Para concretar, vamos a examinar el caso de $|M| > |m|$ (el caso de $|M| \leqslant |m|$ se analiza de un modo sumamente igual).

Por cuanto $|M| > |m|$, tenemos $M > 0$. Demostremos que el número $\lambda = M$ es un valor propio del operador A.

Por definición de la cota superior exacta, existe una sucesión $\{x_n\}$ de elementos de H tal que $(Ax_n, x_n) \to \lambda$, y $\| x_n \| = 1$. Por cuanto la sucesión $\{x_n\}$ es acotada (en la norma de H), se encontrará, en virtud del teorema de compacticidad débil de cualquier conjunto infinito acotado (en la norma de H), una subsucesión de la sucesión $\{x_n\}$ que converja débilmente hacia un elemento x_0 del espacio H. Enumeremos esta subsucesión de nuevo, es decir, otra vez designémosla con $\{x_n\}$. Así pues, $\{x_n\}$ converge débilmente hacia el elemento x_0 del espacio H. Mas, en este caso (en virtud del lema mencionado en el punto anterior) la sucesión $\{Ax_n\}$ converge hacia Ax_0 en la norma de H.

Siendo el operador A autoconjugado, resulta válida la igualdad $(Ax_n, x_0) = (x_n, Ax_0)$, de la cual proviene una relación

$$(Ax_n, x_n) - (Ax_0, x_0) = (A(x_n - x_0), (x_n + x_0)). \tag{11.55}$$

Aplicando la desigualdad de Cauchy—Buniakovski, obtenemos de (11.55)

$$|(Ax_n, x_n) - (Ax_0, x_0)| \leqslant \| x_n + x_0 \| \cdot \| Ax_n - Ax_0 \| \to 0$$

(pues, la sucesión $\{Ax_n\}$ converge hacia Ax_0 en la norma de H, y $\| x_n \| = 1$).

Hemos demostrado de este modo que

$$(Ax_n, x_n) \to (Ax_0, x_0). \tag{11.56}$$

De (11.56) y de lo que $(Ax_n, x_n) \to \lambda$ se deduce que

$$(Ax_0, x_0) = \lambda. \tag{11.57}$$

Cerciorémonos ahora de que $\| x_0 \| = 1$. En virtud de la desigualdad de Cauchy—Buniakovski, para cualquier elemento y se cumple la desigualdad $|(x_n, y)| \leqslant \| x_n \| \cdot \| y \| = \| y \|$. Pasando en esta desigualdad al límite para $n \to \infty$, y teniendo presente la convergencia débil de $\{x_n\}$ hacia x_0, obtenemos que $|(x_0, y)| \leqslant \| y \|$ (para todo elemento y). De la última desigualdad obtenemos para $y = x_0$ que $\| x_0 \| \leqslant 1$. Con el fin de demostrar que $\| x_0 \| = 1$, basta cerciorarse de que la suposición sobre el cumplimiento de la desigualdad $0 < \| x_0 \| < 1$ lleva a una contradicción.

Sea $0 < \| x_0 \| < 1$. Pongamos $y_0 = x_0 / \| x_0 \|$. Entonces, $\| y_0 \| = 1$, y, en virtud de que el operador es lineal, tenemos, tomando en consideración las relaciones (11.57):

$$(Ay_0, y_0) = \frac{1}{\| x_0 \|^2} (Ax_0, x_0) = \frac{\lambda}{\| x_0 \|^2} > \lambda,$$

lo que contradice (11.54), puesto que $\lambda = M$. Así pues, $\| x_0 \| = 1$.

Demostremos ahora que x_0 es un elemento propio correspondiente al valor propio λ.

Sirviéndonos de la definición de la norma de un elemento, de los axiomas del producto escalar, de la igualdad (11.57) y de la definición de la norma de un operador, tendremos

$$\| Ax_0 - \lambda x_0 \|^2 = (Ax_0 - \lambda x_0, Ax_0 - \lambda x_0) =$$
$$= \| Ax_0 \|^2 - 2\lambda (Ax_0, x_0) + \lambda^2 \| x_0 \|^2 = \| A \|^2 - \lambda^2.$$

En vista del teorema 11.11, el miembro derecho (y, por consiguiente, el izquierdo) de la última relación es nulo. Esto es precisamente un testimonio de que $Ax_0 = \lambda x_0$, es decir, significa que x_0 es elemento propio del operador A correspondiente al valor propio λ.

Cuando $|M| \leqslant |m|$, los razonamientos son análogos, pero se debe poner λ igual a m.

Resta por demostrar en adición que si existen otros valores propios, el valor propio λ, correspondiente a la condición $|\lambda| = \|A\|$, será entre ellos mayor en módulo. Sea λ_1 algún otro valor propio y sea x_1, un elemento propio normalizado que corresponde a λ_1. Entonces, $Ax_1 = \lambda_1 x_1$, y, por lo tanto, $(Ax_1, x_1) = \lambda_1$. En este caso, de la relación [1])

$$|\lambda| = \sup_{\substack{\|x\|=1 \\ x \in H}} |(Ax, x)|$$

se deduce directamente que $|\lambda| \geqslant |\lambda_1|$.

El teorema está completamente demostrado.

Examinemos, con ayuda del teorema demostrado, la así llamada *ecuación integral de Fredholm de segunda especie*, es decir, una relación

$$x(t) = \mu \int_a^b K(t, s)\, x(s)\, ds, \tag{11.58}$$

de la cual se determinan, para el núcleo dado $K(t, s)$, una función $x(t)$, distinta de cero idéntico, y aquellos valores del parámetro numérico μ, para los cuales tal función existe. Los valores del parámetro numérico μ, para los cuales existen las soluciones $x(t)$ (distintas de cero idéntico) de ecuación integral (11.58), se denominan *valores propios* de esta ecuación. Toda solución no nula de la ecuación (11.58), correspondiente al valor propio dado, recibe el nombre de *función propia* de la misma ecuación.

Las magnitudes, inversas de los valores propios de la ecuación integral (11.58), suelen llamarse *números característicos* de la citada ecuación.

---

[1]) Esta relación proviene de (11.54) y de lo que $\lambda = M$ cuando $|M| > |m|$, y $\lambda = m$, cuando $|M| \leqslant |m|$.

Es evidente que si introducimos en el análisis el operador integral A, definido mediante la igualdad (11.40), los valores propios de este operador A serán números característicos de la ecuación integral (11.58) y los elementos propios del operador A, correspondientes a estos valores propios, serán funciones propias de la ecuación integral (11.58).

En los pp. 1—3 se ha demostrado que si el núcleo $K(t, s)$ es continuo en el cuadrado $[a \leqslant t \leqslant b] \times [a \leqslant s \leqslant b]$ y simétrico, el operador (11.40) es autoconjugado lineal y totalmente continuo.

Según el teorema 11.12, la ecuación integral (11.58) con tal núcleo $K(t, s)$ tiene por lo menos un número característico. Para que la ecuación integral mencionada tuviera por lo menos un solo *valor propio*, se debe exigir que la misma tuviera al menos un número característico *distinto de cero*, para lo cual a la exigencia de continuidad y simetría del núcleo $K(t, s)$ se debe añadir una condición de que el núcleo $K(t, s)$ no se reduzca a cero idéntico [1]).

Así pues, llegamos a la siguiente *afirmación* fundamental: *si el núcleo $K(t, s)$ de una ecuación integral de Fredholm de segunda especie* (11.58) *es continuo en el cuadrado $[a \leqslant t \leqslant b] \times [a \leqslant s \leqslant b]$, simétrico y no es igual idénticamente a cero, dicha ecuación tiene por lo menos un solo valor propio.*

OBSERVACIÓN. Se podría demostrar que la afirmación enunciada es válida también en un caso cuando la exigencia de continuidad del núcleo $K(t, s)$ sobre el cuadrado $[a \leqslant t \leqslant b] \times [a \leqslant s \leqslant b]$ se sustituye por una exigencia más débil de existencia de la integral finita

$$\int_a^b \int_a^b K^2(t, s)\, dt\, ds.$$

(Basta cerciorarse de que al cumplirse esta exigencia más débil, el operador integral (11.40) que actúa de $L^2[a, b]$ en $L^2(a, b]$ sigue siendo totalmente continuo).

5. Propiedades principales de los valores propios y elementos propios de un operador autoconjugado lineal totalmente continuo. En conclusión aclaremos las propiedades principales de los valores propios y de los elementos propios de un operador autoconjugado lineal totalmente continuo que actúa de H en H.

---

[1]) La condición de que el núcleo continuo $K(t, s)$ no se reduzca a cero idéntico, es necesaria y suficiente para que el operador integral A, definido mediante la igualdad (11.40), tenga valores propios *no nulos*. En efecto, en virtud del teorema 11.12, $\| A \| = | \lambda |$, donde λ es el valor propio del operador A mayor en módulo, de suerte que basta demostrar que $\| A \| = 0$ cuando, y sólo cuando, $K(t, s)$ no es idénticamente igual a cero. Si $K(t, s) \equiv 0$, se pone claro que $\| A \| = 0$. Viceversa, si $\| A \| = 0$, el operador A, definido por la igualdad (11.40), aplica todos los elementos no nulos del espacio $L^2[a, b]$ en un elemento nulo, y, en particular, aplica en cero idéntico todos los elementos de $\{x_n(t)\}$ de cierto sistema ortonormalizado *completo* en $L^2[a, b]$. Mas, esto significa precisamente que $K(t, s) \equiv 0$.

1°. *Los elementos propios x_1 y x_2, correspondientes a dos valores propios diferentes λ_1 y λ_2, son ortogonales.*

En efecto, en virtud de las propiedades del producto escalar, de las igualdades $Ax_1 = \lambda_1 x_1$, $Ax_2 = \lambda_2 x_2$ y de la propiedad de autoconjugación del operador A, obtendremos

$$(\lambda_1 - \lambda_2)(x_1, x_2) = (\lambda_1 x_1, x_2) - (x_1, \lambda_2 x_2) = (Ax_1, x_2) - (x_1, Ax_2) = 0.$$

Por cuanto $\lambda_1 \neq \lambda_2$, de la igualdad obtenida proviene que $(x_1, x) = 0$.

2°. A un mismo valor propio λ le pueden corresponder unos cuantos elementos propios del operador A. Demostremos, sin embargo, que *a cualquier valor propio no nulo λ le puede corresponder sólo un número finito de elementos propios linealmente independientes* [1]).

Supongamos que a cierto $\lambda \neq 0$ le corresponde un número infinito de elementos propios linealmente independientes. Realizando el proceso de ortogonalización y normalización de estos elementos, obtendremos un sistema ortonormalizado infinito $\{x_n\}$ de elementos del espacio H, cada uno de los cuales es elemento propio del operador A que corresponde al valor propio $\lambda \neq 0$. Como para cualquier elemento y del espacio H es válida la desigualdad de Bessel $\sum_{n=1}^{\infty} (x_n, y)^2 \leqslant \leqslant \| y \|^2$, resulta que $\lim_{n\to\infty} (x_n, y) = 0 = (0, y)$ es decir, la sucesión de elementos propios $\{x_n\}$ es débilmente convergente al elemento nulo 0. Mas, en este caso, de la condición de continuidad total del operador A y del lema del p. 3 se desprende que la correspondiente sucesión $\{Ax_n\}$ converge en la norma de H hacia un elemento $A0 = 0$. En virtud de la relación $Ax_n = \lambda x_n$, llegamos a que $|\lambda| = \| Ax_n \| \to 0$ (cuando $n \to \infty$), y esto significa precisamente que $|\lambda| = 0$, lo que contradice la condición de que $\lambda \neq 0$. La contradicción obtenida es indicio de que a todo $\lambda \neq 0$ puede corresponder sólo un número finito de elementos propios.

Los razonamientos aducidos señalan también que *todos los elementos propios* (tanto los que corresponden a un mismo valor propio λ, como también los que corresponden a diferentes λ) *pueden considerarse ortogonales de dos en dos y sus normas son iguales a la unidad.*

3°. Demostremos ahora que *si el operador A cuenta con una infinidad de valores propios, cualquier sucesión $\{\lambda_n\}$ seleccionada de los valores propios es infinitamente pequeña.*

Sea $\{\lambda_n\}$ una sucesión de valores propios y sea $\{x_n\}$, la sucesión correspondiente de elementos propios, la cual puede considerarse or-

---

[1]) Al valor propio no nulo $\lambda = 0$ le puede corresponder también un número infinito de elementos propios. Por ejemplo, para el operador integral (11.40) con el núcleo $K(t, s)$ idénticamente igual a cero, cada elemento de cierto sistema ortonormalizado $\{x_n(t)\}$ de elementos de $L^2[a, b]$ es elemento propio correspondiente al valor propio de $\lambda = 0$.

tonormalizada en virtud de los razonamientos aducidos al demostrar la propiedad 2°. Escribiendo para todo elemento y del espacio H la desigualdad de Bessel respecto del sistema $\{x_n\}$, nos cercioramos de que la sucesión $\{x_n\}$ es débilmente convergente hacia el elemento cero. Por cuanto el operador A es totalmente continuo, del lema 3 se desprende que una sucesión $\{Ax_n\}$ converge hacia el elemento cero en la norma de H. Mas, en este caso, la igualdad $Ax_n = \lambda_n x_n$ lleva consigo una relación

$$|\lambda_n| = \|Ax_n\| \to 0 \quad (\text{cuando } n \to \infty).$$

La propiedad demostrada permite afirmar que *los valores propios de un operador autoconjugado lineal totalmente continuo no tienen en el eje numérico, a excepción del punto cero, otros puntos límites* [1]).

Esto significa que *todos los valores propios pueden ser numerados en el orden en que sus módulos no crecen, de suerte que se cumplirán las desigualdades*

$$|\lambda_1| \geqslant |\lambda_2| \geqslant |\lambda_3| \geqslant \ldots \geqslant |\lambda_n| \geqslant \ldots,$$

con la particularidad de que $|\lambda_n| \to 0$, cuando $n \to \infty$.

En particular, todas las propiedades establecidas son válidas para las funciones propias y los números característicos de la ecuación de Fredholm de segunda especie (11.58) con el núcleo $K(t, s)$ continuo sobre un cuadrado $[a \leqslant t \leqslant b] \times [a \leqslant s \leqslant b]$.

---

[1]) Cualquiera que sea $\varepsilon > 0$, fuera del intervalo $(-\varepsilon, \varepsilon)$ puede disponerse sólo un número finito de valores propios.

Capítulo 12

FUNDAMENTOS DE LA TEORÍA DE LAS CURVAS Y SUPERFICIES

En este capítulo se dará una información referente a las curvas y superficies que es de gran importancia para las aplicaciones.

§ 1. Funciones vectoriales

1. Concepto de función vectorial [1]). Introduzcamos el concepto de función vectorial de m variables.

Si a todo punto M de un conjunto $\{M\}$ de puntos del espacio euclídeo m-dimensional E^m se le pone en correspondencia, de acuerdo con una ley determinada, cierto vector $\boldsymbol{r}$ [2]), *se dice que sobre el conjunto $\{M\}$ está definida una función vectorial* $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(M)$. En este caso el conjunto $\{M\}$ se llama *dominio de definición de la función* $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(M)$. Si $p = m$, se dice (al igual que en el caso de $m = 2$ ó $m = 3$ (véase p. 1, § 2, cap. 6)) que sobre el conjunto $\{M\}$ está dado un campo vectorial definido mediante la función vectorial $\boldsymbol{r}(M)$.

El vector $\boldsymbol{r}(M)$, correspondiente al punto dado M del conjunto $\{M\}$, se llamará *valor particular de la función vectorial en el punto M*. Una totalidad de todos los valores particulares de la función $\boldsymbol{r}(M)$ se denomina *conjunto de valores* de esta función.

Si $\{M\}$ es un conjunto de puntos en la recta dada, y $\{u\}$, el conjunto de coordenadas de estos puntos, la función vectorial $\boldsymbol{r}(M)$ puede considerarse, evidentemente, como función vectorial de una variable escalar u:

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(u).$$

En cambio, si $\{M\}$ es un conjunto de puntos de un espacio m-dimensional, y si $(u_1, u_2, \ldots, u_m)$ son las coordenadas del punto M, entonces $\boldsymbol{r}(M)$ representa una función vectorial de argumentos escalares $u_1, u_2, \ldots, u_m$:

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(u_1, u_2, \ldots, u_m).$$

OBSERVACIÓN. Supongamos que $\{r_1, r_2, \ldots, r_p\}$ son coordenadas del vector $\boldsymbol{r}(M)$. Es evidente que definir una función vectorial $\boldsymbol{r}(M)$ es lo mismo que definir p funciones escalares $r_1(M), r_2(M), \ldots, r_p(M)$.

---

[1]) Algunos datos sobre las funciones vectoriales se han dado en p. 6, § 1, cap. 5, v. I).

[2]) El vector $\boldsymbol{r}$ pertenece, en el caso general, al espacio euclídeo p-dimensional E^p, por eso se define por p coordenadas $r_1, r_2, \ldots, r$.

Admitamos que los vectores $\boldsymbol{r}(M)$ pertenecen al espacio euclídeo E^p. Convengamos en considerar que los orígenes de todos estos vectores coinciden con el origen de un sistema cartesiano de coordenadas elegido en E^p. En este caso un conjunto puntual de extremos de los vectores $\boldsymbol{r}(M)$ se denomina *hodógrafo* de la función $\boldsymbol{r}(M)$. El hodógrafo de la función vectorial de una sola variable escalar es, en el caso general, una línea. El hodógrafo de una función de dos variables será, en el caso general, una superficie.

2. Valor límite de una función vectorial. Continuidad. Por analogía completa con las funciones corrientes, para las funciones vectoriales se introducen los conceptos de valor límite y de continuidad.

Una sucesión $\{\boldsymbol{a}_n\}$ se llama convergente hacia un vector $\boldsymbol{a}$, si para cualquier $\varepsilon > 0$ puede indicarse tal número N, que con $n \geqslant N$ se cumple una desigualdad [1])

$$|\boldsymbol{a}_n - \boldsymbol{a}| < \varepsilon.$$

El vector $\boldsymbol{a}$ se denomina límite de la sucesión $\{\boldsymbol{a}_n\}$.

En la forma simbólica la existencia del límite $\boldsymbol{a}$ de la sucesión $\{\boldsymbol{a}_n\}$ se escribe de una manera siguiente:

$$\lim_{n\to\infty} \boldsymbol{a}_n = \boldsymbol{a}.$$

OBSERVACIÓN. Si $\{a_{1n}, a_{2n}, \ldots, a_{pn}\}$ y $\{a_1, a_2, \ldots, a_p\}$ son, respectivamente, las coordenadas de los vectores $\boldsymbol{a}_n$ y $\boldsymbol{a}$, de la convergencia de la sucesión $\{\boldsymbol{a}_n\}$ hacia $\boldsymbol{a}$ se deduce la convergencia de las sucesiones numéricas $\{a_{1n}\}, \{a_{2n}\}, \ldots, \{a_{pn}\}$ hacia los números $a_1, a_2, \ldots, a_p$, respectivamente. Indiquemos, además, que de la convergencia de las citadas sucesiones numéricas hacia los números respectivos $a_1, a_2, \ldots, a_p$ proviene la convergencia de la sucesión $\{\boldsymbol{a}_n\}$ de vectores con las coordenadas $\{a_{1n}, a_{2n}, \ldots, a_{pn}\}$ hacia el vector $\boldsymbol{a}$ con las coordenadas $\{a_1, a_2, \ldots, a_p\}$. La validez de la observación se deduce de las siguientes desigualdades obvias [2]):

$$|a_{kn} - a_k| \leqslant |\boldsymbol{a}_n - \boldsymbol{a}| \leqslant |a_{1n} - a_1| + \\ + |a_{2n} - a_2| + \ldots + |a_{pn} - a_p|.$$

Veamos una función vectorial $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(M)$ definida sobre el conjunto $\{M\}$ de puntos de un espacio euclídeo m-dimensional y un punto A, el cual, quizás no pertenece al conjunto $\{M\}$, pero posee una propiedad de que en cualquier entorno de este punto se contiene por lo menos un solo punto del conjunto $\{M\}$, que sea distinto de A.

Definición 1. *Un vector $\boldsymbol{b}$ se llama valor límite de la función vectorial $\boldsymbol{r}(M)$ en el punto A (o bien, límite de $\boldsymbol{r}(M)$ para $M \to A$),*

[1]) Se llama *módulo* $|\boldsymbol{a}|$ del vector $\boldsymbol{a}$ con las coordenadas $\{a_1, a_2, \ldots, a_p\}$ a un número $\sqrt{a_1^2 + a_2^2 \ldots + a_p^2}$.

[2]) El vector $\boldsymbol{a}_n - \boldsymbol{a}$ tiene por coordenadas $\{a_{1n} - a_1, a_{2n} - a_2, \ldots, a_{pn} - a_p\}$.

si para toda sucesión $M_1, M_2, \ldots, M_n \ldots$ de puntos del conjunto $\{M\}$ convergente hacia A, cuyos elementos M_n son distintos de A [1]) ($M_n \neq A$), la sucesión correspondiente $\boldsymbol{r}(M_1)$, $\boldsymbol{r}(M_2), \ldots$, $\boldsymbol{r}(M_n) \ldots$ de valores de la función $\boldsymbol{r}(M)$ converge hacia el vector $\boldsymbol{b}$.

Para denotar el valor límite $\boldsymbol{b}$ de la función $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(M)$ en el punto A se usa el siguiente símbolo:

$$\lim_{M \to A} \boldsymbol{r}(M) = \boldsymbol{b}, \text{ o bien } \lim_{\substack{u_1 \to a_1 \\ u_2 \to a_2 \\ \cdots \\ u_m \to a_m}} \boldsymbol{r}(u_1, u_2, \ldots, u_m) = \boldsymbol{b},$$

donde $a_1, a_2, \ldots, a_m$ son coordenadas del punto A.

No ofrecemos aquí la definición de valor límite de una función vectorial en el lenguaje de «$\varepsilon - \delta$», como tampoco para el caso en que el punto M tiende hacia el infinito. Estas definiciones se enuncian por analogía completa con las definiciones correspondientes para las funciones escalares.

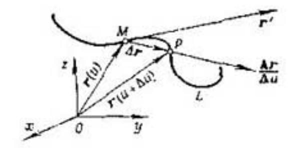


Fig. 12.1.

Supongamos que el punto A pertenece a un dominio de definición de la función vectorial $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(M)$ y cualquier entorno de este punto contiene los puntos del dominio de definición de la función distintos de A.

Definición 2. *La función vectorial $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(M)$ se llama continua en el punto A, si el valor límite de esta función en A existe y es igual al valor particular $\boldsymbol{r}(A)$.*

Una función vectorial $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(A)$ se llama continua sobre el conjunto $\{M\}$, si es continua en todo punto de este conjunto.

3. Derivada de una función vectorial. En el § 1 cap. 5, v. I de este curso se trataba la derivada de una función vectorial de una sola variable escalar. Enunciemos este concepto una vez más.

Sea $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(u)$ una función vectorial de la variable escalar u. Fijemos un valor u del argumento y le daremos al argumento u tal incremento arbitrario $\Delta u \neq 0$, que la magnitud $u + \Delta u$ pertenezca al dominio de definición de la función. Examinemos un vector

$$\Delta \boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(u + \Delta u) - \boldsymbol{r}(u).$$

En la fig. 12.1 este vector coincide con el vector $\overline{MP}$. Al multiplicar el vector $\Delta \boldsymbol{r}$ por el número $1/\Delta u$, obtendremos un vector nuevo

$$\frac{\Delta \boldsymbol{r}}{\Delta u} = \frac{1}{\Delta u}\{\boldsymbol{r}(u + \Delta u) - \boldsymbol{r}(u)\}, \tag{12.1}$$

[1]) Esta exigencia se debe, en particular, a que la función $\boldsymbol{r}(M)$ puede ser no definida en el punto A.

colineal con el antiguo. El vector (12.1) representa la velocidad media de variación de la función vectorial sobre el segmento $[u, u+\Delta u]$.

El límite de la relación en diferencias (12.1) (si existe) *para* $\Delta u \to 0$ *recibe el nombre de derivada de la función vectorial* $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(u)$ *en un punto fijo dado.*

La derivada de una función vectorial se denota con el símbolo $\boldsymbol{r}'(u)$ ó $\frac{d\boldsymbol{r}}{du}$.

Los razonamientos geométricos [1]) muestran que la derivada de una función vectorial $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(u)$ es un vector tangente al hodógrafo de esta función. Aclaremos cuál es la relación entre la derivada de la función vectorial y las derivadas de sus coordenadas. Limitémonos, para simplificar, a un caso cuando los valores $\boldsymbol{r}(u)$ de una función vectorial representan vectores de un espacio tridimensional. Sean $\{x(u), y(u), z(u)\}$ las coordenadas de la función vectorial $\boldsymbol{r}(u)$. Es evidente que las coordenadas de la relación en diferencias (12.1) serán

$$\frac{x(u+\Delta u)-x(u)}{\Delta u}, \quad \frac{y(u+\Delta u)-y(u)}{\Delta u}, \quad \frac{z(u+\Delta u)-z(u)}{\Delta u}.$$

De acuerdo con la Observación del p. 2 de este párrafo, las coordenadas de la derivada $\boldsymbol{r}'(u)$ son iguales a las derivadas $x'(u)$, $y'(u)$, $z'(u)$ de las coordenadas de la función $\boldsymbol{r}(u)$. Por eso, el cálculo de la derivada de una función vectorial se reduce al cálculo de las derivadas de sus coordenadas.

OBSERVACIÓN 1. Una función vectorial $\boldsymbol{r}(u)$ expresa la ley del movimiento de un punto material por el hodógrafo L de esta función, si la variable u se considera como el tiempo. Por eso, la derivada $\boldsymbol{r}'(u)$ es igual a la velocidad del movimiento de un punto a lo largo de L.

OBSERVACION 2. Notemos que las reglas de diferenciación de varios productos de las funciones vectoriales (escalar, vectorial, mixto) son idénticas a las reglas de diferenciación de los productos de funciones corrientes. Esto se deduce de lo que las coordenadas de la derivada de una función vectorial son iguales a las derivadas de las coordenadas de la propia función, como también de la expresión de los productos mencionados en términos de las coordenadas de los factores.

He aquí las reglas de diferenciación de los productos de funciones vectoriales:

$$\{\boldsymbol{r}(u)\,\boldsymbol{s}(u)\}' = \boldsymbol{r}'(u)\,\boldsymbol{s}(u) + \boldsymbol{r}(u)\,\boldsymbol{s}'(u),$$

$$\{[\boldsymbol{r}(u)\,\boldsymbol{s}(u)]\}' = [\boldsymbol{r}'(u)\,\boldsymbol{s}(u)] + [\boldsymbol{r}(u)\,\boldsymbol{s}'(u)],$$

$$\{\boldsymbol{r}(u)\,\boldsymbol{s}(u)\,\boldsymbol{t}(u)\}' = \boldsymbol{r}'(u)\,\boldsymbol{s}(u)\,\boldsymbol{t}(u) + \boldsymbol{r}(u)\,\boldsymbol{s}'(u)\,\boldsymbol{t}(u) + \boldsymbol{r}(u)\,\boldsymbol{s}(u)\,\boldsymbol{t}'(u).$$

---

[1]) Estos razonamientos se confirman por la afirmación en el p. 2, § 2 de este capítulo.

Pasemos ahora al problema de diferenciación de las funciones vectoriales de varias variables escalares. Por cuanto en lo que sigue más abajo se emplearán funciones vectoriales de dos variables escalares u y v, limitémonos aquí precisamente a este caso concreto.

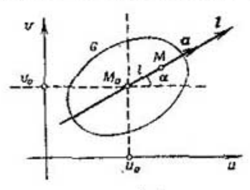


Fig. 12.2.

Supongamos que una función vectorial $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(u, v)$ está definida en cierto entorno G del punto M_0 (u_0, v_0) (fig. 12.2). Veamos en el plano (u, v) una dirección definida mediante el vector unidad $\boldsymbol{a}$ con las coordenadas $\cos\alpha$, $\operatorname{sen}\alpha$. Tracemos por el punto M_0 un eje $\boldsymbol{l}$ cuya orientación coincide con la dirección del vector $\boldsymbol{a}$, tomemos en este eje los puntos M (u, v) y denotemos con l la magnitud del segmento orientado M_0M del citado eje. Las coordenadas (u, v) del punto M se definen mediante las igualdades

$$u = u_0 + l\cos\alpha, \quad v = v_0 + l\operatorname{sen}\alpha.$$

En el eje mencionado $\boldsymbol{l}$ la función $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(u, v)$ será, evidentemente, función vectorial de una sola variable l. *Si esta función tiene en un punto $l = 0$ una derivada respecto de la variable l, dicha derivada se llama derivada según la dirección de **l** de la función $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(u, v)$ en el punto M_0 (u_0, v_0) y se denota con el símbolo $\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial \boldsymbol{l}}$.*

OBSERVACION 3. Si la orientación de $\boldsymbol{l}$ coincide con la dirección del eje coordenado u (del eje v) (en la fig. 12.2 estas direcciones se indican con líneas punteadas), la correspondiente derivada direccional se llama derivada parcial de la función vectorial $\boldsymbol{r}(u, v)$ y se denota con el símbolo $\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u}$ ó $\boldsymbol{r}_u$ $\left(\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial v}\right.$ ó $\left.\boldsymbol{r}_v\right)$. Si la derivada parcial $\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u}$ está definida en todos los puntos de cierto entorno del punto M (u, v), representa en dicho entorno una función vectorial. Esta última función puede tener, a su vez, una derivada parcial, por ejemplo, respecto del argumento u. Es natural que esta derivada parcial se llame segunda derivada parcial respecto del argumento u y se denote $\frac{\partial^2 \boldsymbol{r}}{\partial u^2}$ (o $\boldsymbol{r}_{uu}$). De un modo análogo se determinan otras derivadas parciales de diferente orden.

El sentido geométrico de la derivada direccional se pone claro de los siguientes razonamientos. El hodógrafo de una función vectorial $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(u, v)$ se representa, en general, por la superficie S (fig. 12.3). Cuando el punto M (u, v) se desplaza por el eje l, el extremo P del vector $\boldsymbol{r}(u, v)$ describe en la superficie S una línea L que puede considerarse como hodógrafo de la función vectorial de una sola varia-

ble l. Por eso, la derivada $\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial l}$ según la dirección de $\boldsymbol{l}$ representa un vector tangente a L en el punto P_0.

Si la dirección de $\boldsymbol{l}$ coincide con la del eje coordenado u, al desplazarse el punto M por el eje correspondiente que pasa por el punto M_0, el extremo del vector $\boldsymbol{r}$ (u, v) describe en la superficie S una línea llamada *línea coordenada* (esta línea en la fig. 12.3 se marca por una línea punteada). De este modo, la derivada parcial $\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u}$ representa un vector tangente a la línea coordenada u. La derivada parcial $\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial v}$ representa un vector tangente a la línea coordenada v.

4. Diferenciabilidad de una función vectorial. Llamemos *incremento* (o *incremento total*) de una función vectorial $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}$ (u, v) en

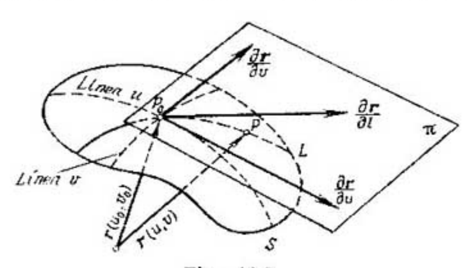


Fig. 12.3.

el punto M (u, v) (correspondiente a los incrementos Δu y Δv de los argumentos) a una expresión

$$\Delta \boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}\ (u + \Delta u, v + \Delta v) - \boldsymbol{r}\ (u, v).$$

Una función vectorial $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}$ (u, v) *se llama diferenciable en el punto* M (u, v), *si su incremento total en este punto puede ser representado en la forma*

$$\Delta \boldsymbol{r} = \boldsymbol{a}\Delta u + \boldsymbol{b}\Delta v + \boldsymbol{\alpha}\Delta u + \boldsymbol{\beta}\Delta v, \qquad (12.2)$$

donde $\boldsymbol{a}$ *y* $\boldsymbol{b}$ *son ciertos vectores, que no dependen de* Δu *y* Δv, *y* $\boldsymbol{\alpha}$ *y* $\boldsymbol{\beta}$ *son funciones vectoriales infinitamente pequeñas, para* $\Delta u \to 0$ *y* $\Delta v \to 0$ [1], *iguales a cero cuando* $\Delta v = \Delta u = 0$[2].

OBSERVACIÓN 1. Si una función vectorial $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}$ (u, v) es diferenciable en un punto M (u, v), entonces, evidentemente, los vectores

[1]) Una función vectorial $\boldsymbol{\alpha}$ $(\Delta u, \Delta v)$ se llama infinitamente pequeña, si su límite para $\Delta u \to 0$ y $\Delta v \to 0$ es igual a cero (al vector nulo).

[2]) No damos aquí la definición de diferenciabilidad de la función vectorial de una sola variable. Puede ser formulada por analogía completa con la definición correspondiente para las funciones escalares de una sola variable.

$\boldsymbol{a}$ y $\boldsymbol{b}$ son iguales, respectivamente, a las derivadas parciales $\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u}$ y $\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial v}$ en el punto dado.

OBSERVACIÓN 2. Supongamos que una función vectorial $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(u, v)$ es diferenciable en un punto $M(u, v)$ y $\boldsymbol{l}$ es cierto eje que pasa por M en el plano (u, v) y que forma con el eje u un ángulo α. Entonces, la derivada $\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial l}$ según la dirección de $\boldsymbol{l}$ existe y puede ser determinada de acuerdo con la fórmula

$$\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial l}=\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u}\cos\alpha+\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial v}\operatorname{sen}\alpha. \quad (12.3)$$

En efecto, para la dirección de $\boldsymbol{l}$ tenemos $\Delta u=l\cos\alpha$, $\Delta v=l\times$ sen α (fig. 12.4). Sustituyendo estos valores de Δu y Δv en la relación (12.2) y haciendo uso de la relación $\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial l}=\lim\limits_{l\to 0}\frac{\Delta \boldsymbol{r}}{l}$, nos convencemos de la validez de la fórmula (12.3).

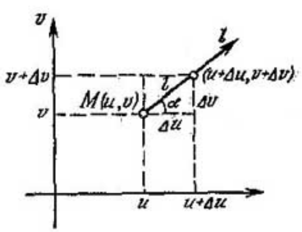


Fig. 12.4.

OBSERVACIÓN 3. Nos hemos convencido de que en el caso de diferenciabilidad de la función $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(u, v)$ es válida la fórmula (12.3). De esta fórmula se deduce que todos los vectores $\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial l}$ están dispuestos en el plano de los vectores $\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u}$ y $\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial v}$. Un plano que pasa por el punto del hodógrafo de la función $\boldsymbol{r}(u, v)$, correspondiente al punto $M(u, v)$ y paralelo a los vectores $\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u}$ y $\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial v}$, se llama, naturalmente, *plano tangente* a la superficie S que es un hodógrafo. En la fig. 12.3 el plano π representa un plano tangente a la superficie S en el *plano* P_0.

5. Fórmula de Taylor para las funciones vectoriales. La fórmula de Taylor para una función $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(u, v)$ con centro del desarrollo en el punto $M(u, v)$ y término residual en la forma de Peano tiene por expresión:

$$\boldsymbol{r}(u+\Delta u, v+\Delta v)=\boldsymbol{r}(u, v)+\frac{\partial \boldsymbol{r}(u, v)}{\partial u}\Delta u+\frac{\partial \boldsymbol{r}(u, v)}{\partial v}\Delta v+$$
$$+\frac{1}{2!}\left(\frac{\partial^2 \boldsymbol{r}(u, v)}{\partial u^2}\Delta u^2+2\frac{\partial^2 \boldsymbol{r}(u, v)}{\partial u\,\partial v}\Delta u\,\Delta v+\frac{\partial^2 \boldsymbol{r}(u, v)}{\partial v^2}\Delta v^2\right)+\ldots$$
$$\ldots+\frac{1}{n!}\left(\frac{\partial^2 \boldsymbol{r}(u, v)}{\partial u^n}\Delta u^n+n\frac{\partial^n \boldsymbol{r}(u, v)}{\partial u^{n-1}\partial v}\Delta u^{n-1}\Delta v+\ldots\right.$$
$$\left.\ldots+\frac{\partial^n \boldsymbol{r}(u, v)}{\partial v^n}\Delta v^n\right)+\boldsymbol{R}_n(\Delta u, \Delta v). \quad (12.4)$$

donde el término residual $\boldsymbol{R}_n(\Delta u, \Delta v)$ representa un vector cuyo orden de pequeñez es superior a ρ^n ($\rho = \sqrt{\Delta u^2 + \Delta v^2}$) [1]).

De lo que la fórmula (12.4) es válida podemos convencernos, representando cada una de las coordenadas del vector $\boldsymbol{r}(u, v)$ según la fórmula de Taylor con el término residual en forma de Peano y escribiendo a continuación la expresión para $\boldsymbol{r}(u + \Delta u, v + \Delta v)$ con ayuda del desarrollo según los vectores básicos (los coeficientes del desarrollo serán precisamente las coordenadas de este vector).

6. Integrales de las funciones vectoriales. Se ha constatado ya que una función vectorial se define por sus coordenadas que son unas funciones escalares. Esto nos permite extender al caso de las funciones vectoriales la operación de integración.

Supongamos, por ejemplo, que una función vectorial $\boldsymbol{r}(u)$ está dada sobre un segmento $[a, b]$ y que sus coordenadas $r_1(u)$, $r_2(u)$, $r_3(u)$ representan las funciones integrables sobre el segmento $[a,b]$. Si $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$, $\boldsymbol{e}_3$ son los vectores básicos, resulta natural poner, por definición:

$$\int_a^b \boldsymbol{r}(u)\,du = \boldsymbol{e}_1 \int_a^b r_1(u)\,du + \boldsymbol{e}_2 \int_a^b r_2(u)\,du + \boldsymbol{e}_3 \int_a^b r_3(u)\,du.$$

Notemos que la integral para la función $\boldsymbol{r}(u)$ puede ser definida también de un modo directo, como límite de sumas integrales para la función $\boldsymbol{r}(u)$.

Por suma analogía con el caso examinado pueden introducirse también las integrales de las funciones vectoriales. Notemos que las fórmulas y reglas de integración de las funciones escalares pueden ser extendidas al caso de integrales de las funciones vectoriales.

§ 2. Algunos datos de la teoría de las curvas

1. Curvas regulares. En el § 1, cap. 2, v. II de este curso se trataba del concepto de curva y de los métodos de su definición. Entre los métodos de definir una curva se indicaba el método paramétrico, para el cual las coordenadas de un punto variable de la curva se definen como funciones de una variable escalar, esto es, de un parámetro. Tomando estas coordenadas por las del vector que sale del origen de coordenadas y va al punto de la curva, obtendremos una función vectorial de cuyo hodógrafo sirve la curva dada. De este modo, podemos definir una curva con ayuda de una función vectorial de una sola variable escalar y este método es equivalente al método paramétrico de definir una curva.

---

[1]) El orden de pequeñez de un vector se define como orden de pequeñez de su módulo.

Supongamos que una curva L se define por medio de la función vectorial $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(t)$ [1]. Admitamos que el parámetro t se sustituye por otro parámetro u, con ayuda de la relación $t = f(u)$, donde $f(u)$ es una función continua estrictamente creciente. En este caso la función $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(t)$ se convierte en una función nueva $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(f(u))$ del parámetro u. De este modo, podemos obtener diferentes parametrizaciones de una misma curva.

Llamemos la curva L *regular* (k veces diferenciable) sin puntos singulares, si esta curva admite tal parametrización con ayuda del parámetro t, que la función vectorial $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(t)$ es k veces diferenciable para cierto $k \geqslant 1$ entero y $\boldsymbol{r}'(t) \neq 0$ para todos los valores del parámento t. Cuando $k = 1$, la curva se llama *suave*.

En este capítulo se analizarán curvas regulares sin puntos singulares y aquellas parametrizaciones de estas curvas, para las cuales $\boldsymbol{r}'(t) \neq 0$.

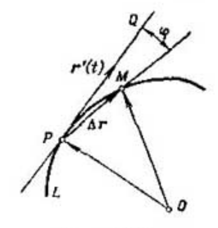


Fig. 12.5.

2. Tangente a una curva. Sea L una curva y P, un punto fijo en la curva L (fig. 12.5). Tracemos una cuerda PM de la curva. La recta PQ, a la que tiende la curva PM [2] para $M \to P$, se llama *tangente* a L en el punto P.

Es válida la siguiente *afirmación.*

Una curva suave L sin puntos singulares tiene en cada punto P una tangente.

Demostremos que la tangente se representa por la recta PQ que pasa por el punto P paralelamente al vector $\boldsymbol{r}'(t)$ (recordemos que $\boldsymbol{r}'(t) \neq 0$). En efecto, un vector $\frac{\Delta \boldsymbol{r}}{\Delta t}$ es paralelo a la cuerda PM (véase fig. 12.5) y, cuando $\Delta t \to 0$, tiende a $\boldsymbol{r}'(t)$. De aquí se deduce que el ángulo formado por la recta PM y la PQ tiende a cero, cuando $M \to P$. Por eso, la recta PQ es tangente a la curva L. La afirmación está demostrada.

Deduzcamos la ecuación vectorial de una tangente a la curva L en el punto P. Sea $\boldsymbol{R}$ un radio vector del punto variable Q en la tangente en el punto P. El vector $\overline{PQ} = \boldsymbol{R} - \boldsymbol{r}(t)$ es colineal al vector $\boldsymbol{r}'(t)$ y, por eso, $\boldsymbol{R} - \boldsymbol{r}(t) = u\boldsymbol{r}'(t)$. De aquí obtenemos la ecuación buscada de la tangente

$$\boldsymbol{R} = \boldsymbol{r}(t) + u\boldsymbol{r}'(t), \qquad (12.5)$$

[1] Una función vectorial $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(t)$ se denomina, corrientemente, *radio vector* de la curva L.

[2] Diremos que la curva PM tiende a la curva PQ cuando $M \to P$, si el ángulo entre estas rectas tiende a cero.

en la cual el papel del parámetro lo desempeña la magnitud u, mientras que t es el valor fijo del parámetro en la curva L que determina el punto P.

3. Plano osculador de una curva. Sea PQ una tangente a la curva L en un punto P (fig. 12.6). Tracemos por la tangente PQ y el punto M de la curva un plano PQM. Un plano π, al cual tiene el plano PQM [1]), cuando $M \to P$, se denomina *plano osculador a la curva* L en el punto P.

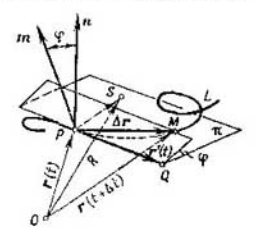


Fig. 12.6.

Es válida la siguiente *afirmación.*

Una curva regular L sin puntos singulares (por lo menos dos veces diferenciable) tiene un plano osculador en cada punto, en el cual los vectores $\boldsymbol{r}'(t)$ y $\boldsymbol{r}''(t)$ no son colineales.

Demostremos que el plano osculador será plano π que pasa por la tangente PQ paralelamente al vector $\boldsymbol{r}''(t)$. Es evidente que un vector

$$\boldsymbol{n} = [\boldsymbol{r}'(t)\,\boldsymbol{r}''(t)] \tag{12.6}$$

será el vector de la normal al plano π, y el vector

$$\boldsymbol{m} = \frac{2}{\Delta t^2}[\boldsymbol{r}'(t)\,\Delta\boldsymbol{r}], \quad \Delta\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(t+\Delta t) - \boldsymbol{r}(t), \tag{12.7}$$

(véase fig. 12.6) será vector de la normal al plano PQM. Por cuanto la curva L es dos veces diferenciable, tendremos, de acuerdo con la fórmula de Taylor:

$$\Delta\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}'(t)\,\Delta t + \frac{1}{2}\boldsymbol{r}''(t)\,\Delta t^2 + \boldsymbol{\alpha}\cdot\Delta t^2, \tag{12.8}$$

donde $\boldsymbol{\alpha}$ es una función vectorial infinitamente pequeña cuando $\Delta t \to 0$. De las fórmulas (12.6)—(12.8) se deduce que

$$\boldsymbol{m} = [\boldsymbol{r}'(t)\,\boldsymbol{r}''(t)] + 2[\boldsymbol{r}'(t)\,\boldsymbol{\alpha}] = \boldsymbol{n} + \boldsymbol{\beta}, \tag{12.9}$$

donde $\boldsymbol{\beta} = 2[\boldsymbol{r}'(t)\,\boldsymbol{\alpha}]$ es una función vectorial infinitamente pequeña para $\Delta t \to 0$. De la relación (12.9) se deduce que, cuando $M \to P$, el vector $\boldsymbol{m}$ tiende a $\boldsymbol{n}$, y, por tanto, tiende a cero también el ángulo φ formado por los planos PQM y π. Por eso, el plano π es plano osculador respecto de la curva en el punto P. La afirmación está demostrada.

Deduzcamos la ecuación vectorial de un plano osculador. Sea $\boldsymbol{R}$ un radio vector del punto variable S de este plano. Los vectores

[1]) Diremos que el plano PQM tiende al plano π cuando $M \to P$, si el ángulo entre dichos planos tiende a cero.

$\overline{PS} = \boldsymbol{R} - \boldsymbol{r}(t)$, $\boldsymbol{r}'(t)$ y $\boldsymbol{r}''(t)$ son paralelos al plano osculador, y, por eso, $\boldsymbol{R} - \boldsymbol{r}(t) = u\boldsymbol{r}'(t) + v\boldsymbol{r}''(t)$. De aquí obtenemos la ecuación buscada del plano osculador

$$\boldsymbol{R} = \boldsymbol{r}(t) + u\boldsymbol{r}'(t) + v\boldsymbol{r}''(t), \tag{12.10}$$

en la cual u y v son argumentos de la función vectorial $\boldsymbol{R}$, mientras que t es el valor fijo del parámetro en la curva L que determina el punto P.

Obtengamos la ecuación del plano osculador en otra forma. Por cuanto los vectores $\boldsymbol{R} - \boldsymbol{r}(t), \boldsymbol{r}'(t), \boldsymbol{r}''(t)$ son coplanares, el vector $\boldsymbol{R}$ satisface la siguiente ecuación:

$$(\boldsymbol{R} - \boldsymbol{r}(t))\,\boldsymbol{r}'(t)\,\boldsymbol{r}''(t) = 0. \tag{12.11}$$

Si X, Y, Z son coordenadas del vector $\boldsymbol{R}$ (coordenadas del punto variable S del plano π), y $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$, coordenadas del vector $\boldsymbol{r}(t)$, entonces la ecuación (12.11) se escribirá en la forma coordenada del modo siguiente:

$$\begin{vmatrix} X - x(t) & Y - y(t) & Z - z(t) \\ x'(t) & y'(t) & z'(t) \\ x''(t) & y''(t) & z''(t) \end{vmatrix} = 0. \tag{12.12}$$

La ecuación (12.12) será, evidentemente, ecuación del plano osculador.

OBSERVACIÓN. En plano osculador está definido por nosotros geométricamente con ayuda de un paso límite y, por eso, si existe, será único. De aquí y de la afirmación demostrada en este punto se deduce que si en un punto dado π de la curva existe un plano osculador, entonces, cualquiera que sea la parametrización de la curva, el vector $\boldsymbol{r}''(t)$ es paralelo a este plano. Si el parámetro t se considera como tiempo, $\boldsymbol{r}''(t)$ será el vector de aceleración, al desplazarse el punto a lo largo de la curva L según la ley $\boldsymbol{r}(t)$. De este modo, para cualquier método de movimiento por la curva, el vector de aceleración en el punto dado se dispone en el plano osculador de la curva en este punto. Por esta razón el plano osculador se denomina *plano de aceleración*.

Una recta que pasa por el punto P de la curva L perpendicularmente a la tangente en este punto se llama *normal*. Una normal, dispuesta en el plano osculador lleva el nombre de *normal principal* de la curva y la normal perpendicular al plano osculador, *binormal* de la curva. La deducción de las ecuaciones de estas rectas queda al cargo del lector.

4. Curvatura de una curva. Sea P un punto fijo arbitrario de una curva regular L sin puntos singulares y sea M, un punto de esta

curva distinto de P. Denotemos con φ el ángulo formado por las tangentes en los puntos P y M, y con l, la longitud del arco PM [1](fig. 12.7).

Fig. 12.7.

Se llama *curvatura* k_1 *de la curva* L *en el punto* P *un límite de la razón* φ/l para $l \to 0$ (es decir, para $M \to P$).

Es válida la siguiente *afirmación.*

Una curva regular L *(dos veces diferenciable) sin puntos singulares tiene en cada punto la curva determinada* k_1.

Pasemos a la demostración de esta afirmación. Supongamos que los puntos P y M de la curva corresponden a los valores t y $t + \Delta t$ respectivamente, del parámetro.

Calculemos sen φ y l. Por cuanto la curva L es regular, en cualquier punto de L se tiene $\boldsymbol{r}'(t) \neq 0$, y, por eso,

$$\operatorname{sen}\varphi = \frac{|[\boldsymbol{r}'(t)\,\boldsymbol{r}'(t+\Delta t)]|}{|\boldsymbol{r}'(t)|\,|\boldsymbol{r}'(t+\Delta t)|}, \tag{12.13}$$

$$l = \int_{t}^{t+\Delta t} |\boldsymbol{r}'(\tau)|\,d\tau = |\boldsymbol{r}'(\tau^*)|\,\Delta t = |\boldsymbol{r}'(t)|\,\Delta t + \delta\,\Delta t, \tag{12.14}$$

donde $\delta \to 0$ para $\Delta t \to 0$.

Notemos que en las transformaciones de la expresión para l se han aprovechado la fórmula del valor medio para la integral y la continuidad de la función $\boldsymbol{r}'(t)$.

Transformemos la expresión (12.13) para sen φ. De acuerdo con la fórmula de Taylor,

$$\boldsymbol{r}'(t+\Delta t) = \boldsymbol{r}'(t) + \boldsymbol{r}''(t)\,\Delta t + \boldsymbol{\alpha}\Delta t, \quad \boldsymbol{\alpha} \to 0 \text{ para } \Delta t \to 0.$$

Con ayuda de esta fórmula la expresión (12.13) para sen φ toma una forma:

$$\operatorname{sen}\varphi = \frac{|[\boldsymbol{r}'(t)\,\boldsymbol{r}''(t)]| + \beta}{|\boldsymbol{r}'(t)|^2 + \gamma}\,\Delta t, \tag{12.15}$$

donde $\beta \to 0$ y $\gamma \to 0$ para $\Delta t \to 0$.

Volviendo a las fórmulas (12.14) y (12.15) y aprovechando, para $\varphi \neq 0$, una identidad

$$\frac{\varphi}{l} = \frac{\varphi}{\operatorname{sen}\varphi}\,\frac{\operatorname{sen}\varphi}{l}$$

[1]) Por cuanto L es una curva regular, cualquier arco suyo PM es rectificable.

$\left(\text{cuando } \varphi=0, \text{ la relación } \frac{\varphi}{l} \text{ es igual a cero}\right)$, obtendremos

$$\frac{\varphi}{l}=\frac{\varphi}{\operatorname{sen}\varphi}\,\frac{|[r'(t)\,r''(t)]|+\beta}{|r'(t)|^3+\mu}, \qquad (12.16)$$

donde β y μ tienden a cero para $\Delta t \to 0$. Por cuanto $\varphi \to 0$ para $\Delta t \to 0$, resulta que $\frac{\varphi}{\operatorname{sen}\varphi} \to 1$ cuando $\Delta t \to 0$. Por eso, de la relación (12.16) se deduce que, cuando $\Delta t \to 0$, es decir, cuando $M \to P$, el límite $\frac{\varphi}{l}$ existe y es igual a $\frac{|[r'(t)\,r''(t)]|}{|r'(t)|^3}$. La afirmación está demostrada.

Así pues, en las condiciones de la afirmación la curvatura k_1 existe y puede ser calculada por la fórmula

$$k_1=\frac{|[r'(t)\,r''(t)]|}{|r'(t)|^3}. \qquad (12.17)$$

OBSERVACIÓN. Si a título de parámetro en la curva está elegida la longitud del arco l, de suerte que $r=r(l)$, entonces $|r'(l)|=1$, y el vector $r''(l)$ es ortogonal al vector $r'(l)$ [1]. En este caso, evidentemente, la fórmula (12.17) tendrá por expresión

$$k_1=|r''(l)|. \qquad (12.18)$$

5. Torsión de una curva. Sea P un punto fijo arbitrario de la curva regular L sin puntos singulares y sea M un punto de la curva citada, distinto de P. Denotemos con φ el ángulo entre los planos osculadores en los puntos P y M, y con l, la longitud del arco PM.

Se llama *torsión absoluta* $|k_2|$ de la curva L en el punto P el límite de la razón φ/l para $l \to 0$ (es decir, para $M \to P$).

Es válida la siguiente *afirmación*.

Una curva regular L (tres veces diferenciable) sin puntos singulares tiene en cada punto, en el que la curvatura es distinta de cero, una determinada torsión absoluta.

Pasemos a la demostración de esta afirmación.

Supongamos que los puntos P y M de la curva L corresponden a los valores t y $t+\Delta t$, respectivamente, del parámetro. Las normales a los planos osculadores en P y M se definen por los vectores $[r'r'']_P$ y $[r'r'']_M$ [2]. De acuerdo con la fórmula de Taylor, habida cuenta de la

---

[1] Si la longitud del arco es un parámetro, de la fórmula $\Delta l=\int_l^{l+\Delta l}|r'(\tau)|\times d\tau$ se deduce, por ser arbitrarios l y Δl, que $|r'(l)|=1$ en cualquier punto de la curva. Al diferenciar la relación $r'^2(l)=1$, obtendremos $2r'(l)\,r''(l)=0$, es decir, el vector $r''(l)$ es ortogonal al vector $r'(l)$.

[2] Las expresiones $[r'r'']_P$ y $[r'r'']_M$ significan que el producto vectorial $[r'r'']$ está calculado en los puntos P y M, respectivamente.

igualdad $[r''r''] = 0$, obtenemos

$$[r'r'']_M = [r'r'']_P + ([r'r''])'_P \Delta t + \alpha \Delta t =$$
$$= [r'r'']_P + [r'r''']_P \Delta t + \alpha \Delta t, \qquad (12.19)$$

donde $\alpha \to 0$ para $\Delta t \to 0$.

Para el cálculo del límite φ/l para $l \to 0$ nos hará falta el valor del seno del ángulo φ entre las normales a los planos osculadores en los puntos P y M. Con este fin hallemos el módulo del producto vectorial $[r'r'']_P$ y $[r'r'']_M$ y el producto de módulos de estos vectores. Con ayuda de (12.19) obtendremos

$$[[r'r'']_P [r'r'']_M] = [[r'r'']_P ([r'r'']_P + [r'r''']_P \Delta t + \alpha \Delta t)].$$

De aquí, aprovechando la propiedad distributiva del producto vectorial y la conocida fórmula $[a[bc]] = b(ac) - c(ab)$ para el producto vectorial doble, hallemos

$$[[r'r'']_P [r'r'']_M] = r'_P (r'r''r''')_P \Delta t + \beta \Delta t,$$

donde $\beta = [[r'r'']_P \alpha]$, y, por eso, $\beta \to 0$ cuando $\Delta t \to 0$. De la última expresión para $[[r'r'']_P [r'r'']_M]$ obtenemos la siguiente fórmula

$$|[[r'r'']_P [r'r'']_M]| = |r'_P| \, |(r'r''r''')_P| \Delta t + \gamma \Delta t, \qquad (12.20)$$

donde $\gamma \to 0$ para $\Delta t \to 0$.

Razonando análogamente, obtenemos también la siguiente fórmula:

$$|[r'r'']_P| \cdot |[r'r'']_M| = [r'r'']^2_P + \mu \Delta t, \qquad (12.21)$$

donde $\mu \to 0$ para $\Delta t \to 0$.

De las fórmulas (12.20) y (12.21) obtenemos la expresión para sen φ que se busca:

$$\operatorname{sen} \varphi = \frac{(|r'| \, |(r'r''r''')| + \gamma) \Delta t}{[r'r'']^2 + \mu \Delta t}.$$

Notemos que en esta expresión los valores de las derivadas de la función $r(t)$ están calculados en el punto P.

Volviendo a la expresión (12.14) para l, aprovechando la fórmula para sen φ que acabamos de recibir, y el límite conocido $\frac{\varphi}{\operatorname{sen} \varphi} \to 1$ para $\varphi \to 0$, nos convencemos de que el límite $\frac{\varphi}{l}$ para $l \to 0$ existe y es igual a $\frac{|(r'r''r''')|}{[r'r'']^2}$.

Así pues, en las condiciones de la afirmación la torsión absoluta $|k_2|$ existe y puede ser calculada por la fórmula

$$|k_2| = \frac{|(r'r''r''')|}{[r'r'']^2}. \qquad (12.22)$$

Definamos *la torsión* k_2 de una curva con ayuda de la igualdad

$$k_2 = + \frac{(r'r''r''')}{[r'r'']^2}. \qquad (12.23)$$

Demostremos que *la torsión* k_2 *no depende de la elección de la parametrización de una curva y por eso constituye una determinada característica geométrica de la curva dada* [1]).

Pasemos a otra parametrización de una curva con ayuda de un parámetro τ.

Al denotar la diferenciación respecto del parámetro τ con un punto, obtendremos, rigiéndonos por la regla de diferenciación de una función compuesta, las siguientes fórmulas:

$r' = \dot{r}\tau'$,

$r'' = \ddot{r}\tau'^2 +$ {términos que se expresan linealmente a través de $\dot{r}$},

$r''' = \dddot{r}\tau'^3 +$ {términos que se expresan linealmente a través de $\dot{r}$ y $\ddot{r}$}.

De estas fórmulas se deducen las siguientes relaciones

$(r'r''r''') = (\dot{r}\ddot{r}\dddot{r})\,\tau'^6$, $[r'r'']^2 = [\dot{r}\ddot{r}]^2\,\tau'^6$. De este modo,

$$k_2 = \frac{(r'r''r''')}{[r'r'']} = \frac{(\dot{r}\ddot{r}\dddot{r})}{[\dot{r}\ddot{r}]^2}.$$

Nos hemos convencido de que k_2 no depende de cómo se elige la parametrización de una curva

6. Fórmulas de Frenet. Ecuaciones naturales de una curva. En el p. 3 de este párrafo se han introducido los conceptos de normal y de binormal de una curva. Estas rectas son, junto con la tangente, las aristas de un ángulo triedro, llamado *triedro natural*. Supongamos que como parámetro l en la curva L interviene la longitud del arco. Entonces, $\boldsymbol{r}'(l) = \boldsymbol{t}$ es el vector unidad de la tangente a L. Elijamos un vector unidad $\boldsymbol{n}$ de la normal principal de un modo tal que sea colineal al vector $\boldsymbol{r}''(l)$ [2]), y tomemos a título de vector unidad de la binormal un vector

$$\boldsymbol{b} = [\boldsymbol{t}\boldsymbol{n}]. \qquad (12.24)$$

De este modo, los vectores $\boldsymbol{t}$, $\boldsymbol{n}$, $\boldsymbol{b}$ forman una terna derecha de vectores, es decir, $(\boldsymbol{tnb}) > 0$. Los vectores $\boldsymbol{t}$, $\boldsymbol{n}$ y $\boldsymbol{b}$ son funciones de la longitud del arco. Hallemos los desarrollos de las derivadas $\boldsymbol{t}'$, $\boldsymbol{n}'$, $\boldsymbol{b}'$

---

[1]) La magnitud absoluta $|k_2|$ está determinada geométricamente. Por eso, de la parametrización puede depender sólo el signo de la expresión $\frac{(r'r''r''')}{[r'r'']^2}$.

[2]) De acuerdo con la observación en el p. 4 de este párrafo, el vector $r''(l)$ es ortogonal al vector $\boldsymbol{t}$ y se dispone en el plano osculador de la curva.

de estas funciones según los vectores $\boldsymbol{t}$, $\boldsymbol{n}$ y $\boldsymbol{b}$. Por cuanto $\boldsymbol{t} = \boldsymbol{r}'(l)$, se tiene $\boldsymbol{t}' = \boldsymbol{r}''(l)$. Por eso, el vector $\boldsymbol{t}'$ es colineal respecto de $\boldsymbol{n}$:

$$\boldsymbol{t}' = \alpha \boldsymbol{n}.$$

De conformidad con la observación 4 de esto párrafo, $\alpha = k_1$ ($\alpha = |\boldsymbol{t}'| = |\boldsymbol{r}''(l)| = k_1$) y por eso

$$\boldsymbol{t}' = k_1 \boldsymbol{n}. \tag{12.25}$$

Volvamos ahora al vector $\boldsymbol{b}$. Por cuanto $\boldsymbol{b}$ es un vector unidad, $\boldsymbol{b}'$ será ortogonal a $\boldsymbol{b}$. Demostremos que el vector $\boldsymbol{b}'$ es también orto-

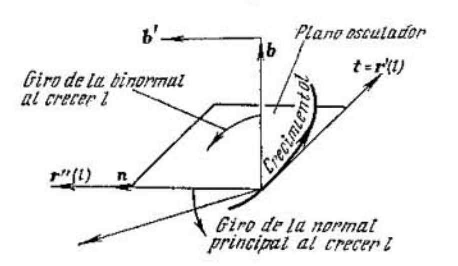


Fig. 12.8.

gonal a $\boldsymbol{t}$. Al diferenciar la identidad $(\boldsymbol{bt}) = 0$, obtenemos $(\boldsymbol{b}'\boldsymbol{t}) + (\boldsymbol{bt}') = 0$. Por cuanto, de acuerdo con (12.25), $(\boldsymbol{bt}') = k_1 (\boldsymbol{bn}) = 0$, entonces $(\boldsymbol{b}'\boldsymbol{t}) = 0$, lo que es indicio de que el vector $\boldsymbol{b}'$ es ortogonal a $\boldsymbol{t}$. De los razonamientos aducidos se desprende que el vector $\boldsymbol{b}'$ es colineal con $\boldsymbol{n}$, es decir,

$$\boldsymbol{b}' = \beta \boldsymbol{n}. \tag{12.26}$$

Demostremos que $\beta = -k_2$. Sea φ un ángulo formado por los planos osculadores en los puntos correspondientes a los valores del parámetro l y $l + \Delta l$. Es evidente que el ángulo entre los vectores $\boldsymbol{b}(l)$ y $\boldsymbol{b}(l + \Delta l)$ es también igual a φ, dado que el vector $\boldsymbol{b}$ es ortogonal a los planos osculadores. Por eso, tomando en consideración que $\lim\limits_{\Delta l \to 0} \frac{\varphi}{\Delta l} = k_2$, obtendremos

$$|\boldsymbol{b}'| = \lim_{\Delta l \to 0} \left| \frac{\boldsymbol{b}(l + \Delta l) - \boldsymbol{b}(l)}{\Delta l} \right| = \lim_{\Delta l \to 0} \left| \frac{\varphi}{\Delta l} \right| = |k_2|.$$

Por consiguiente, siendo $|\beta| = |\boldsymbol{b}'|$, la relación $|\beta| = |k_2|$ se verifica. Supongamos que los vectores $\boldsymbol{b}'$ y $\boldsymbol{n}$ son de una misma orientación. De la fórmula (12.26) se deduce que en tal caso $\beta = |\boldsymbol{b}'|$, es decir, $\beta > 0$. Está claro que en este caso los vectores $\boldsymbol{r}'(l)$, $\boldsymbol{r}''(l)$

y $r'''(l)$ forman una terna de sentido opuesto con relación a la terna t, n, b (fig. 12.8) y, por eso, $(r', r'', r''') < 0$, es decir, $k_2 < 0$. Como $\beta > 0$ y $|\beta| = |k_2|$, se tiene $\beta = -k^2$. En el caso cuando los vectores b' y n son de orientación opuesta, es fácil convencerse, razonando de una manera igual, de que $\beta < 0$ y $k_2 > 0$. Por cuanto $|\beta| = |k_2|$, en este caso también $\beta = -k_2$. En el caso de que $\beta = 0$, la igualdad $\beta = -k_2$ es evidente. Hemos demostrado pues que

$$\beta = -k_2. \tag{12.27}$$

De las fórmulas (12.26) y (12.27) se deduce la expresión requerida para b'

$$b' = -k_2 n. \tag{12.28}$$

Hallemos ahora la expresión para n'. Haciendo uso de la regla de diferenciación de un producto escalar y de las fórmulas (12.25) y (12.28) obtendremos

$$n' = [bt]' = [b't] + [bt'] = -k_2[nt] + k_1[bn] = -k_1 t + k_2 b.$$

Reuniendo en una tabla las fórmulas (12.25), (12.28) y la expresión para n', que acabamos de deducir, obtendremos las siguientes fórmulas llamadas *fórmulas de Frenet* [1]):

$$\left.\begin{aligned} t' &= \qquad k_1 n, \\ n' &= -k_1 t \qquad + k_2 b, \\ b' &= \qquad -k_2 n. \end{aligned}\right\} \tag{12.29}$$

Las fórmulas de Frenet se llaman fórmulas fundamentales de la teoría de las curvas.

De las fórmulas de Frenet se deduce que si se conocen la curvatura k_1 y la torsión k_2 de la curva L, pueden hallarse las derivadas de las funciones vectoriales t, n y b (es decir, las velocidades de variación de estas funciones). Naturalmente, esto nos lleva a una idea de que la curvatura y la torsión definen la curva L, lo que realmente tiene lugar. A saber, es válida la siguiente *afirmación.*

Supongamos que $k_1(l)$ y $k_2(l)$ son cualesquiera funciones diferenciables y, además, $k_1(l) > 0$. Entonces, existe la única curva, con una exactitud de hasta la posición en el espacio, para la cual $k_1(l)$ y $k_2(l)$ son la curvatura y la torsión respectivamente.

No vamos a demostrar esta afirmación. Notemos solamente que la demostración se fundamenta en el teorema de existencia y unicidad de la solución de un sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias.

Por cuanto, de acuerdo con la afirmación enunciada, la curvatura $k_1(l)$ y la torsión $k_2(l)$ definen por completo una curva, el sistema de

[1]) J. Frenet, matemático francés (1801—1880).

ecuaciones

$$k_1 = k_1(l), \quad k_2 = k_2(l)$$

se denominan, de ordinario, *ecuaciones naturales* (*intrínsecas*) de la curva.

§ 3. Algunos datos de la teoría de las superficies

En el cap. 5 hemos conocido una serie de datos importantes sobre las superficies: se ha introducido el concepto de superficie, el de superficie regular y suave sin puntos singulares y concepto de plano tangente y de normal a una superficie. Aquí daremos a conocer una serie de propiedades importantes de las superficies regulares.

1. Primera forma cuadrática de una superficie. Mediciones sobre una superficie. Sea Φ una superficie regular sin puntos singulares y sea $\boldsymbol{r}(u, v)$, el radio vector de la citada superficie. Según se sabe, en este caso $[\boldsymbol{r}_u \boldsymbol{r}_v] \neq 0$.

Se llama primera forma cuadrática I de la superficie Φ una expresión

$$\mathrm{I} = d\boldsymbol{r}^2. \tag{12.30}$$

La denominación «forma cuadrática» se debe a que la expresión

$$\mathrm{I} = d\boldsymbol{r}^2 = (\boldsymbol{r}_u du + \boldsymbol{r}_v dv)^2 = \boldsymbol{r}_u^2 du^2 + 2\boldsymbol{r}_u \boldsymbol{r}_v\, du dv + \boldsymbol{r}_v^2 dv^2$$

representa *una forma cuadrárica de las diferenciales du y dv.*

La primera forma cuadrática es definida positivamente por la forma: se reduce en 0 *sólo* cuando $du = dv = 0$, y para los demás valores de du y dv es positiva. En efecto, si $d\boldsymbol{r}^2 = 0$, entonces, $d\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_u du + \boldsymbol{r}_v dv = 0$. Por eso, si du y dv no se anulan simultáneamente, de la igualdad $\boldsymbol{r}_u du + \boldsymbol{r}_v dv = 0$ se deduce que $\boldsymbol{r}_u$ y $\boldsymbol{r}_v$ son colineales, es decir, $[\boldsymbol{r}_u \boldsymbol{r}_v] = 0$, lo que es imposible, puesto que, por hipótesis, $[\boldsymbol{r}_u \boldsymbol{r}_v] \neq 0$.

Para los coeficientes de la primera forma cuadrática se emplean las designaciones

$$\boldsymbol{r}_u^2 = E, \qquad \boldsymbol{r}_u \boldsymbol{r}_v = F, \quad \boldsymbol{r}_v^2 = G. \tag{12.31}$$

Con ayuda de estas designaciones la expresión (12.30) para la primera forma cuadrática puede ser escrita en la forma siguiente:

$$\mathrm{I} = d\boldsymbol{r}^2 = E\, du^2 + 2F\, du\, dv + G\, dv^2. \tag{12.32}$$

Así pues, *sobre una superficie regular Φ definida por el radio vector $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(u, v)$, viene dada una primera forma cuadrática* I *mediante la relación* (12.32). En este caso los coeficientes de la forma citada pueden calcularse según las fórmulas (12.31).

Con ayuda de la primera forma cuadrática pueden realizarse mediciones sobre una superficie: en particular, cálculo de las longitudes de los

arcos de las líneas y mediciones de los ángulos entre las líneas de las áreas de los dominios.

Sea L una línea regular sobre una superficie Φ, definida por las ecuaciones paramétricas [1])

$$u = u(t), \quad v = v(t), \quad t_0 \leqslant t \leqslant t_1, \tag{12.33}$$

con la particularidad de que $u(t)$ y $v(t)$ son funciones diferenciables con derivadas continuas.

Se conoce que la longitud l del arco de la curva L, definida por el radio vector $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(u(t), v(t))$, puede hallarse según la fórmula

$$l = \int_{t_0}^{t_1} |\boldsymbol{r}'(t)|\, dt \tag{12.34}$$

(véase fórmula (2.21), v. II).

Como $|\boldsymbol{r}'(t)|\, dt = |\boldsymbol{r}'(u(t), v(t))|\, dt = |d\boldsymbol{r}(u, v)|$, de la fórmula (12.34) obtenemos

$$l = \int_{t_0}^{t_1} |\boldsymbol{r}'|\, dt = \int_L |d\boldsymbol{r}(u, v)| = \int_L \sqrt{d\boldsymbol{r}^2} = \int_L \sqrt{\mathrm{I}} \tag{12.35}$$

(las últimas tres integrales en (12.35) representan integrales curvilíneas de primera especie). Así pues, si se conoce la primera forma cuadrática, se pueden calcular las longitudes, con ayuda de (12.35).

Pasemos ahora a las mediciones de los ángulos en las superficies.

Sea Φ una superficie dada mediante una función vectorial $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(u, v)$.

La dirección $du : dv$ sobre la superficie Φ en su punto P se define como dirección del vector $d\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_u du + \boldsymbol{r}_v\, dv$ en dicho punto [2]).

Examinemos en el punto P dos direcciones, $du : dv$ y $\delta u : \delta v$. El ángulo φ entre estasdi recciones se determina según la fórmula bien conocida por el curso de la geometría analítica para el coseno del

---

[1]) Está claro que la representación de u y v en forma de las funciones (12.33) de cierto parámetro t determina en una superficie una curva definida por la función vectorial $\boldsymbol{r}(u(t), v(t))$. La cuestión de si toda línea suave L en la superficie Φ puede definirse por las ecuaciones paramétricas de la forma (12.33) se resuelve afirmativamente, por ejemplo, de un modo siguiente. Sean $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$ las ecuaciones paramétricas de L. Entonces, u y v, siendo funciones del parámetro t, pueden determinarse a partir de las ecuaciones $x(t) = x(u, v)$, $y(t) = y(u, v)$, $z(t) = z(u, v)$. La solución de la forma (12.33) se garantiza por la condición $[\boldsymbol{r}_u \boldsymbol{r}_v] \neq 0$, de la cual se deduce, por ejemplo, que $\begin{vmatrix} x_u & x_v \\ y_u & y_v \end{vmatrix} \neq 0$. La última condición asegura la resolubilidad del sistema $x(t) = x(u, v)$, $y(t) = y(u, v)$ respecto de u y v.

[2]) Es evidente que este vector está dispuesto en el punto P del plano tangente.

ángulo φ entre los vectores $d\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_u du + \boldsymbol{r}_v dv$ y $\delta\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_u \delta u + \boldsymbol{r}_v \delta v$:

$$\cos\varphi = \frac{(d\boldsymbol{r}\cdot\delta\boldsymbol{r})}{\sqrt{d\boldsymbol{r}^2}\sqrt{\delta\boldsymbol{r}^2}}.$$

Tomando en consideración la relación (12.31), de esta fórmula obtenemos para $\cos\varphi$ la siguiente expresión:

$$\cos\varphi = \frac{E\,du\,\delta u + F\,(du\,\delta v + dv\,\delta u) + G\,dv\,\delta v}{\sqrt{E\,du^2 + 2F\,du\,dv + G\,dv^2}\ \sqrt{E\delta u^2 + 2F\delta u\,\delta v + G\delta v^2}}. \quad (12.36)$$

El ángulo entre las curvas L_1 y L_2 sobre la superficie Φ que se intersecan en un punto P se define como ángulo entre las direcciones de las tangentes a L_1 y L_2 en el punto P. Notemos que si una curva sobre la superficie se define mediante las ecuaciones paramétricas $u = u(t)$, $v = v(t)$, la dirección $du : dv$ en un punto de esta curva se define por un vector

$$d\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_u du + \boldsymbol{r}_v dv = (\boldsymbol{r}_u u' + \boldsymbol{r}_v v')\,dt.$$

Así pues, conociendo la primera forma cuadrática, podemos calcular, con ayuda de (12.36), los ángulos entre las direcciones sobre la superficie.

El problema de medición de las áreas de los dominios en una superficie fue detalladamente examinado en el cap. 5.

Recordemos que si un dominio Π en la superficie se define prefijando los parámetros u y v en el dominio de su variación Ω, el área σ del dominio Π puede calcularse según la fórmula

$$\sigma = \iint\limits_{\Omega} \sqrt{EG - F^2}\,du\,dv$$

(véase fórmula (5.18)).

De este modo, si se conoce la primera forma cuadrática, podemos medir áreas de los dominios sobre una superficie.

Todos los hechos que pueden obtenerse por medición sobre una superficie con ayuda de la primera forma cuadrática se refieren a la así llamada *geometría intrínseca de las superficies.*

Dos diferentes superficies pueden contar con una misma geometría intrínseca. Como ejemplo más simple de tales superficies puede servir un plano y un cilindro parabólico. Notemos que las superficies de una misma geometría intrínseca se llaman *isométricas.*

2. Segunda forma cuadrática de una superficie. Sea Φ una superficie regular definida por un radio vector $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(u, v)$, y sea $\boldsymbol{n}(u, v)$ un vector unidad de la normal a esta superficie definido por una relación

$$\boldsymbol{n} = \frac{[\boldsymbol{r}_u \boldsymbol{r}_v]}{|[\boldsymbol{r}_u \boldsymbol{r}_v]|} = \frac{[\boldsymbol{r}_u \boldsymbol{r}_v]}{\sqrt{EG - F^2}}\ ^{1)}. \quad (12.37)$$

[1]) Por cuanto $|[\boldsymbol{r}_u \boldsymbol{r}_v]| = \sqrt{\boldsymbol{r}_u^2 \boldsymbol{r}_v^2 - (\boldsymbol{r}_u \boldsymbol{r}_v)^2}$, entonces, de acuerdo con las fórmulas (12.31), $|[\boldsymbol{r}_u \boldsymbol{r}_v]| = \sqrt{EG - F^2}$.

Se llama segunda forma cuadrática II de una superficie una expresión

$$\mathrm{II} = -\,d\boldsymbol{r}\,d\boldsymbol{n}. \qquad (12.38)$$

Puesto que $d\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{n} = 0$[1]), tenemos $d\,(d\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{n}) = 0$, es decir, $d^2\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{n} = -d\boldsymbol{r}\,d\boldsymbol{n}$, y, por eso, la segunda forma cuadrática puede ser definida también con ayuda de la relación

$$\mathrm{II} = d^2\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{n}. \qquad (12.39)$$

Por cuanto $d^2\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_{uu}du^2 + 2\boldsymbol{r}_{uv}\,du\,dv + \boldsymbol{r}_{vv}dv^2$, entonces, de acuerdo con (12.39), la segunda forma cuadrática puede escribirse del modo siguiente:

$$\mathrm{II} = (\boldsymbol{r}_{uu}\boldsymbol{n})\,du^2 + 2\,(\boldsymbol{r}_{uv}\,\boldsymbol{n})\,du\,dv + (\boldsymbol{r}_{vv}\boldsymbol{n})\,dv^2. \qquad (12.40)$$

Para los coeficientes de la segunda forma se emplean las siguientes designaciones

$$\boldsymbol{r}_{uu}\boldsymbol{n} = L, \quad \boldsymbol{r}_{uv}\boldsymbol{n} = M, \quad \boldsymbol{r}_{vv}\boldsymbol{n} = N. \qquad (12.41)$$

Volviendo a la expresión (12.37) para $\boldsymbol{n}$, obtendremos, con ayuda de (12.41), las siguientes fórmulas para los coeficientes de la segunda forma:

$$L = \frac{\boldsymbol{r}_{uu}\boldsymbol{r}_u\boldsymbol{r}_v}{\sqrt{EG-F^2}}, \quad M = \frac{\boldsymbol{r}_{uv}\boldsymbol{r}_u\boldsymbol{r}_v}{\sqrt{EG-F^2}}, \quad N = \frac{\boldsymbol{r}_{vv}\boldsymbol{r}_u\boldsymbol{r}_v}{\sqrt{EG-F^2}}. \qquad (12.42)$$

3. Clasificación de los puntos de una superficie regular. Analicemos un problema de desviación de una superficie del plano tangente en un punto dado.

Sean: Φ, una superficie regular (dos veces diferenciable); $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}\,(u, v)$, el radio vector que define la citada superficie; $\boldsymbol{n}\,(u, v)$, el vector unidad de la normal; $P\,(u, v)$, un punto fijo de la superficie; $\boldsymbol{n}_P$, el vector $\boldsymbol{n}\,(u, v)$ en el punto P[2]); M, un punto de la superficie que corresponde a los valores de los parámetros $u + \Delta u$, $v + \Delta v$ (fig. 12.9).

Sea N la base de una perpendicular trazada de M a un plano tangente π en el punto P, y sea h una magnitud cuyo valor absoluto es igual a la distancia entre M y el plano π. El signo de h es positivo, si las direcciones de los vectores $\overline{NM}$ y $\boldsymbol{n}_P$ coinciden, y es negativo en el caso contrario. Es evidente que

$$h = \Delta\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{n}_P, \qquad (12.43)$$

donde $\Delta\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}\,(u + \Delta u, v + \Delta v) - \boldsymbol{r}\,(u, v) = \overline{PM}$. Por cuanto u y v son variables independientes, podemos considerar $\Delta u = du$, $\Delta v = dv$, y, por eso, aprovechando la fórmula de Taylor (véase fór-

[1]) El vector $d\boldsymbol{r}$ se dispone en el plano tangente a la superficie y, por eso, $d\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{n} = 0$.

[2]) La letra P al pie del vector significará en adelante que el vector se toma en el punto P.

mula (12.4)), obtendremos

$$\Delta \boldsymbol{r} = (d\boldsymbol{r})_P + \frac{1}{2}(d^2\boldsymbol{r})_P + \boldsymbol{R}_2. \tag{12.44}$$

En esta relación las diferenciales están calculadas en el punto P, y $\boldsymbol{R}_2$ es un vector de orden $\boldsymbol{o}(\rho^2)$, donde $\rho = \sqrt{du^2 + dv^2}$. De las fór-

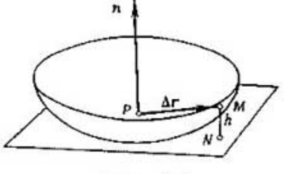


Fig. 12.9.

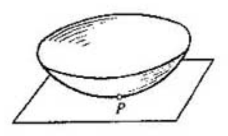


Fig. 12.10.

mulas (12.43) y (12.44) obtenemos para h la siguiente expresión:

$$h = \frac{1}{2} d^2\boldsymbol{r}_P \cdot \boldsymbol{n}_P + \boldsymbol{R}_2 \cdot \boldsymbol{n}_P. \tag{12.45}$$

Por cuanto $d^2\boldsymbol{r}_P \cdot \boldsymbol{n}_P$ es la segunda forma cuadrática II_P calculada en el punto P, y $\boldsymbol{R}_2\boldsymbol{n}_P = \boldsymbol{o}(\rho^2)$, la relación (12.45) puede ser escrita en la forma:

$$h = \frac{1}{2} II_P + o(\rho^2). \tag{12.46}$$

Volviendo a la fórmula (12.46), podemos suponer que la influencia principal en la magnitud h la ejerce el sumando $1/2\ \mathrm{II}_P$, y, por eso, la estructura espacial de una superficie en las cercanías de un punto regular se determina por la segunda forma cuadrática en este punto.

Esta suposición se confirma por los siguientes razonamientos.

1°. La segunda forma cuadrática II_P es *de signo fijo* ($LN - M^2 > 0$).

En este caso [1])

$$|\mathrm{II}_P| \geqslant A\rho^2, \quad A > 0.$$

De aquí y de la relación (12.46) se deduce que la magnitud h conserva intacto un signo determinado para todos los valores ρ suficientemente pequeños, y, por eso, en un entorno del punto P la superficie se dispone por un lado respecto del plano tangente π_P en este punto (fig. 12.10).

[1]) Podemos convencernos de la validez de la desigualdad $|\mathrm{II}_P| \geqslant A\rho^2$, del modo siguiente, por ejemplo. Tenemos $|\mathrm{II}_P| = |L\,du^2 + 2M\,du\,dv + N\,dv^2| = |L\cos^2\alpha + 2M\cos\alpha\,\mathrm{sen}\,\alpha + N\,\mathrm{sen}^2\alpha|\,\rho^2$, donde $\cos\alpha = du/\rho$, $\mathrm{sen}\,\alpha = dv/\rho$. Por cuanto II_P es una forma de signo fijo, la expresión $|L\cos^2\alpha + 2M\cos\alpha\,\mathrm{sen}\,\alpha + N\,\mathrm{sen}^2\alpha|$ tiene mínimo positivo A, es decir, $|\mathrm{II}_P| \geqslant A\rho^2$.

El punto P de una superficie se llama en este caso *elíptico*.

Una esfera, un elipsoide, un paraboloide elíptico son ejemplos de las superficies, cada punto de las cuales es elíptica.

2°. La segunda forma cuadrática II_P es de *signo variable* ($LN - M^2 < 0$). En este caso, en el punto P de la superficie pueden indicarse dos direcciones diferentes, $du : dv$ y $\delta u : \delta v$, de tal índole que para los valores de las diferenciales de las variables u y v, que definen las citadas direcciones, la segunda forma se anula, mientras que las demás direcciones se subdividen por dos mencionadas en dos

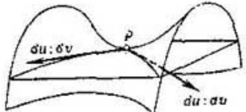


Fig. 12.11.



Fig. 12.12.

clases. Para las diferenciales du y dv, la razón $du : dv$ entre las cuales define una dirección perteneciente a una de estas clases, la segunda forma es positiva; para las razones $du : dv$, que definen las direcciones de la otra clase, la segunda forma es negativa. Por eso, la superficie en cercanías del punto P se dispone por los lados diferentes respecto del plano tangente π_P en este punto (fig. 12.11).

El punto P de la superficie se llama en este caso *hiperbólico*.

Cada punto de un hiperboloide de una hoja y de un paraboloide hiperbólico es hiperbólico.

3° La segunda forma cuadrática II_P es *casi de signo fijo* ($LN - M^2 = 0$). En este caso, sobre la superficie puede indicarse en el punto P una dirección $du : dv$ de tal índole que para los valores de las diferenciales du y dv, que definen dicha dirección, la segunda forma se reduce a cero. Para todos los demás valores de las diferenciales la forma conserva intacto su signo [1]) (fig. 12.12).

El punto P de la superficie se llama en este caso *parabólico*. Cada punto de una superficie cilíndrica es parabólico.

4°. La segunda forma cuadrática II_P es igual a cero en el punto P ($L = M = N = 0$). El punto P se llama en este caso *punto de aplastamiento*. En la fig. 12.13 se expone una superficie con un punto de aplastamiento.

Cualquier punto de un plano es punto de aplastamiento. Como ejemplo de punto aislado de aplastamiento puede servir un punto con las coordenadas (0, 0, 0) de la superficie definida mediante una ecuación $z = x^4 + y^4$.

---

[1]) En este caso la segunda forma puede ser representada en forma del cuadrado de cierta forma lineal de las diferenciales du y dv.

Notemos que si todos los puntos de una superficie son puntos de aplastamiento, la superficie es un plano.

4. Curvatura de una curva sobre la superficie. Supongamos que la superficie regular Φ está definida mediante una función vectorial $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(u, v)$; $\boldsymbol{n}$ es el vector unidad de la normal a Φ, y L, una curva regular sobre Φ que tiene en el punto $P(u, v)$ una dirección $du : dv$.

Elijamos a título de parámetro sobre L la longitud l de un modo tal que $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(u(l), v(l)) = \boldsymbol{r}(l)$ a lo largo de L. En el punto 6 del

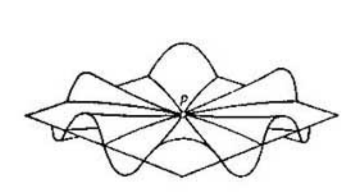


Fig. 12.13.

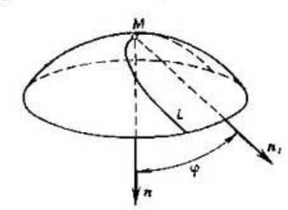


Fig. 12.14.

párrafo anterior se ha establecido que el vector $\boldsymbol{r}''(l)$ está dirigido a lo largo de la normal principal $\boldsymbol{n}_L$ a la curva L en el punto P y que el módulo de este vector es igual a la curvatura k de la curva L en el punto P. Por eso,

$$\boldsymbol{r}''\boldsymbol{n} = k \cos \varphi, \tag{12.47}$$

donde φ es el ángulo entre la normal principal $\boldsymbol{n}_L$ de la curva L y la normal $\boldsymbol{n}$ a la superficie (fig. 12.14). Según la regla de diferenciación de una función compuesta tenemos:

$$\boldsymbol{r}''(l) = \boldsymbol{r}_{uu}u'^2 + 2\boldsymbol{r}_{uv}u'v' + \boldsymbol{r}_{vv}v'^2 + \boldsymbol{r}_u u'' + \boldsymbol{r}_v v''.$$

Por cuanto el vector $\boldsymbol{n}$ es ortogonal a los vectores $\boldsymbol{r}_u$ y $\boldsymbol{r}_v$, sustituyendo la expresión determinada de $\boldsymbol{r}''(l)$ en el primer miembro de (12.47) y teniendo presentes las fórmulas (12.41), obtenemos

$$\begin{aligned} \boldsymbol{r}''\boldsymbol{n} &= (\boldsymbol{r}_{uu}\boldsymbol{n})\, u'^2 + 2\,(\boldsymbol{r}_{uv}\boldsymbol{n})\, u'v' + (\boldsymbol{r}_{vv}\boldsymbol{n})\, v'^2 = \\ &= Lu'^2 + 2Mu'v' + Nv'^2. \end{aligned} \tag{12.48}$$

Puesto que $u' = \frac{du}{dl}$, $v' = \frac{dv}{dl}$, y sobre la curva L se verifica la igualdad $dl^2 = E\,du^2 + 2F\,du\,dv + G\,dv^2$, entonces, de (12.47) y (12.48) proviene una relación

$$k \cos \varphi = \frac{L\,du^2 + 2M\,du\,dv + N\,dv^2}{E\,du^2 + 2F\,du\,dv + G\,dv^2} = \frac{\mathrm{II}}{\mathrm{I}}. \tag{12.49}$$

El segundo miembro de (12.49) depende sólo de la razón $du : dv$, es decir, sólo de la dirección $du : dv$. Por eso, *para todas las curvas*

L sobre la superficie Φ que pasan por el punto P en la dirección dada $du : dv$, la expresión $k \cos \varphi$ es igual a cierta constante k_n:

$$k \cos \varphi = k_n = \text{const.} \tag{12.50}$$

En particular, si una curva L es la así llamada *sección normal* L_n de la superficie Φ en la dirección $du : dv$, es decir, una línea de intersección de la superficie Φ con un plano que pasa por la normal $\boldsymbol{n}$ y la dirección $du : dv$, entonces $\varphi = 0$, $\cos \varphi = 1$, y, por eso, la fórmula (12.50) adquiere la forma

$$k = k_n.$$

De este modo, la magnitud k_n representa la curvatura de la sección normal de la superficie $du : dv$ y puede ser calculada según la fórmula

$$k_n = \frac{L\,du^2 + 2M\,du\,dv + N\,dv^2}{E\,du^2 + 2F\,du\,dv + G\,dv^2} = \frac{\text{II}}{\text{I}}. \tag{12.51}$$

La magnitud k_n se llama también curvatura normal de la línea L.

Notemos que la igualdad (12.50) expresa el contenido del *teorema de Meusnier* [1]).

5. Curvas especiales sobre una superficie.

1°. *Líneas asintóticas.* Una dirección $du : dv$ sobre la superficie regular Φ en un punto P se denomina *asintótica*, si la curvatura normal en esta dirección es igual a cero.

De la relación (12.51) proviene que la dirección $du : dv$ será asintótica sólo en aquel caso en que para esta dirección se cumple la condición

$$L\,du^2 + 2M\,du\,dv + N\,dv^2 = 0. \tag{12.52}$$

Por cuanto la segunda forma se reduce a cero en los puntos hiperbólicos, puntos parabólicos y puntos de aplastamiento de la superficie, sólo en los puntos mencionados se tienen direcciones asintóticas; en un punto hiperbólico dos direcciones asintóticas, en un punto parabólico una dirección asintótica, en un punto de aplastamiento cualquier dirección es asintótica.

Introduzcamos el concepto de *línea asintótica.*

Se llama *línea asintótica* sobre una superficie a una curva, cuya dirección en cada punto es asintótica.

Si una superficie regular se compone de puntos hiperbólicos, está cubierta con dos familias de líneas asintóticas.

Por ejemplo, dos familias de generatrices rectilíneas de un hiperboloide de una hoja son líneas asintóticas.

Si en una superficie se tienen dos familias de líneas asintóticas, ellas pueden tomarse, en el caso general, por líneas de coordenadas u y v. En este caso, a lo largo de la línea u, por ejemplo, no varía el

---

[1]) Meusnier, matemático francés (1754—1799).

parámetro v, y, por eso, en esta línea la segunda forma tiene por expresión $\text{II} = L\,du^2$. Por cuanto en la dirección asintótica $\text{II} = 0$ (véase la relación (12.52)), resulta que $L = 0$. De un modo análogo podemos convencernos de que $N = 0$. Así pues, *si las líneas asintóticas de una superficie son líneas coordenadas, la segunda forma tendrá por expresión*

$$\text{II} = 2M\,du\,dv.$$

2°. *Direcciones principales. Líneas de curvatura.* De la fórmula (12.51) se ve que la curvatura normal en un punto dado es una función de du y dv, y, con mayor precisión, de la razón du/dv, es decir, de la dirección $du : dv$ en el punto dado.

Los valores extremales de la curvatura normal en un punto dado se denominan *curvaturas principales*, y las direcciones correspondientes, *direcciones principales.*

Cerciorémonos de que en un punto dado de una superficie regular siempre hay direcciones principales.

Al suponer

$$\frac{du}{\sqrt{du^2+dv^2}} = \cos\alpha, \quad \frac{dv}{\sqrt{du^2+dv^2}} = \operatorname{sen}\alpha,$$

reduzcamos la expresión (12.51) para k_n a una forma

$$k_n = \frac{L\cos^2\alpha + 2M\cos\alpha\operatorname{sen}\alpha + N\operatorname{sen}^2\alpha}{E\cos^2\alpha + 2F\cos\alpha\operatorname{sen}\alpha + G\operatorname{sen}^2\alpha}.$$

De este modo, en un punto dado la curvatura normal k_n representa una función diferenciable del argumento α, que está definida en un segmento $[0, 2\pi]$ y que toma valores iguales para $\alpha = 0$ y $\alpha = 2\pi$. Por eso, en cierto punto interior α de dicho segmento k_n tiene un extremo local. Al valor mencionado de α le corresponde una dirección $du : dv$ sobre la superficie, la cual será, naturalmente, principal. Si empezamos a medir los ángulos α a partir de esta dirección principal, entonces, razonando análogamente, nos convencemos de que por lo menos para una dirección más $du : dv$ se logra un extremo de la curvatura normal.

Así pues, *en cada punto de una superficie regular existen por lo menos dos diferentes direcciones principales.*

Demos a conocer un método de calcular curvaturas principales en un punto dado. Considerando k_n como función de du y dv, obtenemos de (12.51) la siguiente identidad respecto de du y dv:

$$(L - k_nE)\,du^2 + 2\,(M - k_nF)\,du\,dv + (N - k_nG)\,dv^2 \equiv 0.$$

Diferenciando esta identidad respecto de du y respecto de dv, y tomando en consideración que la derivada de la curvatura normal para la dirección principal es igual a cero, obtendremos para du y dv

que definen cualquier dirección principal, las relaciones:

$$\left.\begin{aligned}(L-k_iE)\,du+(M-k_iF)\,dv=0,\\(M-k_iF)\,du+(N-k_iG)\,dv=0,\end{aligned}\right\}\qquad(12.53)$$

en las cuales k_i es el valor de la curvatura principal en la dirección $du:dv$. Por cuanto en todo punto existen direcciones principales, el sistema (12.53) tiene soluciones no nulas respecto de du y dv. Por consiguiente, ha de ser igual a cero el determinante de este sistema:

$$\begin{vmatrix}L-k_iE & M-k_iF\\ M-k_iF & N-k_iG\end{vmatrix}=0.\qquad(12.54)$$

De la ecuación (12.54) pueden determinarse las curvaturas principales k_i, y a continuación, de las relaciones (12.53), las direcciones principales.

La ecuación (12.54) es ecuación cuadrada respecto de k_i cuyas raíces reales son las curvaturas principales. Por eso, pueden tener lugar dos casos:

1°. La ecuación (12.54) tiene dos raíces reales k_1 y k_2.

2°. Las raíces k_i de la ecuación (12.54) son iguales. Examinemos estos casos separadamente.

1°. *La ecuación* (12.54) *tiene dos raíces diferentes*: k_1 y k_2, $k_1 \neq k_2$. A estas raíces les corresponden dos diferentes direcciones principales. Cerciorémonos de que *si las direcciones de las líneas coordenadas u y v en un punto dado coinciden con las principales, en dicho punto $F = 0$ y $M = 0$. Notemos que la reducción de F a cero significa ortogonalidad de las direcciones principales.*

Así pues, supongamos que las direcciones de las líneas coordenadas u y v en punto dado coinciden con las direcciones principales. Esto significa que las direcciones $du:0$, $0:dv$ son principales, y, por eso, de las relaciones (12.53) provienen las igualdades

$$L-k_1E=0,\quad M-k_1F=0,$$
$$M-k_2F=0,\quad N-k_2G=0.$$

Por cuanto $k_1 \neq k_2$, es evidente que $M = 0$, $F = 0$. Notemos que para la elección mencionada de las líneas coordenadas las curvaturas principales k_1 y k_2 pueden hallarse a partir de las relaciones

$$k_1=\frac{L}{E},\quad k_2=\frac{N}{G}.$$

2°. *La ecuación* (12.54) *tiene dos raíces iguales*: $k_1 = k_2 = k$. *Cerciorémonos de que en este caso cualquier dirección en un punto dado es principal. Si las líneas coordenadas en un punto dado son ortogonales, en el punto citado $F = 0$ y $M = 0$.*

Ya se ha notado que en todo punto se tienen por lo menos *dos direcciones principales diferentes*. En el caso que se considera a cada una de estas direcciones principales le corresponde un mismo valor k de la curvatura principal. Mas, en este caso deben reducirse a cero los coeficientes del sistema (12.53), es decir,

$$L - kE = 0, \quad M - kF = 0, \quad N - kG = 0.$$

De estas igualdades se deduce que en un punto dado los coeficientes de la segunda forma son proporcionales a los coeficientes de la primera forma:

$$L = kE, \quad M = kF, \quad N = kG.$$

Sustituyendo estos valores de L, M y N en la fórmula (12.51), nos convencemos de que en el punto dado las curvaturas de las secciones normales en cualquier dirección $du : dv$ son iguales y equivalen a k. Por consiguiente, cualquier dirección $du : dv$ en el punto dado es principal.

Si las líneas coordenadas en un punto dado son ortogonales, tenemos $F = 0$, y en este caso de la relación $M - kF = 0$ se deduce que también $M = 0$.

Así pues, podemos llegar a la siguiente deducción: *en todo punto de una superficie se tienen direcciones principales ortogonales. Si las direcciones de las líneas coordenadas coinciden con dichas direcciones principales, en el punto citado $F = 0$ y $M = 0$.*

Introduzcamos el concepto de *línea de curvatura.*

Se llama línea de curvatura sobre una superficie a una curva cuya dirección en cada punto es principal.

Sobre cualquier superficie regular se tienen, en el caso general, dos familias diferentes de líneas de curvatura (más arriba se ha indicado que en cada punto hay dos diferentes direcciones principales).

Señalemos que si elegimos, a título de líneas coordenadas, las líneas de curvatura, la primera y la segunda formas de una superficie tendrán por expresión:

$$\mathrm{I} = E\,du^2 + G\,dv^2,$$
$$\mathrm{II} = L\,du^2 + N\,dv^2,$$

puesto que $F = 0$ y $M = 0$.

3°. *Líneas geodésicas.* Se llama *línea geodésica* sobre una superficie una curva en todo punto de la cual la normal principal coincide con la normal a la superficie.

Dos puntos cualesquiera de una superficie completa regular pueden unirse mediante una línea geodésica. Si dichos puntos son suficientemente próximos, la línea geodésica que los une será, además, más corta: cualquier otra línea sobre la superficie que une los puntos mencionados, será de mayor longitud.

Notemos que el movimiento de un punto por la superficie en ausencia de las fuerzas externas se realiza a lo largo de la línea geodésica.

6. Fórmula de Euler. Curvaturas media y gaussiana de una superficie. Teorema de Gauss. Sea P un punto fijo de la superficie regular Φ. Convengamos en considerar que las líneas coordenadas u y v son ortogonales en un punto dado y que las direcciones de dichas líneas coinciden con las direcciones principales. En el p. 5 de este párrafo se ha establecido que con tal elección de las líneas coordenadas en el punto dado se cumplen las relaciones

$$F = 0, \quad M = 0, \quad L - k_1 E = 0, \quad N - k_2 G = 0.$$

Con ayuda de estas relaciones la fórmula (12.51) para la curvatura normal k_n toma por expresión

$$k_n = \frac{k_1 E\, du^2 + k_2 G\, dv^2}{E\, du^2 + G\, dv^2}.$$

Al poner

$$\cos\varphi = \frac{\sqrt{E}\, dv}{\sqrt{E\, du^2 + G\, dv^2}}, \quad \operatorname{sen}\varphi = \frac{\sqrt{G}\, dv}{\sqrt{E\, du^2 + G\, dv^2}}, \qquad (12.55)$$

obtendremos, evidentemente, la siguiente fórmula para la curvatura normal:

$$k_n = k_1 \cos^2\varphi + k_2 \operatorname{sen}^2\varphi. \qquad (12.56)$$

La fórmula (12.56) lleva el nombre *de Euler*. Con ayuda de esta fórmula la curvatura normal k_n en la dirección $du : dv$ puede ser calculada en términos de las curvaturas principales k_1 y k_2.

Evidentemente, las fórmulas de Euler y (12.50) ofrecen una completa información sobre la distribución de las curvaturas de las líneas sobre una superficie.

OBSERVACIÓN 1. El ángulo φ en la fórmula de Euler, cuyo valor puede hallarse, para la dirección dada $du : dv$, según las fórmulas (12.55) representa un ángulo que la dirección $du : dv$ forma con la dirección de la línea coordenada u.

Con el fin de cerciorarse de esto, calculemos, según la fórmula (12.36), el coseno del ángulo formado por las direcciones $du : dv$ y $du : 0$ de la línea u. Al poner en la fórmula (12.36) $\delta u = du$, $\delta v = 0$, obtenemos para el coseno buscado una expresión $\frac{\sqrt{E}\, du}{\sqrt{E\, du^2 + G\, dv^2}}$ la cual coincide con la expresión para $\cos\varphi$, hallada según la primera de las fórmulas (12.55).

En la teoría de las superficies son de amplio uso el concepto de *curvatura media* y el de *curvatura gaussiana* de una superficie en un punto dado.

Se llama curvatura media H de una superficie a una semisuma $\frac{1}{2}(k_1 + k_2)$ de las curvaturas principales. Se llama curvatura gaussiana K de una superficie a un producto $k_1 k_2$ de curvaturas principales.

Volviendo a la ecuación (12.54) para las curvaturas principales y aprovechando las propiedades de las raíces de una ecuación cuadrada, obtenemos las siguientes fórmulas para H y K:

$$H=\frac{1}{2}\,\frac{LG-2MF+NE}{EG-F^2}, \tag{12.57}$$

$$K=\frac{LN-M^2}{EG-F^2}. \tag{12.58}$$

OBSERVACION 2. De la expresión (12.58) para la curvatura gaussiana proviene que su signo coincide con el del discriminante $LN-M^2$ de la segunda forma cuadrática (el discriminante $EG-F^2$ de la primera forma es siempre positivo, puesto que la primera forma es definida positiva). Por eso, la curvatura gaussiana en los puntos elípticos es positiva, en los puntos hiperbólicos es negativa y es nula en los puntos parabólicos y en los de aplastamiento.

A primera vista se produce una impresión de que la curvatura gaussiana K de una superficie puede hallarse sólo en el caso cuando son conocidas las formas cuadráticas primera y segunda de la superficie (véase fórmula (12.58)).

No obstante, en realidad la curvatura gaussiana puede ser expresada sólo en términos de los coeficientes de la primera forma cuadrática y, por eso, representa un objeto de la geometría intrínseca de la superficie. Este hecho notable fue establecido por Gauss [1] y se llama en la literatura matemática *«famoso teorema de Gauss»*. Demostremos este teorema.

Teorema de Gauss. *La curvatura gaussiana K de una superficie puede ser expresada en términos de los coeficientes de la primera forma cuadrática de la superficie y de sus derivadas.*

DEMOSTRACIÓN. Volviendo a la fórmula (12.58) para la curvatura gaussiana K y haciendo uso de la expresión (12.42) para los coeficientes de la segunda forma cuadrática, es fácil convencerse de que con el fin de demostrar el teorema, basta expresar en términos de los coeficientes de la primera forma cuadrática y de sus derivadas la siguiente expresión:

$$A=(\mathbf{r}_{uu}\mathbf{r}_u\mathbf{r}_v)(\mathbf{r}_{vv}\mathbf{r}_u\mathbf{r}_v)-(\mathbf{r}_{uv}\mathbf{r}_u\mathbf{r}_v)^2.$$

Esta expresión se transforma fácilmente en una forma [2])

$$A=\begin{vmatrix}\mathbf{r}_{uu}\mathbf{r}_{vv}-\mathbf{r}_{uv}^2 & \mathbf{r}_{uu}\mathbf{r}_u & \mathbf{r}_{uu}\mathbf{r}_v\\ \mathbf{r}_u\mathbf{r}_{vv} & E & F\\ \mathbf{r}_v\mathbf{r}_{vv} & F & G\end{vmatrix}-\begin{vmatrix}0 & \mathbf{r}_{uv}\mathbf{r}_u & \mathbf{r}_{uv}\mathbf{r}_v\\ \mathbf{r}_u\mathbf{r}_{uv} & E & F\\ \mathbf{r}_v\mathbf{r}_{uv} & F & G\end{vmatrix}. \tag{12.59}$$

[1]) C. F. Gauss (1777—1855), matemático eminente alemán.

[2]) En la transformación se usa la siguiente identidad:

$$(\mathbf{a}_1\mathbf{b}_1\mathbf{c}_1)(\mathbf{a}_2\mathbf{b}_2\mathbf{c}_2)=\begin{vmatrix}\mathbf{a}_1\mathbf{a}_2 & \mathbf{a}_1\mathbf{b}_2 & \mathbf{a}_1\mathbf{c}_2\\ \mathbf{b}_1\mathbf{a}_2 & \mathbf{b}_1\mathbf{b}_2 & \mathbf{b}_1\mathbf{c}_2\\ \mathbf{c}_1\mathbf{a}_2 & \mathbf{c}_1\mathbf{b}_2 & \mathbf{c}_1\mathbf{c}_2\end{vmatrix}.$$

Al diferenciar respecto de u y v las expresiones

$$\mathbf{r}_u^2 = E, \quad \mathbf{r}_u\mathbf{r}_v = F; \quad \mathbf{r}_v^2 = G,$$

obtenemos

$$\mathbf{r}_{uu}\mathbf{r}_u = \frac{1}{2} E_u, \quad \mathbf{r}_{uv}\mathbf{r}_u = \frac{1}{2} E_v, \quad \mathbf{r}_{vv}\mathbf{r}_v = \frac{1}{2} G_v,$$

$$\mathbf{r}_{uv}\mathbf{r}_v = \frac{1}{2} G_u, \quad \mathbf{r}_{uu}\mathbf{r}_v = F_u - \frac{1}{2} E_v, \quad \mathbf{r}_{vv}\mathbf{r}_u = F_v - \frac{1}{2} G_u.$$

Diferenciando la expresión para $\mathbf{r}_{uu}\mathbf{r}_v$ respecto de v, y la expresión $\mathbf{r}_{uv}\mathbf{r}_v$ respecto de u, y sustrayendo los resultados obtenidos, hallamos

$$\mathbf{r}_{uu}\mathbf{r}_{vv} - \mathbf{r}_{uv}^2 = -\frac{1}{2} G_{uu} + F_{uv} - \frac{1}{2} E_{vv}.$$

Sustituyendo la expresión determinada y las expresiones para los productos escalares de las derivadas en el segundo miembro de (12.59), nos convencemos de que el teorema es válido.

Aduzcamos en conclusión una expresión para la curvatura gaussiana K en términos de las coeficientes de la primera forma cuadrática y de sus derivadas:

$$K = \frac{1}{(EG - F^2)^2} \begin{vmatrix} \left(-\frac{1}{2} G_{uu} + F_{uv} - \frac{1}{2} E_{vv}\right) & \frac{1}{2} E_u & \left(F_u - \frac{1}{2} E_v\right) \\ \left(F_v - \frac{1}{2} G_u\right) & E & F \\ \frac{1}{2} G_v & F & G \end{vmatrix} -$$

$$- \frac{1}{(EG - F^2)^2} \begin{vmatrix} 0 & \frac{1}{2} E_v & \frac{1}{2} G_u \\ \frac{1}{2} E_v & E & F \\ \frac{1}{2} G_u & F & G \end{vmatrix}.$$

Anexo

SOBRE EL CÁLCULO DE LOS VALORES DE UNA FUNCIÓN SEGÚN LOS COEFICIENTES DE FOURIER DADOS EN LA FORMA APROXIMADA

1. Problema de sumación de la serie trigonométrica de Fourier con coeficientes de Fourier dados en la forma aproximada. Supongamos al principio que una función $f(x)$ satisface las condiciones que aseguran convergencia uniforme de su serie trigonométrica de Fourier

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}(a_k\cos kx+b_k\operatorname{sen}kx) \tag{A.1}$$

en todo el segmento $[-\pi, \pi]$. Admitamos también que en lugar de los valores exactos de los coeficientes trigonométricos de Fourier a_k y b_k de dicha función se conocen sólo valores aproximados $\widetilde{a}_k$ y $\widetilde{b}_k$ de los coeficientes de Fourier mencionados. Precisamente este caso se encuentra frecuentemente en los problemas de aplicación.

Convengamos en considerar que los errores de definición de los valores aproximados de los coeficientes trigonométricos de Fourier son pequeños en el sentido de la norma de un espacio l^2 [1]). Esto quiere decir que se cumple una desigualdad

$$\frac{(a_0-\widetilde{a}_0)^2}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}(a_k-\widetilde{a}_k)^2+(b_k-\widetilde{b}_k)^2\leqslant\delta^2, \tag{A.2}$$

donde δ es un número positivo suficientemente pequeño, que se llamará *error* en la definición de los coeficientes de Fourier.

Surge, naturalmente, un problema importante para las aplicaciones: dados los valores aproximados de los coeficientes de Fourier $\widetilde{a}_k$ y $\widetilde{b}_k$, restablecer en un punto fijo dado x la función $f(x)$ con un error $\varepsilon(\delta)$ que tiende a cero cuando $\delta\to 0$.

Probemos que por una sumación directa de la serie de Fourier con los coeficientes de Fourier dados en la forma aproximada

$$\frac{\widetilde{a}_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}(\widetilde{a}_k\cos kx+\widetilde{b}_k\operatorname{sen}kx), \tag{A.3}$$

es imposible, en el caso general, restablecer la función $f(x)$ en un punto dado x, cualquiera que sea el grado de exactitud.

---

[1]) Véanse en el p. 1, § 1, c. 11 la definición del espacio l^2 y de norma de sus elementos.

Fijamos arbitrariamente un error pequeño $\delta > 0$ y ponemos $C = \sqrt{\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}}$. Supongamos que los errores en la definición de los coeficientes de Fourier tienen la siguiente forma concreta:

$$\widetilde{a}_0 - a_0 = 0, \quad a_k - \widetilde{a}_k = b_k - \widetilde{b}_k = \frac{\delta}{kC\sqrt{2}} \quad \text{para } k = 1, 2, \ldots$$

Para los coeficientes de Fourier dados con tales errores será válida, evidentemente, la relación (A. 2) con el signo de igualdad exacta. Al mismo tiempo, al sustituir la serie exacta de Fourier (A. 1) por una serie de Fourier con coeficientes dados aproximadamente (A.3), cometimos un error que es igual a la suma de la serie

$$\sum_{k=1}^{\infty} (\widetilde{a}_k - a_k) \cos kx + (\widetilde{b}_k - b_k) \operatorname{sen} kx.$$

En el punto $x = 0$ este error será igual a la suma de una serie

$$\sum_{k=1}^{\infty} (\widetilde{a}_k - a_k) = \frac{\delta}{C\sqrt{2}} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} = \infty$$

(por pequeño que sea un error $\delta > 0$ que se fija por nosotros).

De este modo, por rápido que converja la serie trigonométrica de Fourier (A.1) hacia la función $f(x)$ y por pequeño que sea un error δ en la relación (A.2) que prefija el grado de desviación de los coeficientes aproximados de Fourier con relación a los exactos, por sumación directa de la serie de Fourier con coeficientes dados aproximadamente (A.3) resulta imposible restablecer la función $f(x)$ en un punto dado del segmento $[-\pi, \pi]$, cualquiera que sea el grado de exactitud.

Hemos demostrado, de hecho, que, por pequeño que sea un número $\delta > 0$ que caracteriza la desviación (una de la otra en el sentido de (A.2)) de dos totalidades de coeficientes de Fourier $\{a_k, b_k\}$ y $\{\widetilde{a}_k, \widetilde{b}_k\}$, correspondiente a estas dos totalidades, las sumas directas de las series trigonométricas de Fourier (A.1), y (A.3) puede diferenciarse una de la otra tan fuertemente como se quiera.

Los problemas de tal índole, en los cuales una desviación tan pequeña como se quiera en la definición de los datos iniciales (en el caso examinado el papel de estos datos iniciales lo desempeña una totalidad de coeficientes de Fourier) puede causar una desviación, tan grande como se quiera, de las soluciones correspondientes a estos datos iniciales (en el caso examinado por solución se entiende una suma directa de la serie trigonométrica de Fourier) se encuentran frecuentemente en las matemáticas y en las aplicaciones, recibiendo el nombre de *problemas planteados de un modo incorrecto.*

Dicho de otro modo, el problema examinado sobre la sumación directa de una serie trigonométrica de Fourier está planteado de un modo incorrecto.

Un método general de resolución de una amplia clase de problemas planteados de un modo incorrecto está elaborado por un matemático soviético *A. N. Tíjonov* y lleva el nombre de *método de regularización* [1]).

Detengámonos aquí en el método de regularización sólo con arreglo al problema examinado sobre la sumación de la serie trigonométrica de Fourier.

2. Método de regularización para el problema de sumación de una serie trigonométrica de Fourier. Con arreglo al problema de sumación de una serie trigonométrica de Fourier con coeficientes de Fourier dados aproximadamente, el método de regularización conduce a un algoritmo que considera a título de un valor aproximado de la función $f(x)$ no la suma de la serie (A.3), sino la de una serie

$$\frac{\tilde{a}_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}(\tilde{a}_k\cos kx+\tilde{b}_k\operatorname{sen}kx)\cdot\frac{1}{1+k^2\alpha}, \tag{A.4}$$

que se obtiene por multiplicación del k-ésimo término de la serie (A.3) por un factor «regularizador» $\frac{1}{1+k^2\alpha}$, en el cual el parámetro α es una magnitud del mismo orden de pequeñez que el error δ en la relación (A.2) que prefija la desviación de los coeficientes de Fourier.

Con el fin de argumentar el citado algoritmo, demostremos el siguiente teorema *fundamental.*

Teorema de A. N. Tíjonov. *Supongamos que una función $f(x)$ pertenece a la clase $L^2[-\pi,\pi]$ y es continua en un punto dado fijo x sobre el segmento $[-\pi,\pi]$. Entonces, para todo $\delta>0$ y para α, que tiene el mismo orden de pequeñez que δ, la suma de la serie* (A.4) *con los coeficientes $\tilde{a}_k$ y $\tilde{b}_k$ que satisfacen la relación* (A.2), *coincide en el punto dado fijo x con $f(x)$ con un error $\varepsilon(\delta)$, el cual tiende a cero cuando $\delta\to 0$* [2]).

DEMOSTRACIÓN. Convengamos en considerar, sin perder la generalidad de nuestros razonamientos, que $\alpha=\delta$ (pues, el caso de $\alpha=C(\delta)\cdot\delta$, donde $0<C_1\leqslant C(\delta)\leqslant C_2$ se examina de un modo sumamente análogo). Basta demostrar que para cualquier $\varepsilon>0$ existe tal $\delta_0(\varepsilon)>0$, que en un punto fijo dado x se cumple, para todos los δ positivos que satisfacen la condición $\delta\leqslant\delta_0$, una desi-

[1]) Por un ciclo de obras dedicadas a la resolución de los problemas planteados de un modo incorrecto al académico A. N. Tíjonov le fue otorgado en el año 1966 el premio Lenin.

[2]) El teorema enunciado representa un caso particular de una afirmación mucho mas general demostrada por Tíjonov.

gualdad

$$\left|\frac{\widetilde{a}_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}[\widetilde{a}_k\cos kx+\widetilde{b}_k\operatorname{sen} kx]\cdot\frac{1}{1+k^2\delta}-f(x)\right|\leqslant\varepsilon. \qquad (A.5)$$

Fijemos un $\varepsilon > 0$ arbitrario. Cerciorémonos primero de lo que para ε fijo se encontrará un número $\delta_1(\varepsilon) > 0$ tal que para todo δ positivo que satisface la condición de que $\delta \leqslant \delta_1(\varepsilon)$, se cumple una desigualdad

$$\left|\frac{\widetilde{a}_0-a_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}[(\widetilde{a}_k-a_k)\cos kx+(\widetilde{b}_k-b_k)\operatorname{sen} kx]\frac{1}{1+k^2\delta}\right|<\frac{\varepsilon}{4}. \quad (A.6)$$

Para establecer (A.6), basta convencerse de que la suma que figura en el primer miembro de (A.6) tiende a cero, cuando $\delta \to 0+0$.

Al dividir la suma en el segundo miembro de (A.6) en dos sumas, en la primera de las cuales figuran los sumandos con números k que satisfacen la condición $k < 1/\delta$, y en la segunda, todos los sumandos restantes, y al aplicar a cada una de estas dos sumas la desigualdad de Cauchy—Buniakovski, tendremos [1])

$$\left|\frac{\widetilde{a}_0-a_0}{2}\sum_{k=1}^{\infty}[(\widetilde{a}_k-a_k)\cos kx+(\widetilde{b}_k-b_k)\operatorname{sen} kx]\frac{1}{1+k^2\delta}\right|\leqslant$$

$$\leqslant\sqrt{\left\{\frac{(\widetilde{a}_0-a_0)^2}{2}+\sum_{k<\frac{1}{\delta}}[(\widetilde{a}_k-a_k)^2+(\widetilde{b}_k-b_k)^2]\right\}O\left(\frac{1}{\delta}\right)}+$$

$$+\sqrt{\sum_{k\geqslant\frac{1}{\delta}}[(\widetilde{a}_k-a_k)^2+(\widetilde{b}_k-b_k)^2]\cdot\sum_{k\geqslant\frac{1}{\delta}}\frac{1}{k^4\delta^2}}. \qquad (A.7)$$

Teniendo presente (A.2) y tomando en consideración que

$$\sum_{k\geqslant 1/\delta}\frac{1}{k^4}=O(\delta^3)$$

(por ejemplo, en virtud del criterio integral de Cauchy—Maclaurin, véase la desiguadad (4.38) del cap. 4, v. II), resulta que en el segundo miembro de (A.7) figura una magnitud $O(\sqrt{\delta})+O(\delta^{3/2})$.

---

[1]) En este caso tenemos en cuenta también que $\frac{1}{1+k^2\delta}\leqslant 1$, $\frac{1}{1+k^2\delta}<$ $<\frac{1}{k^2\delta}$.

Podemos considerar, pues, que la desigualdad (A.6) está demostrada, y para establecer la desigualdad (A.5), basta probar que para $\varepsilon > 0$ fijo se encontrará un número $\delta_2(\varepsilon) > 0$ tal que con todos los δ positivos que satisfacen la condición $\delta \leqslant \delta_2(\varepsilon)$ se cumple la desigualdad

$$\left| \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kx + b_k \operatorname{sen} kx) \frac{1}{1+k^2\delta} - f(x) \right| < \frac{3}{4}\varepsilon. \quad \text{(A.8)}$$

Puesto que, por hipótesis, la función $f(x)$ es continua en el punto dado fijo x, para $\varepsilon > 0$ fijo podemos fijar tal $\eta > 0$ que, cualesquiera que sean los valores de y que satisfacen la condición de que $|y - x| < \eta$, se cumplirá una desigualdad

$$|f(y) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{4}. \quad \text{(A.9)}$$

Pongamos ahora $\gamma = 1/\sqrt{\delta}$ y examinemos, para el punto fijo x y número fijo $\eta > 0$, una función $v_x(y)$, definida en el semisegmento $x - \eta < y \leqslant x - \eta + 2\pi$ mediante la igualdad [1])

$$v_x(y) = \begin{cases} \frac{\gamma\pi}{2} \cdot e^{-\gamma|x-y|} & \text{para } x - \eta < y < x + \eta, \\ 0 & \text{para } x + \eta \leqslant y \leqslant x - \eta + 2\pi. \end{cases} \quad \text{(A.10)}$$

y prolongada periódicamente con un período de 2π a toda la recta infinita $-\infty < y < +\infty$.

Calculemos los coeficientes trigonométricos de Fourier A_k y B_k de la función $v_x(y)$.

De la igualdad (A.10) y de la condición de que $v_x(y)$ es periódica con el período de 2π, llegamos a que [2])

$$A_k = \frac{1}{\pi} \int_{x-\eta}^{x+\eta} v_x(y) \cos ky\, dy = \frac{\gamma}{2} \int_{x-\eta}^{x+\eta} e^{-\gamma|x-y|} \cos ky\, dy =$$

$$= \frac{\gamma}{2} \int_{-\eta}^{\eta} e^{-\gamma|t|} \cos k(t+x)\, dt = \frac{\gamma}{2} \cos kx \int_{-\eta}^{\eta} e^{-\gamma|t|} \cos kt\, dt -$$

$$- \frac{\gamma}{2} \operatorname{sen} kx \int_{-\eta}^{\eta} e^{-\gamma|t|} \operatorname{sen} kt\, dt = \gamma \cos kx \int_{0}^{\eta} e^{-\gamma t} \cos kt\, dt.$$

---

[1]) Sin perder la generalidad consideramos que $\eta < \pi$.

[2]) En este caso se toma en consideración que todas las integrales de una función periódica en los segmentos cuya longitud es igual a su período coinciden, realizamos una sustitución de la variable $y = t + x$, y tenemos presente que $\int_{-\eta}^{\eta} e^{-\gamma|t|} \cos kt\, dt = 2\int_{0}^{\eta} e^{-\gamma t} \cos kt\, dt$, $\int_{-\eta}^{\eta} e^{-\gamma|t|} \operatorname{sen} kt = 0$.

Luego, por cuanto

$$\int_0^\eta e^{-\gamma t}\cos kt\,dt=\left[\frac{e^{-\gamma t}(-\gamma\cos kt+k\,\mathrm{sen}\,kt)}{k^2+\gamma^2}\right]\Bigg|_{t=0}^{t=\eta}=\frac{\gamma}{k^2+\gamma^2}+e^{-\gamma\eta}\cdot\sigma_k,$$

donde

$$\sigma_k=\frac{-\gamma\cos k\eta+k\,\mathrm{sen}\,k\eta}{k^2+\gamma^2}, \tag{A.11}$$

entonces, teniendo en cuenta que $\delta = 1/\gamma^2$, obtenemos la siguiente expresión para el coeficiente de Fourier A_k:

$$A_k=\frac{\cos kx}{1+k^2\delta}+e^{-\gamma\eta}\cos kx\cdot\gamma\cdot\sigma_k. \tag{A.12}$$

De un modo sumamente análogo se establece que

$$B_k=\frac{\mathrm{sen}\,kx}{1+k^2\delta}+e^{-\gamma\eta}\,\mathrm{sen}\,kx\cdot\gamma\cdot\sigma_k. \tag{A.13}$$

Dado que, por hipótesis, la función $f(y)$ pertenece a la clase $L^2[-\pi, \pi]$ y que la función $v_x(y)$ pertenece a la misma clase con $\delta=\frac{1}{\sqrt{\gamma}}>0$ cualquiera, resulta ser válida la igualdad de Parseval (véase la igualdad (11.28))

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}v_x(y)\,f(y)\,dy=\frac{A_0a_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}(A_k\cdot a_k+B_k\cdot b_k). \tag{A.14}$$

De las relaciones (A.12), (A.13) y (A.14) se deduce que con el fin de demostrar la desiguadad (A.8), basta establecer que para todos los δ suficientemente pequeños cumplen las desigualdades

$$\left|\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}v_x(y)\,f(y)\,dy-f(x)\right|<\frac{\varepsilon}{2}, \tag{A.15}$$

$$\left|\frac{a_0}{2}e^{-\gamma\eta}\gamma\sigma_0+e^{-\gamma\eta}\gamma\sum_{k=1}^{\infty}\sigma_k\,(a_k\cos kx+b_k\,\mathrm{sen}\,kx)\right|<\frac{\varepsilon}{4}. \tag{A.16}$$

Hagamos prolongar la función $f(y)$ periódicamente con el período de 2π a toda la recta infinita.

Para demostrar la desigualdad (A.15), notemos que en virtud de que las funciones $v_x(y)$ y $f(x)$ son 2π-periódicas y debido a la igualdad (A.10)

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}v_x(y)\,f(y)\,dy=\frac{1}{\pi}\int_{x-\eta}^{x-\eta+2\pi}v_x(y)\,f(y)\,dy=$$

$$= \frac{\gamma}{2} \int_{x-\eta}^{x+\eta} e^{-\gamma|x-y|} f(y)\, dy = f(x) \frac{\gamma}{2} \int_{x-\eta}^{x+\eta} e^{-\gamma|x-y|}\, dy +$$

$$+ \frac{\gamma}{2} \int_{x-\eta}^{x+\eta} [f(y) - f(x)]\, e^{-\gamma|x-y|}\, dy. \qquad (A.17)$$

Teniendo presente que [1])

$$\frac{\gamma}{2} \int_{x-\eta}^{x+\eta} e^{-\gamma|x-y|}\, dy = \frac{\gamma}{2} \int_{-\eta}^{\eta} e^{-\gamma|t|}\, dt = \gamma \int_{0}^{\eta} e^{-\gamma t}\, dt = 1 - e^{-\gamma\eta},$$

y tomando en consideración que para todo y del segmento $[x - \eta, x + \eta]$ se cumple la desigualdad (A.9), llegamos, con auyda de las relaciones (A.17) a que

$$\left| \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} v_x(y) f(y)\, dy - f(x) \right| \leqslant e^{-\gamma\eta} \mid f(x) \mid + \frac{\varepsilon}{4} (1 - e^{-\gamma\eta}) \leqslant$$

$$\leqslant e^{-\gamma\eta} \mid f(x) \mid + \frac{\varepsilon}{4}.$$

Por cuanto para todo punto fijo x y para todos los números fijos $\varepsilon > 0$ y $\eta > 0$ es válida, con cualquier $\delta = 1/\gamma^2$ suficientemente pequeño, la desigualdad $e^{-\gamma\eta} \mid f(x) \mid < \varepsilon/4$, la relación (A.15) queda demostrada.

Resta por demostrar la desigualdad (A.16). De (A.11) resulta evidente que para las magnitudes σ_k con todo $k = 1, 2, \ldots$ es válida la estimación

$$\mid \sigma_k \mid \leqslant 2/k. \qquad (A.18)$$

Para la magnitud σ_0 de (A.11) obtenemos, para cualquier $\delta = 1/\gamma^2$ una estimación

$$\mid \sigma_0 \mid \leqslant 1/\gamma \leqslant 1. \qquad (A.19)$$

Aplicando a la suma que figura en el primer miembro de (A.16) la desigualdad de Cauchy—Biniakovski y aprovechando las estimaciones (A.18) y (A.19), obtendremos [2])

$$\left| \frac{a_0}{2} e^{-\gamma\eta}\gamma\sigma_0 + e^{-\gamma\eta}\gamma \sum_{k=1}^{\infty} \sigma_k (a_k \cos kx + b_k \operatorname{sen} kx) \right| \leqslant$$

$$\leqslant 2e^{-\gamma\eta}\gamma \left[\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k^2 + b_k^2) \right]^{1/2} \cdot \left[1 + 4 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} \right]^{1/2}. \qquad (A.20)$$

[1]) Al calcular la integral mencionada cambiamos la variable $y = t + x$.

[2]) En este caso mayoramos por la unidad los módulos de las funciones $\cos kx$ y $\operatorname{sen} kx$.

Ambas sumas que figuran entre corchetes del segundo miembro en (A.20) están acotadas por una constante (independiente de δ). El carácter acotado de la primera de las sumas citadas proviene en seguida de la desigualdad de Bessel y, de la segunda fue demostrado en el cap. 4, v. II.

Por cuanto, para todo $\eta > 0$ fijo, $\lim\limits_{\delta\to 0} e^{-\gamma\eta}\cdot\gamma = \lim\limits_{\delta\to 0} e^{-\frac{\eta}{\delta^2}}\frac{1}{\delta^2}=0$, el segundo miembro de (A.20) es menor que el número $\varepsilon/4$ con todo $\varepsilon > 0$ fijo, cualquiera que sea δ positivo pequeño. El teorema está demostrado.

3. Observaciones conclusivas sobre el significado del método de regularización. El método de regularización propuesto por A.N. Tíjonov es de gran importancia científica.

Supongamos que con ayuda de algún aparato medimos las características frecuenciales de un proceso físico que se analiza. Por imperfección del aparato dichas características frecuenciales se miden con cierto error.

Surge, naturalmente, un problema de si hemos de perfeccionar indefinidamente la precisión del aparato con el fin de obtener una idea, exacta al máximo, del proceso físico que nos interesa, o bien el camino hacia el objetivo planteado radica en el desarrollo de tales métodos matemáticos de elaboración de los resultados de medición que nos permitan extraer la máxima información sobre el proceso en consideración, sirviéndonos de los aparatos de medición de las características frecuenciales que hoy día están en nuestra disposición.

El método de regularización indica una vía hacia tal elaboración matemática de los resultados de medición de las características de frecuencia (es decir, de los coeficientes de Fourier) que nos proporciona la información sobre un fenómeno físico estudiando (es decir, sobre la función buscada $f(x)$) con un error correspondiente al error en los resultados de medición de las características de frecuencia.

INDICE ALFABETICO

A NUESTROS LECTORES:

Mir edita libros soviéticos traducidos al español, inglés, francés, árabe y otros idiomas extranjeros. Entre ellos figuran las mejores obras de las distintas ramas de la ciencia y la técnica, manuales para los centros de enseñanza superior y escuelas tecnológicas, literatura sobre ciencias naturales y médicas. También se incluyen monografías, libros de divulgación científica y ciencia-ficción.

Dirijan sus opiniones a la Editorial Mir, 1 Rizhski per., 2, 129820, Moscú, I-110, GSP, USSR.